

Introduzione all'analisi dei dispositivi a semiconduttore

Original

Introduzione all'analisi dei dispositivi a semiconduttore / Masera, Guido; Carlo, Naldi; Piccinini, Gianluca. - STAMPA. - (1995), pp. 1-566.

Availability:

This version is available at: 11583/2556136 since:

Publisher:

Hoepli Editore

Published

DOI:

Terms of use:

openAccess

This article is made available under terms and conditions as specified in the corresponding bibliographic description in the repository

Publisher copyright

(Article begins on next page)

Capitolo 1

Modelli di proprietà elettroniche dei materiali

In questo primo capitolo, partendo dalla natura discreta dell'energia e dal concetto di fotone, si arriva a descrivere la natura quantistica dell'elettrone, chiarendo in tal modo alcuni fenomeni che si riflettono sul comportamento macroscopico dei dispositivi elettronici.

L'equazione di Schrödinger viene utilizzata come strumento di analisi per la determinazione di soluzioni a energia definita (stazionarie) per l'elettrone in varie condizioni di energia potenziale. In particolare si esaminano le funzioni d'onda associate a un elettrone vincolato a una buca di potenziale di altezza finita al fine di determinare i livelli energetici ammissibili per l'elettrone legato. Ne risulta che gli stati occupabili all'interno di una buca di potenziale sono finiti e caratterizzati da livelli energetici discreti.

Se da una parte lo studio dell'elettrone legato a una buca di potenziale permette di intuire come l'energia di un elettrone all'interno di un atomo o di un reticolo cristallino sia vincolata a ben precisi stati, dall'altra la situazione di maggior interesse è sicuramente quella relativa al comportamento di un elettrone che incontra una barriera di potenziale avendo una energia totale inferiore all'altezza della barriera. Sebbene la fisica classica indichi come nulla la probabilità di attraversamento, la soluzione dell'equazione di Schrödinger mostra una probabilità di attraversamento relativamente alta quando la larghezza della barriera è dell'ordine delle decine di Å (effetto tunnel). Il coefficiente di trasmissione tunnel rappresenta la probabilità di ritrovare l'elettrone dall'altra parte della barriera e giustifica molti fenomeni di conduzione altrimenti inspiegabili quali il comportamento non raddrizzante delle giunzioni metallo-semiconduttore fortemente drogato e il passaggio di elettroni nell'ossido nei dispositivi a gate flottante solo per accennare alle conseguenze di maggiore rilevanza nei circuiti integrati.

In tutti i casi esaminati l'energia potenziale si può suddividere in campi in cui è costante, quindi l'equazione di Schrödinger si può ricondurre a equazioni differenziali a coefficienti costanti risolvibili in forma analitica. Per l'analisi di barriere triangolari o comunque a variazione non brusca si usa un metodo approssimato, il metodo WKB, che viene applicato allo studio della emissione termoelettronica.

Proprietà ondulatorie delle particelle ed equazione di Schrödinger

Lo studio dei fenomeni che regolano il comportamento delle particelle microscopiche (elettroni, fotoni ecc.) e non sono percepibili dai nostri sensi si basa sul modello della *meccanica quantistica o ondulatoria*. Il principio fondamentale è quello di associare proprietà di tipo ondulatorio alla particella¹ e descriverne il comportamento mediante una funzione del punto P e del tempo, la funzione d'onda $\psi(P, t) = \psi(\underline{r}, t)$ ². La funzione d'onda ψ non ha alcun significato fisico, nel senso che non è misurabile con uno strumento, ha invece significato il suo modulo al quadrato $|\psi(P, t)|^2$ che è proporzionale alla densità di probabilità che la particella si trovi nel punto P all'istante t . La natura ondulatoria dell'elettrone implica che la funzione ψ debba soddisfare a un'equazione d'onda, che prende il nome di equazione di Schrödinger. L'equazione di Schrödinger nella sua forma generale per funzioni d'onda dipendenti dal tempo e dallo spazio è

$$+j\frac{h}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\psi(\underline{r}, t) = \left[-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\nabla^2 + U(\underline{r}, t) \right] \psi(\underline{r}, t)$$

L'equazione di Schrödinger rappresenta un modello utile per interpretare la realtà fisica nel senso che, descritto l'ambiente in cui si trova la particella attraverso la funzione energia potenziale U , risolvendo si ottiene la funzione ψ che descrive il comportamento della particella.

Imponendo soluzioni a variabili separabili della forma $\psi(\underline{r}, t) = \phi(\underline{r}) e^{j\omega t}$, la forma dell'equazione di Schrödinger che regola le variazioni spaziali, per soluzioni a energia definita ($E = \hbar\omega$), è

$$\nabla^2\phi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}[E - U(P)]\phi = 0$$

Con questo strumento si esaminano situazioni tipiche di energia potenziale quali la buca, il gradino e la barriera di energia potenziale. Rilevante in questo ultimo caso è il cosiddetto *effetto tunnel* per cui una particella di energia E è in grado di attraversare una barriera di altezza $U_0 > E$ e larga L , nel senso che la probabilità T che essa venga trasmessa³ non è nulla.

Coefficiente di trasmissione per effetto tunnel attraverso una barriera costante di altezza U_0 e larghezza L

$$T = \left\{ 1 + \frac{U_0^2 \sinh^2 \beta L}{4E(U_0 - E)} \right\}^{-1}$$

dove

$$\beta = \frac{\sqrt{2m^*(U_0 - E)}}{\hbar}$$

Nel caso frequente in cui T è piccolo, cioè $\beta L \gg 1$, l'espressione si semplifica:

$$T \simeq \frac{16E(U_0 - E)}{U_0^2} e^{-2\beta L}$$

¹In alcuni esperimenti, quali la diffrazione da una fenditura, la riflessione Bragg da un cristallo ecc., una particella di impulso p si comporta come un'onda di lunghezza d'onda $\lambda = h/p$.

²Il punto P può essere individuato mediante il vettore $\underline{r} = (\underline{P}-\underline{O})$, dove O è l'origine del sistema di riferimento.

³Il coefficiente di trasmissione per effetto tunnel è definito come

$$T = \frac{\text{probabilità che la particella si trovi dopo la barriera}}{\text{probabilità che la particella si trovi prima della barriera}}$$

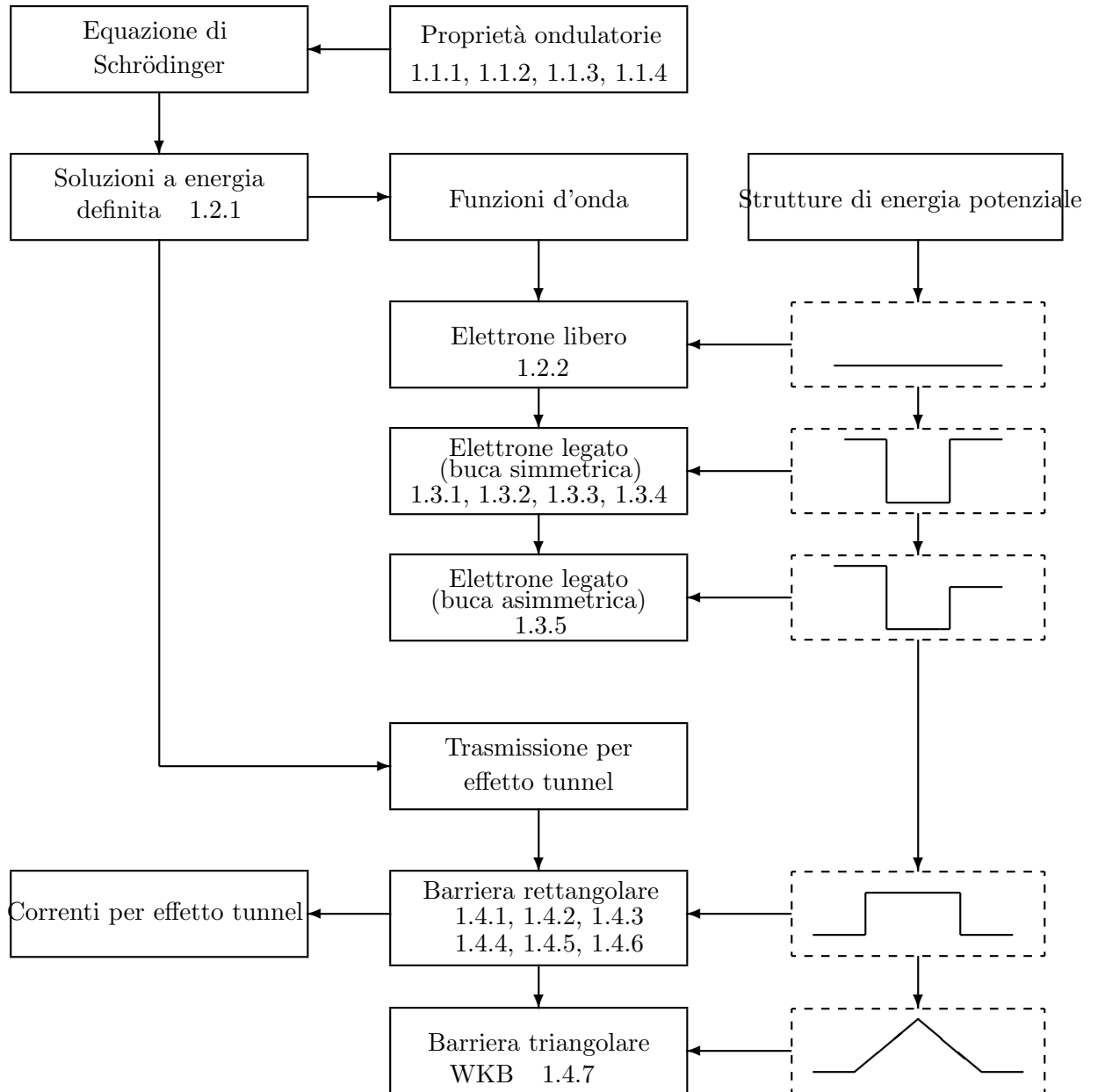


Figura 1.1: Struttura del capitolo 1.

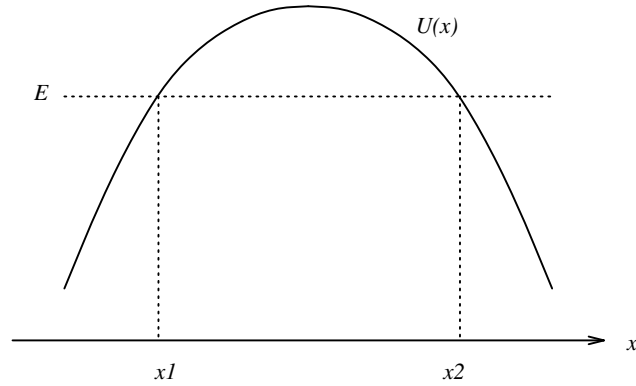


Figura 1.2: Passaggio per effetto tunnel di un elettrone di energia E attraverso una barriera di energia potenziale $U(x)$ a variazione non brusca.

l'approssimazione consiste nel trascurare l'esponenziale con segno positivo legato alla "riflessione" al termine della barriera.

Coefficiente di trasmissione per effetto tunnel attraverso una barriera di altezza $U(x)$ lentamente variabile

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} - g^2(x)\varphi = 0 \quad \text{dove} \quad g^2(x) = \frac{2m^*}{\hbar^2}[U(x) - E]$$

Si trova una soluzione approssimata (approssimazione WKB⁴) del tipo

$$\varphi = h(x) e^{S(x)} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} S(x) = \pm \int^x g(x) dx \\ h(x) = A / \sqrt{g(x)} \end{cases}$$

trascurando la piccola riflessione sulla parete più distante, entro la barriera si ha una sola soluzione esponenziale (x_1 e x_2 ascisse per cui $U(x_1) = E = U(x_2)$, x_1 sul fronte della barriera)

$$\varphi(x) = \frac{A}{\sqrt{g(x)}} e^{-\int_{x_1}^x g(x) dx}$$

se $U(x)$ varia lentamente vale approssimativamente

$$T \simeq \exp \left\{ -2 \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{2m^*}{\hbar^2} [U(x) - E]} dx \right\} \quad (1.1)$$

1.1 Proprietà ondulatorie delle particelle

1.1.1

Qual è la lunghezza d'onda di: a) una massa di 100 g fornita di una velocità di 1 m/s; b) un elettrone che si muove con una velocità di 10^7 cm/s, c) un elettrone che, da fermo, viene accelerato da una differenza di potenziale di 10 V?

a)
$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6,6256 \cdot 10^{-34}}{0,1 \times 1} = 6,6256 \cdot 10^{-33} \text{ m} = 6,6256 \cdot 10^{-23} \text{ \AA}$$

⁴Wentzel - Brillouin - Kramers.

$$b) \quad \lambda = \frac{h}{m_{\text{eln}} v} = \frac{6,6256 \cdot 10^{-34}}{9,109 \cdot 10^{-31} \times 10^{-2} \times 10^7} = 7,27 \text{ nm}$$

c) L'energia acquisita dall'elettrone è solo energia cinetica: $E_{\text{cin}} = p^2/2m_{\text{eln}} = 10 \text{ eV}$ da cui

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{2m_{\text{eln}} E_{\text{cin}}} = \sqrt{2 \times 9,109 \cdot 10^{-31} \times 10 \times 1,60 \cdot 10^{-19}} = \\ &= 1,707 \cdot 10^{-24} \text{ kg m/s} \\ \lambda &= \frac{h}{p} = \frac{6,6256 \cdot 10^{-34}}{1,707 \cdot 10^{-24}} = 3,88 \cdot 10^{-10} \text{ nm} = 3,88 \text{ \AA} \end{aligned}$$

1.1.2

Si consideri un trasmettitore radio che irradia 900 W alla frequenza di 12 MHz.

1. Quanto vale l'energia di ogni quanto irradiato?
2. Qual è il numero di quanti emessi nell'unità di tempo?
3. Qual è il numero di quanti emessi durante ogni periodo di oscillazione del campo elettromagnetico?
4. Quanto vale l'impulso del fotone considerato come una particella?

$$\begin{aligned} a) \quad E &= h f = 6,626 \cdot 10^{-34} \times 12 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{quanto}} \\ &= \frac{7,951 \cdot 10^{-27}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \frac{\text{eV}}{\text{quanto}} = 4,9695 \frac{\text{eV}}{\text{quanto}} \end{aligned}$$

b) Si indica con N il numero di quanti emessi nell'unità di tempo

$$\begin{aligned} \text{potenza} &= \frac{\text{energia}}{\text{s}} = \frac{\text{num. quanti}}{\text{s}} \times \text{energia di un quanto} \\ 900 \text{ W} &= 900 \text{ J/s} = N [\text{s}^{-1}] \times 7,951 \cdot 10^{-27} [\text{J}] \\ N &= \frac{900}{7,951 \cdot 10^{-27}} = 1,132 \cdot 10^{29} \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad 1 \text{ periodo} &= \frac{1}{f} = 8,333 \cdot 10^{-8} \text{ s} \\ \text{fotoni emessi in un periodo} &= N \times \frac{1}{f} = 1,132 \cdot 10^{29} \times 8,333 \cdot 10^{-8} \\ &= 9,433 \cdot 10^{21} \frac{\text{fotoni}}{\text{periodo}} \end{aligned}$$

$$d) \quad E = p c \longrightarrow p = \frac{E}{c} = \frac{6,626 \cdot 10^{-27} \text{ J}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 2,209 \cdot 10^{-35} \text{ kg m/s}$$

Verifica dimensionale

$$\frac{\text{J}}{\text{m/s}} = \frac{\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\frac{\text{m}}{\text{s}}} = \text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

1.1.3

L'energia di ionizzazione di un atomo di neon è 21,5 eV. a) Qual è la velocità minima con cui deve spostarsi un elettrone, perché la collisione con un atomo non eccitato di neon provochi la ionizzazione dell'atomo? b) Qual è la frequenza minima che deve avere un fotone per essere in grado di provocare la fotoionizzazione dell'atomo di neon?

a) L'energia di ionizzazione dell'atomo di neon, $eV_i = 21,5$ eV, deve essere ottenuta tramite l'energia cinetica dell'elettrone

$$\frac{1}{2} m v^2 = e V_i \longrightarrow v = \sqrt{\frac{2e}{m}} \sqrt{V_i}$$
$$v = \sqrt{\frac{2 \times 1,6 \cdot 10^{-19}}{9,11 \cdot 10^{-31}}} \sqrt{21,5} = 5,93 \cdot 10^5 \times 4,637 = 2,75 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

b)

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{2\pi c}{\frac{E}{\hbar}} = \frac{2\pi c \hbar}{E} = \frac{1,988 \cdot 10^{-25}}{E}$$
$$\lambda[\text{\AA}] = \frac{12\,400}{E[\text{eV}]} = \frac{12\,400}{21,5} = 577 \text{ \AA}$$
$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{577 \cdot 10^{-10}} = 5,2 \cdot 10^{15} \text{ Hz} = 5,2 \text{ PHz}$$

1.1.4

Una lampada a vapori di mercurio con potenza di 40 W emette una riga dell'ultravioletto, 2537 Å, a cui fornisce lo 0,1% della sua potenza. Si calcoli il numero di fotoni emessi al secondo dalla sorgente con questa lunghezza d'onda.

Usando la formula del problema 1.1.3

$$\lambda = \frac{12\,400}{(E_2 - E_1)[\text{eV}]} \longrightarrow \hbar\omega = E_2 - E_1 = \frac{12\,400}{2537} = 4,88 \frac{\text{eV}}{\text{fotone}}$$

La potenza totale emessa alla lunghezza d'onda $\lambda = 2537$ Å, cioè l'energia irradiata al secondo è pari a 0,04 W:

$$0,04 \text{ J/s} = \frac{0,04 \text{ J/s}}{1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}} = 2,50 \text{ eV/s}$$

Il numero di fotoni al secondo è

$$\frac{2,5 \cdot 10^{17} \text{ eV/s}}{4,88 \text{ eV}} = 5,123 \cdot 10^{16} \text{ fotoni/s}$$

1.2 Equazione di Schrödinger

1.2.1

Partendo dall'equazione di Schrödinger nella sua forma generale del tipo⁵:

⁵In questa forma non compare direttamente l'energia E .

$$+j \frac{h}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \psi(\underline{r}, t) = \left[-\frac{h^2}{8\pi^2 m} \nabla^2 + U(\underline{r}, t) \right] \psi(\underline{r}, t)$$

si ricavi la forma dell'equazione di Schrödinger che regola le variazioni spaziali per soluzioni a energia definita:

$$\nabla^2 \varphi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} [E - U(\mathbf{P})] \varphi = 0$$

per lo meno nel caso unidimensionale.

Scritta l'equazione di Schrödinger nella sua forma generale

$$+j \frac{h}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \psi(\underline{r}, t) = \left[-\frac{h^2}{8\pi^2 m} \nabla^2 + U(\underline{r}, t) \right] \psi(\underline{r}, t)$$

si passa alla forma unidimensionale

$$+j \frac{h}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \left[-\frac{h^2}{8\pi^2 m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x, t) \right] \psi(x, t)$$

Si applica per la soluzione il metodo della separazione delle variabili

$$\psi(x, t) = f(t) \varphi(x)$$

sostituendo

$$+j \frac{h}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} f(t) \varphi(x) = \left[-\frac{h^2}{8\pi^2 m} \nabla^2 \varphi(x) + U(x) \varphi(x) \right] f(t)$$

separando le variabili

$$+j \frac{h}{f(t) 2\pi} \frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{\varphi(x)} \left[-\frac{h^2}{8\pi^2 m} \nabla^2 \varphi(x) + U(x) \varphi(x) \right] = E$$

dove, essendo il 1° membro dipendente solo da t ed il 2° solo da x , entrambi sono costanti; si indica con E la costante di separazione che ha le dimensioni di un'energia. Questo metodo porta alla determinazione di soluzioni stazionarie⁶: cioè a soluzioni di cui è completamente definita l'energia totale E della particella, ma della quale si conosce nulla sull'evoluzione temporale (per il principio di indeterminazione $\Delta E \Delta t \geq h$).

Si ottiene ⁷

$$\begin{cases} j \frac{h}{2\pi} \frac{df(t)}{dt} = E f(t) \\ -\frac{h^2}{8\pi^2 m} \nabla^2 \varphi(x) + U(x) \varphi(x) = E \varphi(x) \end{cases}$$

⁶Tale denominazione deriva dal fatto che la densità di probabilità di trovare la particella, che si ottiene a meno di una costante facendo il modulo quadrato della soluzione, è costante al variare del tempo.

⁷Principio di sovrapposizione degli stati.

$$\begin{cases} j \frac{h}{2\pi} \frac{df(t)}{dt} = E f(t) \\ \left[-\frac{h^2}{8\pi^2 m} \nabla^2 + U \right] \varphi(x) = E \varphi(x) \end{cases}$$

Si ottengono le soluzioni stazionarie:

$$f(t) = C e^{+j \frac{Et}{\hbar}}$$
$$\mathcal{H} \varphi(x) = E \varphi(x)$$

Nelle soluzioni stazionarie i valori E dell'energia definita, sono gli autovalori dell'operatore \mathcal{H} e le funzioni $\varphi(x)$ sono le autofunzioni.

1.2.2

Si scriva la soluzione dell'equazione di Schrödinger per un elettrone libero che si propaga lungo la direzione x caratterizzata da un'energia potenziale costante $U = U_0 = 0$. Si determini il legame esistente tra l'energia totale E e la costante di propagazione k .

L'equazione di Schrödinger monodimensionale per soluzioni stazionarie nello spazio libero ($U = 0$)

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m} \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} = E \varphi(x)$$

è un'equazione differenziale a coefficienti costanti con equazione caratteristica:

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m} \lambda^2 = E \Rightarrow \lambda = \pm j \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = \pm j k$$

che accetta soluzioni esponenziali del tipo

$$\varphi(x) = A e^{-j k x} + B e^{+j k x}$$

corrispondenti a fenomeni propagativi nelle due direzioni dell'asse x .
Il legame tra l'energia e la costante di propagazione è pertanto

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad ; \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Si suole dire che la *relazione di dispersione* $E(k)$ per l'elettrone libero ha una forma quadratica.

1.3 Buca di potenziale

1.3.1

Una buca di potenziale è lunga 2 volte la costante reticolare del silicio ed è profonda $U_0 = 0,1$ eV (figura 1.3). Determinare graficamente quanti e quali sono i livelli energetici permessi entro la buca.

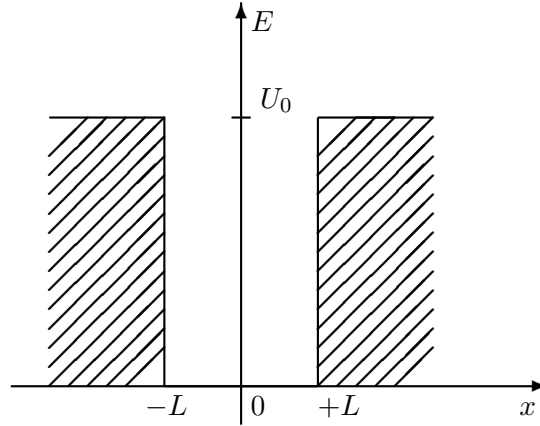


Figura 1.3: Struttura di potenziale simmetrica.

Nel problema in esame, non si vuole assolutamente conoscere l'evoluzione temporale dell'elettrone nella buca, ma solamente gli stati ammessi nella buca. La forma dell'equazione di Schrödinger è

$$\nabla^2 \varphi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} [E - U(\mathbf{P})] \varphi = 0$$

le cui soluzioni dipendono dalla struttura dell'energia potenziale $U(\mathbf{P})$. Spesso si hanno soluzioni (*autofunzioni*) solo per un insieme discreto di valori E dell'energia totale (*autovalori*).

L'equazione è del tipo a energia definita e non ha dipendenza dal tempo t . Pertanto per conoscere le soluzioni stazionarie, si applica l'equazione di Schrödinger alla particolare struttura di energia potenziale e si calcolano i valori di E possibili. Nel caso di problemi monodimensionali l'equazione di Schrödinger per soluzioni stazionarie ⁸ è:

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \frac{2m^*}{\hbar^2} [E - U(x)] \varphi(x) = 0$$

Sia $d = 2L$ la larghezza della buca. Se si suddivide l'intero campo in tre regioni (figura 1.3) a energia potenziale costante

regione I	$x < -L$	\rightarrow	$U(x) = U_0$
regione II	$-L < x < +L$	\rightarrow	$U(x) = 0$
regione III	$x > +L$	\rightarrow	$U(x) = U_0$

in ciascuna regione l'equazione differenziale diventa a coefficienti costanti ed è facilmente solubile.

Nelle regioni I - III

$$\frac{d^2}{dx^2} \varphi = \frac{2m^*}{\hbar^2} [U_0 - E] \varphi(x)$$

$$\lambda^2 = \frac{2m^*}{\hbar^2} (U_0 - E) \quad \longrightarrow \quad \lambda = \pm \frac{\sqrt{2m^*(U_0 - E)}}{\hbar}$$

Nella regione II

⁸ m^* massa efficace dell'elettrone nel reticolo cristallino; nello spazio libero $m^* = m_0$.

$$\frac{d^2}{dx^2} \varphi = -\frac{2m^*}{\hbar^2} E \varphi(x)$$

$$\lambda^2 = -\frac{2m^*}{\hbar^2} E \longrightarrow \lambda = \pm j \frac{\sqrt{2m^* E}}{\hbar}$$

La soluzione complessiva si ottiene raccordando le tre soluzioni che assumono l'aspetto:

nella regione I: ($x < -L$) dove $U = U_0$

$$\varphi_1(x) = A_1 e^{\alpha x} + A_2 e^{-\alpha x} ; \quad \alpha = \frac{\sqrt{2m^* (U_0 - E)}}{\hbar}$$

nella regione II: ($-L < x < +L$) dove $U = 0$

$$\varphi_2(x) = K_1 e^{j\beta x} + K_2 e^{-j\beta x} ; \quad \beta = \frac{\sqrt{2m^* E}}{\hbar}$$

oppure usando le funzioni trigonometriche

$$\varphi_2(x) = B \sin \beta x + C \cos \beta x$$

nella regione III: ($x > +L$) dove $U = U_0$

$$\varphi_3(x) = D_1 e^{\alpha x} + D_2 e^{-\alpha x}$$

Si impongono le condizioni ai limiti, in particolare che φ non deve divergere, in quanto si stanno cercando soluzioni legate:

$$\varphi_1(-\infty) = 0 \rightarrow A_2 = 0$$

$$\varphi_3(+\infty) = 0 \rightarrow D_1 = 0$$

Si hanno per φ le soluzioni

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = A e^{\alpha x} & x < -L \\ \varphi_2(x) = B \sin \beta x + C \cos \beta x & -L < x < L \\ \varphi_3(x) = D e^{-\alpha x} & x > L \end{cases}$$

Le costanti incognite si determinano fissando le condizioni di continuità della funzione e della sua derivata prima, $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$, in $-L$ e $+L$

$$\begin{cases} \varphi_1(-L) = \varphi_2(-L) \\ \varphi_1'(-L) = \varphi_2'(-L) \end{cases} ; \quad \begin{cases} \varphi_2(L) = \varphi_3(L) \\ \varphi_2'(L) = \varphi_3'(L) \end{cases}$$

$$A e^{-\alpha L} = -B \sin \beta L + C \cos \beta L \quad (1.2)$$

$$D e^{-\alpha L} = B \sin \beta L + C \cos \beta L \quad (1.3)$$

$$\alpha A e^{-\alpha L} = \beta B \cos \beta L + \beta C \sin \beta L \quad (1.4)$$

$$-\alpha D e^{-\alpha L} = \beta B \cos \beta L - \beta C \sin \beta L \quad (1.5)$$

Sistema di 4 equazioni lineare, omogeneo, nelle variabili A, B, C, D . Combinando tra di loro le equazioni si può passare a due sistemi omogenei separati in nuove variabili.

- Variabili $A + D$ e C

$$\begin{cases} (1.2) + (1.3) : (A + D) e^{-\alpha L} &= 2C \cos \beta L \\ (1.4) - (1.5) : (A + D) \alpha e^{-\alpha L} &= 2C \beta \sin \beta L \end{cases}$$

$$\frac{(1.4) - (1.5)}{(1.2) + (1.3)} \Rightarrow \alpha = \beta \tan \beta L \quad \boxed{\tan \beta L = \frac{\alpha}{\beta}} \quad (1.6)$$

- Variabili $A - D$ e B

$$\begin{cases} (1.2) - (1.3) : (A - D) e^{-\alpha L} &= -2B \sin \beta L \\ (1.4) + (1.5) : (A - D) \alpha e^{-\alpha L} &= 2\beta B \cos \beta L \end{cases}$$

$$\frac{(1.4) + (1.5)}{(1.2) - (1.3)} \Rightarrow \alpha = -\beta \cot \beta L \quad \boxed{\cot \beta L = -\frac{\alpha}{\beta}} \quad (1.7)$$

- facendo il rapporto tra le due condizioni

$$\frac{(1.6)}{(1.7)} \Rightarrow \boxed{\tan^2 \beta L = -1}$$

Si vede che non esistono soluzioni reali, mentre le due relazioni (1.6) (1.7) presentano soluzioni reali per β ; ciò significa che vi sono due famiglie di soluzioni (di curve $\alpha = f(\beta)$), che non hanno intersezioni tra di loro.

Lo stesso risultato si ottiene osservando che il sistema omogeneo ammette soluzioni diverse dalla soluzione banale $A = B = C = D = 0$ solo se il determinante dei coefficienti è nullo

$$\begin{vmatrix} e^{-\alpha L} & \sin \beta L & -\cos \beta L & 0 \\ 0 & -\sin \beta L & -\cos \beta L & e^{-\alpha L} \\ \alpha e^{-\alpha L} & -\beta \cos \beta L & -\beta \sin \beta L & 0 \\ 0 & -\beta \cos \beta L & \beta \sin \beta L & -\alpha e^{-\alpha L} \end{vmatrix} = 0$$

$$2 e^{-2\alpha L} [\alpha \sin \beta L + \beta \cos \beta L] [\alpha \cos \beta L - \beta \sin \beta L] = 0$$

Con entrambi i metodi seguiti si individuano due famiglie di soluzioni per la funzione φ all'interno della buca.

Soluzioni simmetriche

$$\varphi_2(x) = C \cos \beta x$$

$$B = 0, \quad A - D = 0, \quad \boxed{\tan \beta L = \frac{\alpha}{\beta}}$$

Soluzioni antisimmetriche

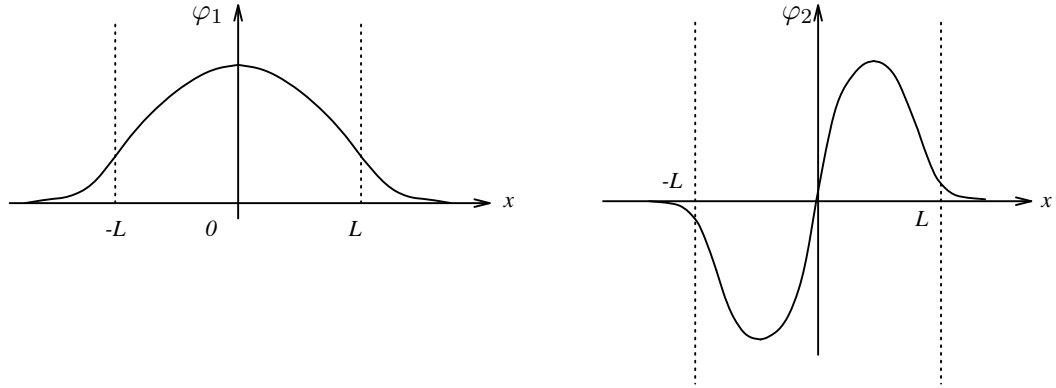


Figura 1.4: Soluzioni simmetriche e antisimmetriche.

$$\varphi_2(x) = B \sin \beta x$$

$$C = 0, \quad A + D = 0,$$

$$\boxed{\cot \beta L = -\frac{\alpha}{\beta}}$$

In entrambi i casi il sistema di equazioni risulta soddisfatto e il determinante dei coefficienti è nullo.

Graficamente si può ottenere una soluzione, come intersezione di curve nel piano $[\alpha L - \beta L]$. Una famiglia di curve, tra le grandezze α e β , è rappresentata dalle (1.6) (1.7), l'altra si ottiene osservando che:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\sqrt{2m^*(U_0 - E)} \hbar}{\hbar} \\ \beta = \frac{\sqrt{2m^*E} \hbar}{\hbar} \end{cases} \implies \alpha^2 + \beta^2 = \frac{2m^*U_0}{\hbar^2} = \gamma^2$$

γ non dipende da E e varia monotonicamente con U_0 : la relazione che lega α , β e γ rappresenta una circonferenza il cui raggio cresce con l'altezza della buca di potenziale. Sono da considerarsi solo soluzioni positive per α e per β , pertanto interessano unicamente intersezioni nel primo quadrante. È utile individuare le intersezioni delle "tangenti" con l'asse delle ascisse, cioè gli zeri delle due relazioni (1.6) (1.7): si ha

$$\begin{aligned} \tan \beta L = 0 & \quad \beta L = n\pi & (n = 0, 1, 2, \dots) \\ \cot \beta L = 0 & \quad \beta L = (2n + 1) \frac{\pi}{2} & (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Il primo zero della curva vale $\beta_1 = \pi/2 L$, pertanto se $\gamma < \pi/2 L$, cioè $\gamma L < \pi/2$, esiste una sola soluzione simmetrica.

I dati del problema portano effettivamente a una situazione di questo tipo, infatti affrontando numericamente la soluzione si ha

$$\begin{aligned} L &= d = 5,43 \text{ \AA} = 5,43 \times 10^{-10} \text{ m} \\ U_0 &= 0,1 \text{ eV} = 0,16 \times 10^{-19} \text{ J} \\ m &= m^* = m_0 = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg} \\ \gamma &= \sqrt{\frac{2\pi m^*}{\hbar^2} U_0} = 1,62 \times 10^9 \text{ kg}^{\frac{1}{2}} \text{ J}^{-\frac{1}{2}} \text{ s}^{-1} \\ \gamma L &= 1,62 \times 10^9 \times 5,43 \times 10^{-10} = 0,88 < \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

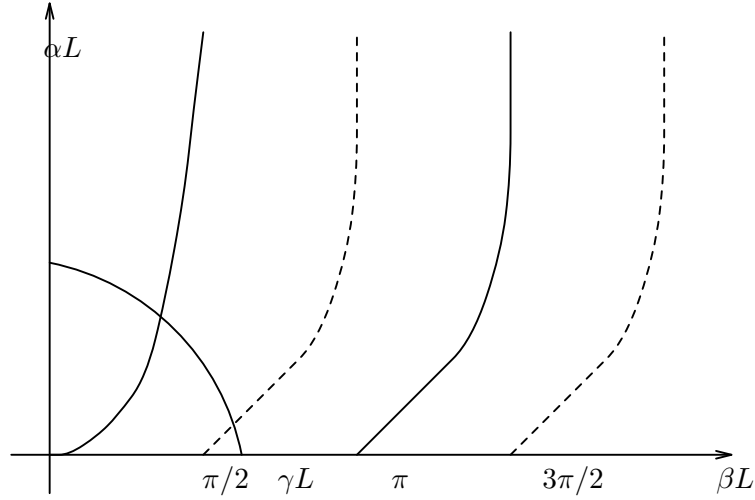


Figura 1.5: Determinazione grafica dei livelli energetici entro una buca.

1.3.2

Una buca di potenziale è lunga 2 volte la costante reticolare del silicio ed è profonda $U_0 = 0,1$ eV. Calcolare il valore del livello energetico permesso entro la buca, usando il risultato del problema 1.3.1.

Suggerimento: (a) Osservando che le due famiglie di curve ottenute nel problema 1.3.1 sono in realtà un'unica famiglia con periodicità metà, si ricavi un'unica relazione che rappresenti entrambe le curve. (b) Si usi un metodo di ricerca di zeri di tipo iterativo.

Le due equazioni

$$\begin{aligned}\tan \beta L &= \frac{\alpha}{\beta} \\ \cot \beta L &= -\frac{\alpha}{\beta}\end{aligned}$$

sono rappresentate graficamente da due famiglie di curve periodiche, simili a tangenti. Si osserva che in realtà si tratta di elementi di un'unica famiglia con periodicità metà, infatti se si scrive la relazione relativa alla cotangente con angolo doppio

$$\cot 2\beta L = \frac{1}{2} [\cot \beta L - \tan \beta L]$$

e si usa la prima delle due relazioni oppure la seconda, si ottiene in entrambi i casi

$$\cot 2\beta L = \frac{1}{2} [\cot \beta L - \tan \beta L] = \frac{1}{2} \left[\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta} \right]$$

Le soluzioni del problema sono pertanto soluzioni del sistema di equazioni non lineari

$$\begin{cases} \cot 2\beta L &= \frac{1}{2} \left[\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta} \right] \\ \alpha^2 + \beta^2 &= \frac{2m^* U_0}{\hbar^2} = \gamma^2 \end{cases}$$

Nel caso in esame si ha un'unica intersezione (problema 1.3.1) e il sistema si può semplificare, limitandosi al primo ramo della tangente

$$\begin{cases} \tan \beta L &= \frac{\alpha}{\beta} \\ \alpha^2 + \beta^2 &= \frac{2m^* U_0}{\hbar^2} = \gamma^2 \end{cases}$$

Il problema si riduce alla ricerca della radice di una equazione non lineare

$$\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 \quad \alpha = \sqrt{\gamma^2 - \beta^2}$$

$$F(\beta) = \beta \tan \beta L - \sqrt{\gamma^2 - \beta^2} = 0$$

Ponendo $\beta L = x$ si scrive l'equazione nella forma adatta per una ricerca di zero, cioè nella forma $f(x) = 0$

$$f(x) = \frac{x}{L} \tan x - \sqrt{\gamma^2 - \left(\frac{x}{L}\right)^2}$$

Si può usare il metodo di Newton per trovare iterativamente la soluzione. Il processo iterativo si individua con una linearizzazione della funzione $f(x)$, mediante uno sviluppo in serie di Taylor arrestato al primo termine

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x) |_{x=x_0} + \dots$$

si ottiene una relazione lineare che rappresenta la tangente alla curva reale in un punto x_0 scelto come valore approssimato di partenza. Annullare la funzione linearizzata significa trovare il valore x_1 in cui la tangente alla curva in x_0 incontra l'asse x . Il nuovo valore

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

può essere più prossimo alla radice cercata. Il processo si può ripetere iterativamente

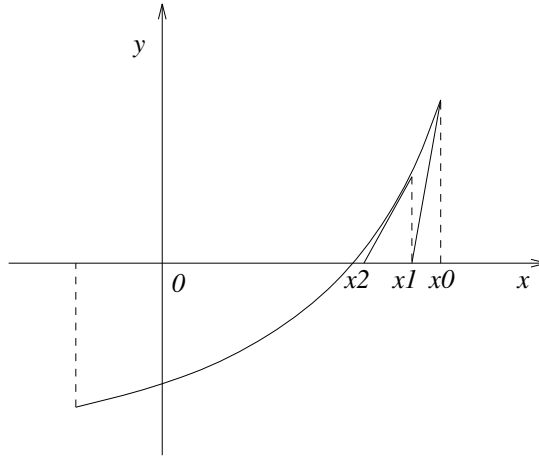


Figura 1.6: Determinazione degli zeri con il metodo di Newton.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n + E(x_n)$$

dove $E(x_n) = -f(x_n)/f'(x_n)$ rappresenta la variazione da un'iterazione all'altra e può essere usato come parametro d'errore.

Nel caso in esame è

$$f(x) = \frac{x}{L} \tan x - \sqrt{\gamma^2 - \left(\frac{x}{L}\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{L} \tan x + \frac{x}{L} \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\frac{x}{L}}{\sqrt{\gamma^2 - \left(\frac{x}{L}\right)^2}}$$

I valori delle costanti del problema sono

$$L = d = 0,54307 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

$$\gamma^2 = \frac{2m^* U_0}{\hbar^2} = \frac{2 \times 9,1110^{-31}}{(6,625 \times 10^{-34}/2\pi)^2} 0,1 \times 1,6 \times 10^{-19} = 2,622 \times 10^{18}$$

Si innesci il processo iterativo che presenta una singolarità per $x = \gamma L$ cioè per $F(x) \approx 0,9$. Esaminando l'evolversi del processo iterativo si vede che a partire dalla 14-esima iterazione si ottiene un valore approssimato alla terza cifra decimale della radice: $x = 0,682 = \beta L$, cui corrisponde un valore di energia

$$\frac{x}{L} = \frac{\sqrt{2m^* E}}{\hbar}; \quad E = \frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\frac{x}{L}\right)^2$$

$$E = 9,567 \times 10^{-21} \text{ J} = 0,06 \text{ eV}$$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$E(x_n)$	x_{n+1}
0	0,5	$-8,29 \times 10^8$	$2,2 \times 10^9$	$3,77 \times 10^{-1}$	0,8766
1	0,8766	$1,811 \times 10^9$	$6,156 \times 10^9$	$-2,94 \times 10^{-1}$	0,582
2	0,582	$-5,067 \times 10^8$	$2,751 \times 10^9$	$1,84 \times 10^{-1}$	0,767
3	0,767	$5,67 \times 10^8$	$4,495 \times 10^9$	$-1,26 \times 10^{-1}$	0,641
4	0,641	$-2,30 \times 10^8$	$3,21 \times 10^9$	$7,17 \times 10^{-2}$	0,712
5	0,712	$1,83 \times 10^8$	$3,879 \times 10^9$	$-4,716 \times 10^{-2}$	0,665
6	0,665	$-9,862 \times 10^7$	$3,422 \times 10^9$	$2,88 \times 10^{-2}$	0,6939
7	0,6939	$6,851 \times 10^7$	$3,694 \times 10^9$	$-1,854 \times 10^{-2}$	0,6754
8	0,6754	$-4,072 \times 10^7$	$3,5168 \times 10^9$	$1,158 \times 10^{-2}$	0,687
9	0,687	$2,675 \times 10^7$	$3,626 \times 10^9$	$-7,38 \times 10^{-3}$	0,6796
10	0,6796	$-1,651 \times 10^7$	$3,556 \times 10^9$	$4,64 \times 10^{-3}$	0,684
11	0,684	$1,06 \times 10^7$	$3,60 \times 10^9$	$-2,944 \times 10^{-3}$	0,6813
12	0,6813	$-6,638 \times 10^6$	$3,57 \times 10^9$	$1,85 \times 10^{-3}$	0,6831
13	0,6831	$4,224 \times 10^6$	$3,59 \times 10^9$	$-1,177 \times 10^{-3}$	0,6820
14	0,6820	$-2,66 \times 10^6$	$3,579 \times 10^9$	$7,43 \times 10^{-4}$	0,6827
15	0,6827	$1,687 \times 10^6$	$3,586 \times 10^9$	$-4,70 \times 10^{-4}$	0,6822
16	0,6822	$-1,065 \times 10^6$	$3,581 \times 10^9$	$2,97 \times 10^{-4}$	0,6825

1.3.3

Con riferimento alla soluzione del problema 1.3.1, discutere la forma delle soluzioni quando $U_0 \rightarrow \infty$.

L'energia potenziale è

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } -L < x < +L \\ \infty & \text{per } |x| > L \end{cases}$$

Nella buca la forma dell'equazione d'onda è

$$\varphi_2(x) = B \sin \beta x + C \cos \beta x$$

Nelle regioni I e III ($U_0 \rightarrow \infty$) è $\alpha \rightarrow \infty$, pertanto $\exp(\pm \alpha x) \rightarrow 0$, quindi $\varphi_{1,3}(x) = 0$. La continuità della funzione d'onda impone che

$$\varphi(L) = B \sin \beta L + C \cos \beta L = 0 \quad (1.8)$$

$$\varphi(-L) = -B \sin \beta L + C \cos \beta L = 0 \quad (1.9)$$

da cui combinando le equazioni

$$\begin{cases} (1.8) + (1.9) : & C \cos \beta L = 0 \\ (1.8) - (1.9) : & B \sin \beta L = 0 \end{cases}$$

si hanno due famiglie di soluzioni:

$$\begin{cases} 1) & B = 0; \quad \beta L = (2n' + 1) \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \varphi(x) = C \cos \beta x \\ 2) & C = 0; \quad \beta L = n' \pi \quad ; \quad \varphi(x) = B \sin \beta x \end{cases}$$

Per l'energia vale la relazione complessiva

$$\beta = \frac{n\pi}{2L} \quad ; \quad \beta = \frac{\sqrt{2m^*E}}{\hbar} \implies \beta^2 = \frac{2m^*}{\hbar^2} E$$

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{n^2 \pi^2}{4L^2} = \frac{n^2 \hbar^2}{32m} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

1.3.4

Si determinino le soluzioni dell'equazione di Schrödinger in tre dimensioni per un elettrone vincolato a una buca di potenziale lungo la direzione x ma libero nelle altre due direzioni.

Si determini il legame esistente tra l'energia totale E e il vettore di propagazione \underline{k} .

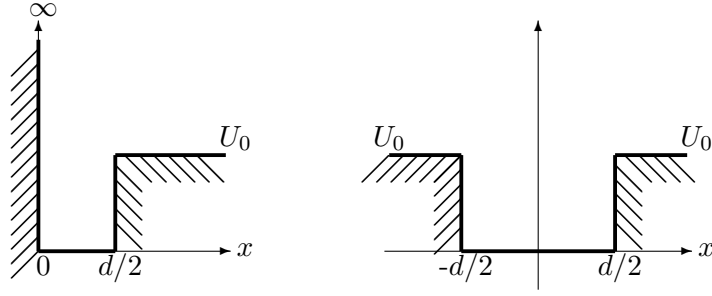
L'equazione di Schrödinger che regola le variazioni spaziali per soluzioni a energia definita (soluzioni stazionarie) è:

$$\nabla^2 \varphi + \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} [E - U(\mathbf{P})] \varphi = 0$$

Si trova, per esempio nel caso antisimmetrico,

$$\varphi(\underline{r}) = A \sin k_n x e^{-j(k_y y + k_z z)}$$

$$\frac{2m}{\hbar^2} E = k_n^2 + k_y^2 + k_z^2$$



1.3.5

Ricordando i procedimenti usati per lo studio delle buche di potenziale di altezza finita e infinita,

1. studiare il caso della struttura di potenziale asimmetrica di sinistra, ricavando l'equazione che consente di determinare gli stati legati dell'elettrone;
2. descrivere le relazioni esistenti tra le soluzioni ottenibili per le due buche della figura.

a)

Sulla base di quanto esaminato nel problema 1.3.1 le soluzioni nei tratti $0 < x < d/2$ e $x > d/2$ sono rispettivamente:

$$\varphi_1(x) = K_1 e^{j\beta x} + K_2 e^{-j\beta x} \quad ; \quad \beta = \frac{\sqrt{2m^* E}}{\hbar}$$

$$\varphi_2(x) = A_1 e^{\alpha x} + A_2 e^{-\alpha x} \quad ; \quad \alpha = \frac{\sqrt{2m^* (U_0 - E)}}{\hbar}$$

Dato che si cercano soluzioni per l'elettrone legato, è $U_0 > E$, quindi α è reale, inoltre $A_1 = 0$. Nella zona $x < 0$ si può pensare a una soluzione dello stesso tipo che per $x > d/2$, ma con $U_0 \rightarrow \infty$, per cui è $\varphi(x < 0) = 0$.

Le condizioni al contorno impongono l'annullamento della funzione in $x = 0$ e la continuità della funzione e della derivata prima per $x = d/2$:

$$\begin{aligned} K_1 + K_2 &= 0 \\ K_1 e^{j\beta d/2} + K_2 e^{-j\beta d/2} &= A_2 e^{-\alpha d/2} \\ j\beta K_1 e^{j\beta d/2} - j\beta K_2 e^{-j\beta d/2} &= -\alpha A_2 e^{-\alpha d/2} \end{aligned}$$

Si tratta di un sistema omogeneo che accetta soluzioni non nulle solo se il determinante dei coefficienti è nullo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ e^{j\beta d/2} & e^{-j\beta d/2} & -e^{-\alpha d/2} \\ j\beta e^{j\beta d/2} & -j\beta e^{-j\beta d/2} & +\alpha e^{-\alpha d/2} \end{vmatrix} = 0$$

Risolvendo si ottiene la condizione

$$\boxed{\cot \beta d/2 = -\frac{\alpha}{\beta}}$$

b)

Per confronto con i risultati del problema 1.3.1 si osserva che le soluzioni della buca a sinistra sono la metà di quelle della buca di destra, cioè le soluzioni antisimmetriche del problema 1.3.1 che presentano un valore nullo nel centro.

1.3.6

Si abbia la buca di energia potenziale della figura 1.7 con pareti di altezza infinita di larghezza $d = 2L + b$ e al cui centro si trova una barriera di altezza U_0 e larghezza b . Si vuole esaminare come si modificano i livelli di energia permessi per gli elettroni rispetto al caso della buca senza barriera (problema 1.3.3). Per la soluzione si segua lo schema seguente.

1. Se l'energia potenziale è una funzione pari, quale caratteristica ha la soluzione dell'equazione di Schrödinger?
2. Scrivere la soluzione nelle varie regioni nella forma più compatta e imporre le condizioni al contorno.
3. Commentare le soluzioni per $E > U_0$.
4. Trovare le soluzioni per $E < U_0$ nei casi limite $b \rightarrow 0$ e $U_0 \rightarrow \infty$
5. Discutere l'effetto della larghezza della barriera, partendo dal caso in cui b è molto elevato (buche disaccoppiate) e diminuendo via via lo spessore della barriera. Si disegnino i valori delle due energie più basse al variare di b . Si faccia il caso numerico $U_0 = 0,5 \text{ eV}$ e $L = 10 \text{ Å}$.

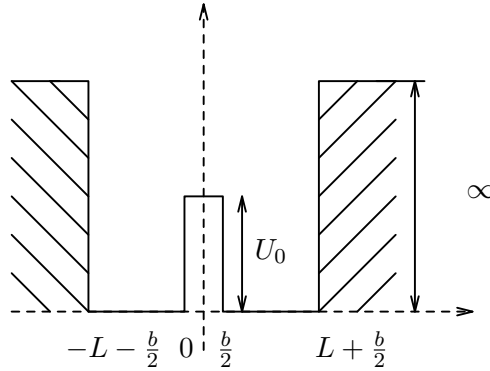


Figura 1.7: Buca di potenziale contenente una barriera.

a) L'equazione di Schrödinger ha la forma

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \propto [E - U(x)] \varphi(x)$$

se la funzione energia potenziale $U(x)$ è una funzione pari, lo è anche $[E - U(x)]$. La derivata seconda non modifica la parità o disparità della funzione, pertanto sono soluzioni possibili dell'equazione sia funzioni pari sia funzioni dispari. Le condizioni al contorno: $\varphi(-L - b/2) = c_1$ e $\varphi(L + b/2) = c_2$ sono del tipo $c_1 = c_2$ quindi impongono soluzioni pari ma, essendo $c_1 = c_2 = 0$, anche le soluzioni dispari sono accettabili.

b) Per semplificare il problema si considerano separatamente i due tipi di soluzione. In entrambi i casi dato che sulle pareti, dove l'energia assume valore infinito, $\varphi(x)$ presenta un nodo per $x = \pm(L + b/2)$, si ha

regione I	$b/2 < x < L + b/2$	\rightarrow	$\varphi_1(x) = A \sin \beta (x - L - b/2)$
regione II	$-b/2 < x < b/2$	\rightarrow	$\varphi_2(x) = B e^{j k x} + C e^{-j k x}$
regione III	$-L - b/2 < x < -b/2$	\rightarrow	$\varphi_3(x) = D \sin \beta (x + L + b/2)$

dove

$$\beta = \frac{\sqrt{2m^* E}}{\hbar}$$

$$k = \frac{\sqrt{2m^* (E - U_0)}}{\hbar}$$

1. *Caso simmetrico*

Per simmetria $[\varphi(x) = \varphi(-x)]$ deve essere

$$D = -A$$

$$B = C$$

Si impone la continuità della funzione e della sua derivata in $x = b/2$

$$\begin{aligned} A \sin \beta (-L) &= B e^{jkb/2} + C e^{-jkb/2} \\ A\beta \cos \beta (-L) &= jBk e^{jkb/2} - jkC e^{-jkb/2} \end{aligned} \quad (1.10)$$

e pertanto

$$\begin{aligned} -A \sin \beta (L) &= 2B \cos kb/2 \\ A\beta \cos \beta (L) &= -2Bk \sin kb/2 \end{aligned}$$

Dividendo membro a membro si ottiene

$$-\frac{1}{\beta} \tan \beta (L) = -\frac{1}{k} \cot kb/2$$

$$\tan \beta (L) = \frac{\beta}{k} \cot kb/2 \quad (1.11)$$

Per gli elettroni con energia $E < U_0$, è $jk = \alpha$, quindi

$$\tan \beta (L) = -\frac{\beta}{\alpha} \coth \alpha b/2 \quad (1.12)$$

2. *Caso antisimmetrico*

Per antisimmetria $[\varphi(x) = -\varphi(-x)]$ deve essere

$$D = A$$

$$B = -C$$

La continuità della funzione e della sua derivata in $x = b/2$ (1.10) portano alle equazioni

$$\begin{aligned} -A \sin \beta (L) &= 2jB \sin kb/2 \\ A\beta \cos \beta (L) &= 2jBk \cos kb/2 \end{aligned}$$

Dividendo membro a membro si ottiene

$$\tan \beta (L) = -\frac{\beta}{k} \tan kb/2 \quad (1.13)$$

Per gli elettroni con energia $E < U_0$, è $jk = \alpha$, quindi

$$\tan \beta (L) = -\frac{\beta}{\alpha} \tanh \alpha b/2 \quad (1.14)$$

c) Se si considerano energie molto elevate $E \gg U_0$ si ha che $k \rightarrow \beta$ la (1.11) diventa

$$\begin{aligned} \tan \beta (L) = \cot \beta b/2 &\rightarrow \tan \beta (L) \tan \beta b/2 = 1 \\ \cos \beta \left(L - \frac{b}{2} \right) - \cos \beta \left(L + \frac{b}{2} \right) &= \cos \beta \left(L - \frac{b}{2} \right) + \cos \beta \left(L + \frac{b}{2} \right) \\ 2 \cos \beta \left(L + \frac{b}{2} \right) = 0 &\rightarrow \beta \left(L + \frac{b}{2} \right) = (2n+1) \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

e la (1.13)

$$\begin{aligned} \tan \beta (L) = -\tan \beta b/2 &\rightarrow \tan \beta (L) \cot \beta b/2 = -1 \\ \sin \beta \left(L + \frac{b}{2} \right) + \sin \beta \left(L - \frac{b}{2} \right) &= -\sin \beta \left(L + \frac{b}{2} \right) + \sin \beta \left(L - \frac{b}{2} \right) \\ 2 \sin \beta \left(L + \frac{b}{2} \right) = 0 &\rightarrow \beta \left(L + \frac{b}{2} \right) = (2n) \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Per valori di energia molto elevati entro la buca la perturbazione introdotta dalla barriera si annulla e si ritrovano le soluzioni della buca larga $d = 2L + b$.

d) Le soluzioni per $E < U_0$ sono

$$\begin{aligned} \tan \beta (L) &= -\frac{\beta}{\alpha} \coth \alpha b/2 \\ \tan \beta (L) &= -\frac{\beta}{\alpha} \th \alpha b/2 \end{aligned}$$

Nel caso limite $b \rightarrow 0$ si ha

$$\tan \beta (L) \rightarrow \infty \quad \text{oppure} \quad \tan \beta (L) \rightarrow 0$$

Cioè si ritrovano le soluzioni della buca larga $2L$ di altezza infinita.

Se si vuole invece esaminare il caso limite in cui la barriera è di altezza infinita $U_0 \rightarrow \infty$, cioè $\alpha \rightarrow \infty$, si ha

$$\begin{aligned} \tan \beta \left(L - \frac{b}{2} \right) &\rightarrow \infty \\ \tan \beta \left(L + \frac{b}{2} \right) &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Si ritrovano quindi, per ciascuna delle due buche, le soluzioni della buca larga L di altezza infinita.

e) Per $b \rightarrow \infty$ le (1.12) e (1.14) diventano entrambe del tipo

$$\tan \beta (L) = -\frac{\beta}{\alpha} \tag{1.15}$$

Per confronto con i risultati del problema 1.3.5, si osserva che le energie permesse per entrambe le buche sono quelle della buca asimmetrica (si tratta di due valori di energia coincidenti). Quando b diventa sufficientemente piccolo da consentire un accoppiamento per effetto tunnel delle due buche ciascuno dei livelli si sdoppia in uno pari e uno dispari secondo le (1.12) e (1.14). I livelli risultano tanto più separati quanto più b diminuisce. Per $b \rightarrow 0$ si ritrovano i livelli pari e dispari della buca simmetrica di larghezza doppia. Il trattamento numerico della (1.12) o della (1.14) consiste in una soluzione di un'equazione non lineare con variabile implicita E . Si usano le tecniche descritte in appendice e si trova agevolmente il risultato della figura 1.8

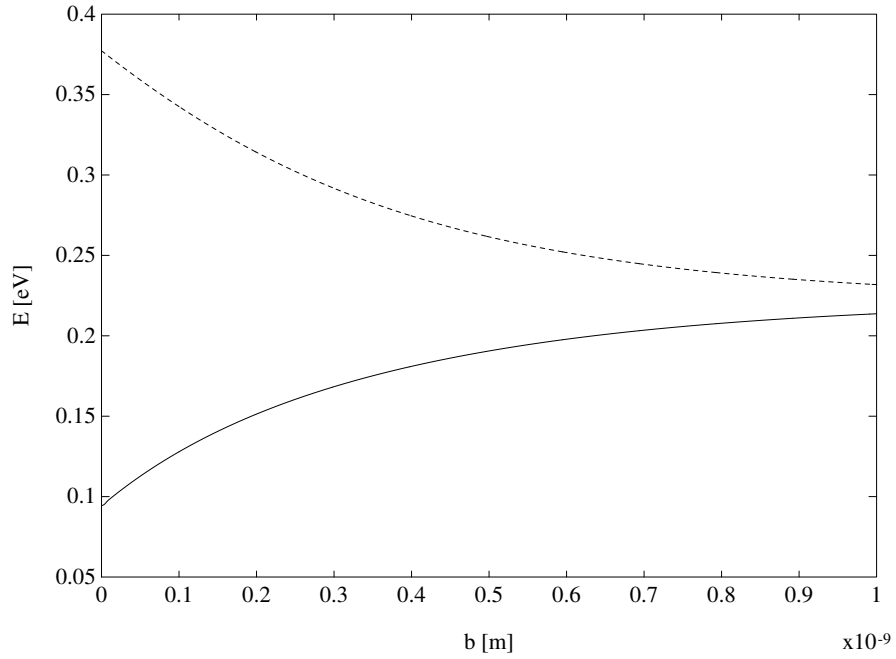


Figura 1.8: Valori più bassi di energia per la buca di potenziale della figura 1.7 al variare dello spessore della barriera.

1.3.7

Si ripeta il problema 1.3.6 nel caso il cui le pareti della buca non siano infinite ma di valore pari a U_0 .

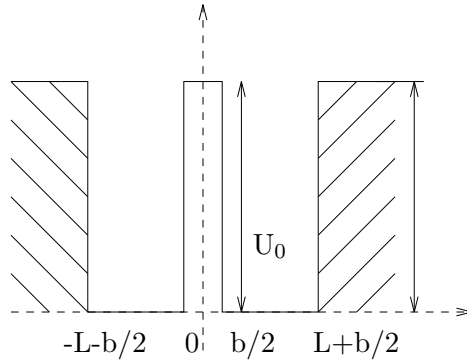


Figura 1.9: Due buche di potenziale accoppiate.

Valgono le considerazioni del problema 1.3.6 relative alla simmetria, pertanto anche in questo caso si avranno soluzioni simmetriche e antisimmetriche. Con l'attuale configurazione di energia potenziale però sulle pareti l'energia non assume valore infinito, quindi $\varphi(x)$ non è nulla per $x = \pm(L + b/2)$, ma avrà un andamento esponenziale decrescente.

Limitandosi al caso $E < U_0$ si ha (cfr. problema 1.3.1)

$$\begin{aligned} L + b/2 &\rightarrow \varphi_1(x) = E e^{-\alpha x} \\ \frac{b}{2} < x < L + \frac{b}{2} &\rightarrow \varphi_2(x) = A e^{j\beta x} + F e^{-j\beta x} \\ -\frac{b}{2} < x < \frac{b}{2} &\rightarrow \varphi_3(x) = B e^{-\alpha x} + C e^{+\alpha x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\sqrt{2m^* E}}{\hbar} \\ \alpha &= \frac{\sqrt{2m^* (U_0 - E)}}{\hbar} \end{aligned}$$

Le soluzioni per $x < 0$ saranno simmetriche o antisimmetriche⁹ rispetto a quelle per $x > 0$.

Si impone la continuità della funzione e della sua derivata in $x = L + b/2$ e in $x = b/2$

$$\begin{aligned} E e^{-\alpha(L+b/2)} &= A e^{j\beta(L+b/2)} + F e^{-j\beta(L+b/2)} \\ -\alpha E e^{-\alpha(L+b/2)} &= j\beta A e^{j\beta(L+b/2)} - j\beta F e^{-j\beta(L+b/2)} \\ B e^{-\alpha b/2} + C e^{+\alpha b/2} &= A e^{j\beta b/2} + F e^{-j\beta b/2} \\ -\alpha B e^{-\alpha b/2} + \alpha C e^{+\alpha b/2} &= j\beta A e^{j\beta b/2} - j\beta F e^{-j\beta b/2} \end{aligned} \tag{1.12}$$

1. *Caso simmetrico*: $[\varphi(x) = \varphi(-x)] \rightarrow B = C$
2. *Caso antisimmetrico*: $[\varphi(x) = -\varphi(-x)] \rightarrow B = -C$

Pertanto le ultime due equazioni delle (1.16) diventano nel caso simmetrico

$$\begin{aligned} 2B \operatorname{ch}(\alpha b/2) &= A e^{j\beta b/2} + F e^{-j\beta b/2} \\ 2\alpha B \operatorname{sh}(\alpha b/2) &= j\beta A e^{j\beta b/2} - j\beta F e^{-j\beta b/2} \end{aligned}$$

e nel caso asimmetrico

$$\begin{aligned} -2B \operatorname{sh}(\alpha b/2) &= A e^{j\beta b/2} + F e^{-j\beta b/2} \\ -2\alpha B \operatorname{ch}(\alpha b/2) &= j\beta A e^{j\beta b/2} - j\beta F e^{-j\beta b/2} \end{aligned}$$

Il passaggio al caso asimmetrico avviene quindi con lo scambio delle funzioni sh e ch con $-\operatorname{ch}$ e $-\operatorname{sh}$. Il sistema, nel caso simmetrico, sostituendo alle prime due equazioni del sistema (1.16) la loro somma e la loro differenza, diventa

$$\begin{aligned} E \left(1 - \frac{\alpha}{j\beta}\right) e^{-\alpha(L+b/2)} &= 2A e^{j\beta(L+b/2)} \\ E \left(1 + \frac{\alpha}{j\beta}\right) e^{-\alpha(L+b/2)} &= 2F e^{-j\beta(L+b/2)} \\ 2B \operatorname{ch}(\alpha b/2) &= A e^{j\beta b/2} + F e^{-j\beta b/2} \\ 2\frac{\alpha}{j\beta} B \operatorname{sh}(\alpha b/2) &= A e^{j\beta b/2} - F e^{-j\beta b/2} \end{aligned}$$

Il sistema è nella forma

⁹Questo non contrasta con quanto affermato nel problema 1.3.6, infatti il dominio ora si estende da $-\infty$ a $+\infty$ dove $c_1 = c_2 = 0$.

$$\begin{vmatrix} a_E & a_A & 0 & 0 \\ b_E & 0 & a_F & 0 \\ 0 & b_A & b_F & a_B \\ 0 & b_A & -b_F & b_B \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E \\ A \\ F \\ B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Soluzioni non banali si trovano annullando il determinante dei coefficienti

$$\begin{aligned} a_E (a_F a_B b_A - a_F b_A b_B) - b_E (a_A b_F b_B + a_A b_F a_B) &= 0 \\ a_E b_A a_F (a_B - b_B) - b_E a_A b_F (b_B + a_B) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{\alpha}{j\beta}\right) e^{-\alpha(L+\frac{b}{2})} (-1) e^{j\beta\frac{b}{2}} (-2) e^{-j\beta(L+\frac{b}{2})} \left[2 \operatorname{ch}(\alpha\frac{b}{2}) - 2 \frac{\alpha}{j\beta} \operatorname{sh}(\alpha b/2)\right] + \\ &- \left(1 + \frac{\alpha}{j\beta}\right) e^{-\alpha(L+\frac{b}{2})} (-2) e^{j\beta(L+\frac{b}{2})} (-1) e^{-j\beta b/2} \left[2 \operatorname{ch}(\alpha b/2) + 2 \frac{\alpha}{j\beta} \operatorname{sh}(\alpha b/2)\right] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{\alpha}{j\beta}\right) e^{-j\beta L} \left[\operatorname{ch}(\alpha b/2) - \frac{\alpha}{j\beta} \operatorname{sh}(\alpha b/2)\right] + \\ &- \left(1 + \frac{\alpha}{j\beta}\right) e^{j\beta L} \left[\operatorname{ch}(\alpha b/2) + \frac{\alpha}{j\beta} \operatorname{sh}(\alpha b/2)\right] = 0 \end{aligned}$$

Si trova per le soluzioni simmetriche

$$\operatorname{ch}(\alpha b/2) \left(\sin \beta L - \frac{\alpha}{\beta} \cos \beta L\right) - \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{sh}(\alpha b/2) \left(\cos \beta L + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta L\right) = 0$$

e per quelle asimmetriche

$$\operatorname{sh}(\alpha b/2) \left(\sin \beta L - \frac{\alpha}{\beta} \cos \beta L\right) - \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{ch}(\alpha b/2) \left(\cos \beta L + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta L\right) = 0$$

Si noti che per $b \rightarrow 0$ si ha $\operatorname{sh}(\alpha b/2) \rightarrow 0$ e $\operatorname{ch}(\alpha b/2) \rightarrow 1$, le equazioni diventano

$$\begin{aligned} \sin \beta L - \frac{\alpha}{\beta} \cos \beta L \\ \cos \beta L + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta L = 0 \end{aligned}$$

cioè si ritrovano le soluzioni della buca larga $2L$. Per $b \rightarrow \infty$ risulta $\operatorname{sh}(\alpha b/2) \rightarrow \frac{1}{2} \exp(\alpha b/2) \rightarrow \infty$, pertanto le due famiglie di autovalori coincidono in una

$$\begin{aligned} \left(\sin \beta L - \frac{\alpha}{\beta} \cos \beta L\right) - \frac{\alpha}{\beta} \left(\cos \beta L + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta L\right) &= 0 \\ \tan \beta L &= 2 \frac{\beta^2}{\beta^2 - \alpha^2} \end{aligned}$$

Si tratta delle soluzioni trovate per una buca larga L . Al diminuire di b i livelli di energia si sdoppiano allontanandosi tra di loro sino ad assumere per $b \simeq 0$ i valori dei livelli pari e dispari della buca larga $2L$.

1.3.8

Si consideri una buca di potenziale di larghezza $2L$ e di altezza finita U_0

1. ponendo l'origine degli assi di riferimento al centro della buca, si usino le proprietà di simmetria per trovare le condizioni per l'energia delle soluzioni pari e dispari.
2. si dica quale è la forma della soluzione a energia più bassa E_0 (simmetrica o antisimmetrica);
3. si ricavi, in quel caso soltanto, la relazione che deve essere soddisfatta dall'energia e da L al fine di avere una soluzione.
4. Si determini il valore di U_0 nel caso $E_0 = 45 \text{ meV}$ e $L = 0,8 \text{ nm}$.
5. Come variano al diminuire di L le energie dei livelli permessi? Cambia il loro numero? Si calcoli, con i dati del precedente punto, il nuovo valore di E_0 nel caso in cui la larghezza della buca si riduca di $1/10$.

-
1. Con riferimento alla figura 1.3 le soluzioni assumono l'aspetto

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = A e^{\beta x} & x < -L \\ \varphi_2(x) = B \sin kx + C \cos kx & -L < x < L \\ \varphi_3(x) = D e^{-\beta x} & x > L \end{cases}$$

- (a) *Caso simmetrico*

Per simmetria $[\varphi(x) = \varphi(-x)]$ deve essere: $B = 0$, inoltre interessa esaminare un solo semipiano, nell'altro si avrà la soluzione simmetrica. Si impongono le continuità in $x = L$.

$$\begin{aligned} D e^{-\beta L} &= C \cos kL \\ -\beta D e^{-\beta L} &= -k C \sin kL \end{aligned}$$

$\tan kL = \frac{\alpha}{\beta}$

- (b) *Caso antisimmetrico*

Per antisimmetria $[\varphi(x) = -\varphi(-x)]$ deve essere: $C = 0$

$$\begin{aligned} D e^{-\beta L} &= B \sin kL \\ -\beta D e^{-\beta L} &= k B \cos kL \end{aligned}$$

$\cot kL = -\frac{\alpha}{\beta}$

1.4 Barriera di potenziale ed effetto tunnel

1.4.1

Determinare il coefficiente di trasmissione per effetto tunnel attraverso una barriera di potenziale. Il coefficiente di trasmissione T è la probabilità associata all'onda trasmessa riferita alla probabilità associata all'onda incidente.

Si consideri il caso di una barriera a potenziale costante U_0 .

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \text{ e per } x > L \\ U_0 & \text{per } 0 < x < L \end{cases}$$

Si cerca una soluzione dell'equazione di Schrödinger, nel caso: $E < U_0$. In ciascuna delle tre zone I, II e III l'equazione differenziale è a coefficienti costanti, le soluzioni sono del tipo

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad \psi_I(x) &= A e^{-jkx} + B e^{jkx} & x < 0 \\ \text{II)} \quad \psi_{II}(x) &= F e^{-\beta x} + G e^{\beta x} & 0 < x < L \\ \text{III)} \quad \psi_{III}(x) &= C e^{-jkx} & x > L \end{aligned}$$

I coefficienti da determinare sono 5, le condizioni al contorno sono 4:

$$\begin{aligned} \psi_I(0) &= \psi_{II}(0) & \psi_{II}(L) &= \psi_{III}(L) \\ \psi'_I(0) &= \psi'_{II}(0) & \psi'_{II}(L) &= \psi'_{III}(L) \end{aligned}$$

Si ottengono tutti i coefficienti a meno di una costante, ad esempio A . In particolare B e C non sono entrambi nulli. Una particella di energia E è in grado di attraversare una barriera rettangolare di altezza $U_0 > E$ e larga L ; essa viene riflessa e trasmessa con *probabilità*: $R = \left| \frac{B}{A} \right|^2$ (coefficiente di riflessione) e $T = \left| \frac{C}{A} \right|^2$ (coefficiente di trasmissione).

$$\begin{cases} A & B & -F & -G & = 0 \\ -jk A & +jk B & +\beta F & -\beta G & = 0 \\ & -e^{-jkL} C & +e^{-\beta L} F & +e^{\beta L} G & = 0 \\ & jk e^{-jkL} C & -\beta e^{-\beta L} F & +\beta e^{\beta L} G & = 0 \end{cases}$$

Il sistema di equazioni lineari assume l'aspetto matriciale

$$\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

dove

$$\underline{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ +jk & 0 & +\beta & -\beta \\ 0 & -e^{-jkL} & +e^{-\beta L} & +e^{\beta L} \\ 0 & jk e^{-jkL} & -\beta e^{-\beta L} & +\beta e^{\beta L} \end{vmatrix} \quad \underline{x} = \begin{vmatrix} B/A \\ C/A \\ F/A \\ G/A \end{vmatrix} \quad \underline{b} = \begin{vmatrix} -1 \\ jk \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Usando la regola di Kramer le soluzioni si ottengono come rapporti di determinanti. Pertanto C/A si calcola dividendo il determinante che si ottiene dalla matrice dei

coefficienti sostituendo la seconda colonna con la colonna dei termini noti (b), per il determinante dei coefficienti.

Si calcola il determinante dei coefficienti sviluppando lungo la prima colonna:

$$\begin{aligned}
 1 \cdot & \begin{vmatrix} 0 & +\beta & -\beta \\ -e^{-jkL} & +e^{-\beta L} & +e^{\beta L} \\ jk e^{-jkL} & -\beta e^{-\beta L} & +\beta e^{\beta L} \end{vmatrix} - jk \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -e^{-jkL} & +e^{-\beta L} & +e^{\beta L} \\ jk e^{-jkL} & -\beta e^{-\beta L} & +\beta e^{\beta L} \end{vmatrix} = \\
 & = e^{-jkL} \{ -\beta (-\beta e^{\beta L} - jk e^{\beta L}) - \beta (\beta e^{-\beta L} - jk e^{-\beta L}) + \\
 & \quad -jk [1 \cdot (-\beta e^{\beta L} - jk e^{\beta L}) - 1 \cdot (\beta e^{-\beta L} - jk e^{-\beta L})] \} = \\
 & = e^{-jkL} [(\beta + jk)(\beta + jk)e^{\beta L} - (\beta - jk)(\beta - jk)e^{-\beta L}] = \\
 & = e^{-jkL} [(\beta^2 - k^2)(e^{\beta L} - e^{-\beta L}) + 2jk\beta(e^{\beta L} + e^{-\beta L})] = \\
 & = 2e^{-jkL} [(\beta^2 - k^2) \sinh \beta L + 2jk\beta \cosh \beta L]
 \end{aligned}$$

Si calcola il determinante al numeratore sviluppando lungo la prima colonna:

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ +jk & jk & +\beta & -\beta \\ 0 & 0 & +e^{-\beta L} & +e^{\beta L} \\ 0 & 0 & -\beta e^{-\beta L} & +\beta e^{\beta L} \end{vmatrix} = 1 \cdot jk \cdot \begin{vmatrix} +e^{-\beta L} & +e^{\beta L} \\ -\beta e^{-\beta L} & +\beta e^{\beta L} \end{vmatrix} + \\
 & -jk \cdot (-1) \begin{vmatrix} +e^{-\beta L} & +e^{\beta L} \\ -\beta e^{-\beta L} & +\beta e^{\beta L} \end{vmatrix} = j4k\beta e^{-\beta L} e^{\beta L} = j4k\beta
 \end{aligned}$$

Facendo il modulo al quadrato del rapporto si ha

$$\begin{aligned}
 T &= \left| \frac{C}{A} \right|^2 = \frac{4k^2\beta^2}{(\beta^2 - k^2)^2 \sinh^2 \beta L + 4k^2\beta^2 \cosh^2 \beta L} \\
 &= \frac{1}{\frac{(\beta^2 + k^2)^2}{4k^2\beta^2} \sinh^2 \beta L + 1} \\
 \left. \begin{aligned} k &= \sqrt{\frac{8\pi^2 m E}{h^2}} \\ \beta &= \sqrt{\frac{8\pi^2 m (U_0 - E)}{h^2}} \end{aligned} \right\} \quad \frac{(\beta^2 + k^2)^2}{4k^2\beta^2} = \frac{U_0^2}{4E(U_0 - E)}
 \end{aligned}$$

$$T = \left\{ 1 + \frac{U_0^2 \sinh^2 \beta L}{4E(U_0 - E)} \right\}^{-1}$$

1.4.2

Quanto vale la massima probabilità $p = p(E)$ che ha un elettrone di energia cinetica E di attraversare una barriera di potenziale $U_0 = E + 0,1$ eV spessa $d = 3 \text{ \AA}$?

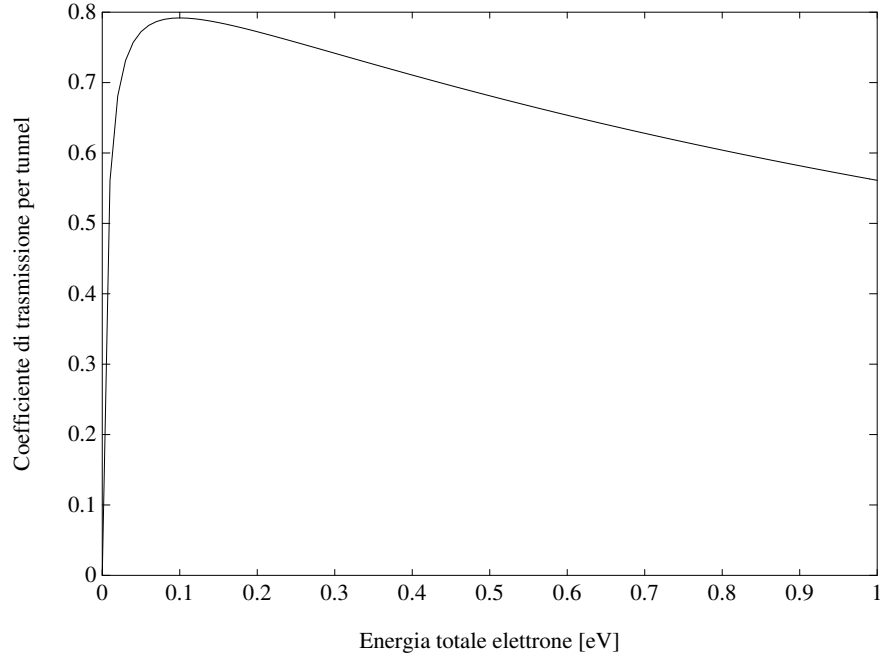


Figura 1.10: Coefficiente di trasmissione per tunnel in funzione dell'energia.

Usando la relazione ottenuta nel problema 1.4.1

$$T = \left\{ 1 + \frac{U_0^2 \sinh^2 \beta L}{4E(U_0 - E)} \right\}^{-1} \quad \text{dove } \beta = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}$$

Dato che è $U_0 = E + 0,1 \text{ eV}$, usando unità coerenti, si ha

$$\beta = \frac{\sqrt{2 \times 9,1 \cdot 10^{-31} \times 0,1 \times 1,6 \cdot 10^{-19}}}{\frac{6,625}{2\pi} \cdot 10^{-34}} = 1,618 \cdot 10^9 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} T(E) &= \left\{ 1 + \frac{(E + 0,1)^2 \sinh^2(1,618 \cdot 10^9 \times 3 \cdot 10^{-10})}{0,1 \times 4E} \right\}^{-1} \\ &= \frac{0,4E}{(E^2 + 0,2E + 0,01) \underbrace{\sinh^2(0,48552)}_{0,2548} + 0,4E} \\ &= \frac{0,4E}{0,2548E^2 + 0,451E + 2,548 \cdot 10^{-3}} \end{aligned}$$

È facile verificare che $\lim_{E \rightarrow 0} T(E) = 0$ e $\lim_{E \rightarrow \infty} T(E) = 0$, quindi il coefficiente di trasmissione presenta un massimo che si determina ponendo a zero la derivata

$dT(E)/dE = 0$. Si riscrive la relazione e si deriva

$$\begin{aligned} T(E) &= \frac{1,56 E}{E^2 + 1,77 E + 0,01} \\ \frac{dT(E)}{dE} &= \frac{1,56 (E^2 + 1,77 E + 0,01) - (2 E + 1,77) 1,56 E}{(E^2 + 1,77 E + 0,01)^2} \\ 1,56 E^2 + 2,761 E + 0,0156 - 3,12 E^2 - 2,761 E &= 0 \\ 1,56 E^2 = 0,0156 &\implies E = \sqrt{0,01} = 0,1 \text{ eV} \implies T(0,1) = 0,8 \end{aligned}$$

L'andamento complessivo del coefficiente di trasmissione in funzione dell'energia è dato nella figura 1.10.

1.4.3

Si determini la massima larghezza d_{\max} di una barriera di potenziale che consente un passaggio per effetto tunnel non trascurabile. La barriera di potenziale $U_0 = E + 1,2$ eV è dell'ordine di grandezza di quelle che si hanno nelle giunzioni al silicio.

Suggerimento: (a) Dato che si esamina un caso in cui βd è grande, si approssimi il coefficiente di trasmissione per effetto tunnel T ; (b) si disegni l'andamento asintotico di T in funzione della larghezza d , indipendentemente dai valori di E e di U_0 , e si individui il valore $d = d_{\max}$ per cui la curva arriva approssimativamente a zero¹⁰; (c) si verifichi la validità dell'approssimazione fatta in (a).

Usando la relazione ottenuta nel problema 1.4.1

$$T = \left\{ 1 + \frac{U_0^2 \sinh^2 \beta d}{4E(U_0 - E)} \right\}^{-1} \quad \text{dove} \quad \beta = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}$$

Se βd è grande $\sinh \beta d \rightarrow e^{\beta d}/2$ e nella somma al denominatore si può trascurare 1. Si ottiene

$$\begin{aligned} T &= \left\{ \frac{U_0^2 e^{2\beta d}}{16E(U_0 - E)} \right\}^{-1} = \frac{16E(U_0 - E)}{U_0^2} e^{-2\beta d} \\ T &= \frac{(U_0 - E)E}{U_0^2} e^{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)} d} \end{aligned}$$

Indipendente dai valori di E e di U_0 la probabilità diminuisce esponenzialmente con lo spessore della barriera: nella figura 1.11, è dato l'andamento del termine esponenziale di T in funzione dello spessore d . L'esponenziale si può ritenere nullo quando lo spessore è dell'ordine di 10 volte la lunghezza caratteristica dell'esponenziale stesso

$$d_{\max} \simeq 10 \cdot \frac{\hbar}{2\sqrt{2m(U_0 - E)}} = \frac{1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J s}}{2\sqrt{2 \times 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \times 1,2 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}} \simeq 8 \text{ \AA}$$

Come verifica si osserva che la stessa condizione usata per determinare d_{\max} rende lo stesso l'esponenziale molto grande ove si muti segno all'esponente, pertanto l'approssimazione iniziale è giustificata.

¹⁰Può essere una scelta ragionevole porre d pari a 10 volte la costante caratteristica dell'esponenziale.

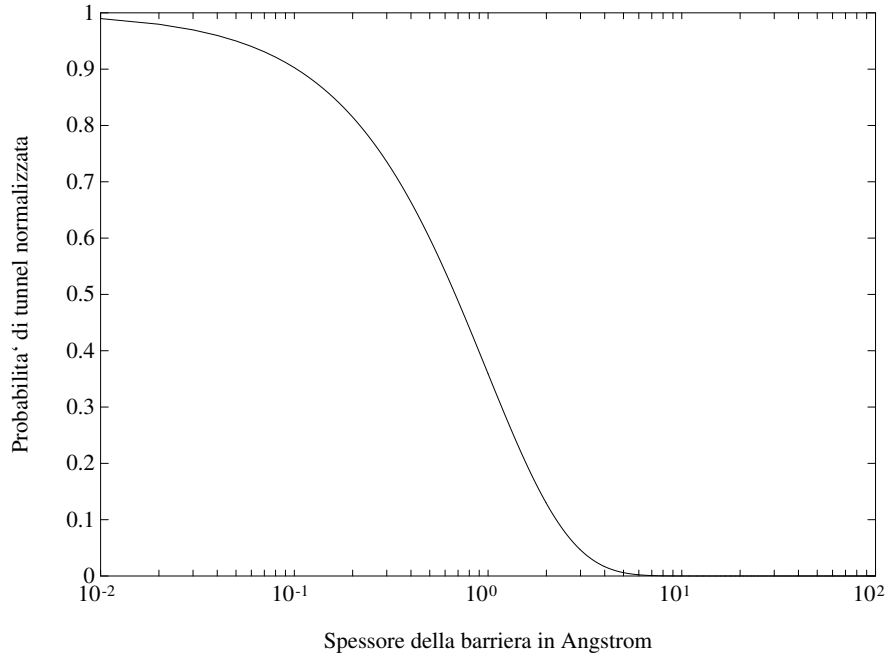


Figura 1.11: Coefficiente di trasmissione per tunnel in funzione dello spessore della barriera.

1.4.4

Si supponga di avere una barriera costante con altezza $U_0 = 0,8$ eV. Si confrontino l'espressione esatta di T e quella approssimata che trascura l'onda riflessa entro la barriera. Allo scopo si disegnino i corrispondenti grafici $T = T(\beta L)$, tra i valori di larghezza $L = 5$ Å e $L = 100$ Å, per un elettrone con energia totale $E = 0,6$ eV. Si indichi un valore minimo di βL , e quindi di L per cui l'approssimazione si può ritenere accettabile. Si ripeta con $E = 0,8$ eV.

1.4.5

Determinare il coefficiente di trasmissione per effetto tunnel attraverso la barriera di potenziale della figura 1.12.

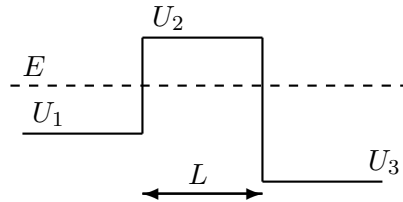


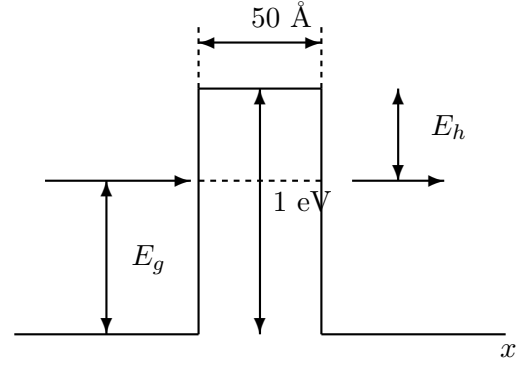
Figura 1.12: Barriera di potenziale.

1.4.6

Si calcoli la corrente che per effetto tunnel riesce a superare la barriera di potenziale riportata ¹¹ nella figura sottostante.

¹¹La situazione qui schematizzata potrebbe approssimare quella relativa a un diodo tunnel realizzato in GaSb (antimoniuro di gallio) in cui $E_g = 0,72$ eV, il livello di Fermi del semiconduttore molto drogato

La massa efficace degli elettroni che, trascinati dal campo elettrico arrivano alla barriera, è di $m^* = 0,042 m_0$. Supponendo che la concentrazione degli elettroni nel materiale sia $n = 10^{21} \text{ eln cm}^{-3}$ e che questi giungano alla barriera con una velocità di trascinamento saturata $v_{\text{sat}} = 10^7 \text{ cm s}^{-1}$, si calcoli la corrente che fluisce attraverso una sezione trasversale con area di 10^{-5} cm^2 .



La probabilità di attraversamento per effetto tunnel vale

$$T = \left\{ 1 + \frac{U_0^2 \sinh^2 \beta L}{4 E (U_0 - E)} \right\}^{-1} ; \quad \beta = \sqrt{\frac{8\pi^2 m^* (U_0 - E)}{h^2}}$$

Si prende come riferimento del potenziale l'energia relativa alla base della barriera, quindi gli elettroni giungono alla barriera con energia puramente cinetica:

$$E = \frac{1}{2} m^* v^2 = \frac{1}{2} \times 0,042 \times 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (10^5)^2 = 1,911 \cdot 10^{-22} \text{ J}$$

$$U_0 = 1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$\begin{aligned} \beta &= \sqrt{\frac{8\pi^2 \times 0,042 \times 9,1 \cdot 10^{-31} \times (1,6 \cdot 10^{-19} - 1,911 \cdot 10^{-22})}{6,62 \times 10^{-67}}} \\ &= \sqrt{\frac{3,017 \times 10^{-30} \times (1,598089 \times 10^{-19})}{4,3824 \times 10^{-67}}} = 1,04889 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1} \end{aligned}$$

Si calcola il valore della probabilità di attraversamento per effetto tunnel

$$\begin{aligned} T &= \left(1 + \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2 \sinh^2(1,04889 \times 10^9 \times 50 \times 10^{-10})}{4 \times 1,911 \times 10^{-22} \times 1,598089 \times 10^{-19}} \right)^{-1} \\ &= \left(1 + \frac{(2,56 \times 10^{-38} \sinh^2(5,24445))}{3,20327 \times 10^{-34}} \right)^{-1} \\ &= \left(1 + \frac{(2,56 \cdot 10^{-38} 94,753)}{3,20327 \cdot 10^{-34}} \right)^{-1} = (1 + 7,57251 \cdot 10^{-3})^{-1} = 5,3 \cdot 10^{-7} \end{aligned}$$

La corrente che fluisce attraverso una sezione trasversale con area di 10^{-5} cm^2 vale

$$\begin{aligned} I &= JA = q \cdot \text{densità di elettroni oltre la barriera} \cdot \text{velocità} \cdot A = \\ I &= qnTv_{\text{sat}}A \\ &= 10^7 \times 10^{21} \times 5,3 \cdot 10^{-7} \times 1,6 \times 10^{-19} \times 10^{-5} = 8,5 \text{ mA} \end{aligned}$$

1.4.7

Si abbia una barriera di potenziale $U(x)$ di tipo triangolare che scende dal valore massimo E_B in $x = 0$ sino a zero per $x = d$ sul catodo. Si valuti la probabilità di attraversamento T di un elettrone con energia $E_F < E_B$. Si indichi con $q\Phi_M$ la differenza $E_B - E_F$ e con l lo spessore della barriera per $E = E_F$.

penetra nella banda di conduzione di $E_h = 0,28 \text{ eV}$ ($E_g + E_h = 1 \text{ eV}$).

Per calcolare probabilità di attraversamento per effetto tunnel $T(E_F)$ si usa il metodo approssimato detto “WKB” (1.1)

$$T(E) = \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_0^d \{2m(U(x) - E)\}^{\frac{1}{2}} dx \right]$$

Per calcolare $T(E_F)$ è necessario esprimere l'energia potenziale usando come riferimento il livello $E = E_F$, dove la barriera è larga l

$$U(x) - E_F = q\Phi_M - \frac{q\Phi_M}{l}x = q\Phi_M \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

Si ha allora

$$\begin{aligned} T(E_F) &= \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_0^l \sqrt{2m \left(q\Phi_M \left(1 - \frac{x}{l}\right) \right)} dx \right] \\ &= \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2mq\Phi_M} \int_0^l \sqrt{\left(1 - \frac{x}{l}\right)} dx \right] \\ &= \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2mq\Phi_M} \left[-\frac{2}{3} l \left(1 - \frac{x}{l}\right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^l \right] \\ &= \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2mq\Phi_M} \frac{2}{3} l \right] = \exp \left[-\frac{4}{3\hbar} \sqrt{2mq\Phi_M} l \right] \end{aligned}$$

1.4.8

Si supponga di avere una barriera triangolare con altezza $U_M = 0,8$ eV e larghezza $L = 10$ Å. a) Si calcoli (approssimazione 1.1) il coefficiente di trasmissione per effetto tunnel di un elettrone con $E = 0,6$ eV. b) Si calcoli per quale valore U_0 di altezza di una barriera costante si avrebbe lo stesso valore di T . Commentare il risultato.

Capitolo 2

Distribuzione degli elettroni

Le proprietà di trasporto di un materiale sono legate alla densità dei portatori di carica liberi di partecipare al fenomeno della conduzione elettrica. Per determinarne il valore occorre conoscere la distribuzione dei portatori in funzione dell'energia; tale distribuzione inoltre fornisce uno strumento assai utile per comprendere il concetto di lavoro di estrazione e fenomeni quale quello dell'emissione di elettroni da un cristallo.

In questo capitolo si considera il caso di un metallo, nel capitolo 3 quello di un semiconduttore. In particolare, sono vengono esaminati gli strumenti per valutare la densità degli elettroni di conduzione a partire dalla distribuzione degli stati energetici consentiti e dalla distribuzione di Fermi. Tali strumenti consentono inoltre lo studio della termoemissione, della fotoemissione e della emissione da catodo freddo, fenomeni che possono essere usati tra l'altro per la misura sperimentale del lavoro di estrazione.

Gli esempi proposti, relativi a situazioni di interesse reale, sono completati fino alla soluzione numerica, sfruttando in qualche caso i metodi di calcolo approssimato presentati in appendice.

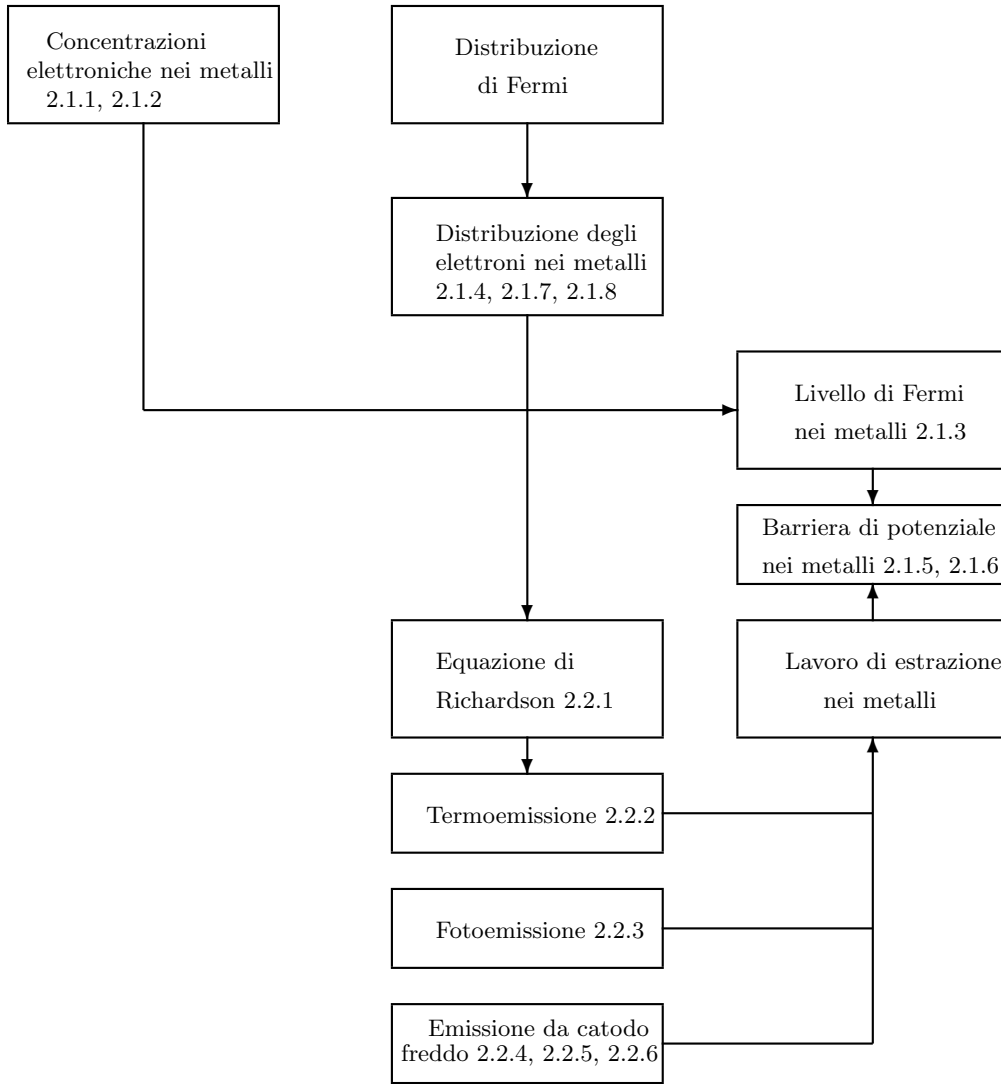


Figura 2.1: Struttura del capitolo 2.

Distribuzione degli elettroni in funzione dell'energia

Si abbia una popolazione di oggetti n che si desidera studiare rispetto a una loro caratteristica E misurabile (per esempio cittadini rispetto all'età, fotoni rispetto alla lunghezza d'onda, elettroni rispetto all'energia).

Se dn_E indica il numero di oggetti che hanno la caratteristica in esame compresa tra E ed $E + dE$, si definisce la *funzione distribuzione* la grandezza

$$\rho_E = \frac{dn_E}{dE} \quad (2.1)$$

Dalla conoscenza della distribuzione si ha ogni informazione sulla popolazione; per esempio, il numero di individui con caratteristica compresa tra E_1 ed E_2

$$n = \int_{E_1}^{E_2} dn_E = \int_{E_1}^{E_2} \rho_E dE \quad (2.2)$$

è semplicemente fornito dall'area sotto la curva della distribuzione, delimitata da E_1 e da E_2 .

Se si vuole conoscere la concentrazione n degli elettroni entro un intervallo di energia si deve determinare la distribuzione in energia degli elettroni ρ_E (2.1). In questo caso ρ_E è una densità volumica energetica; E è l'energia e dn_E è il numero degli elettroni di conduzione per metro cubo la cui energia è compresa tra E ed $E + dE$.

Risulta

$$\rho_E = \frac{dn_E}{dE} = N(E) f(E) \quad (2.3)$$

dove $N(E)$ è la distribuzione degli stati di energia permessi per unità di volume e $f(E)$ è probabilità di occupazione degli stati.

Funzione probabilità di Fermi-Dirac

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E-E_F}{kT}}} \quad (2.4)$$

Densità degli stati (E_0 valore dell'energia potenziale)

$$N(E) = \gamma (E - E_0)^{\frac{1}{2}} ; \quad \gamma = \frac{4\pi}{h^3} (2m^*)^{\frac{3}{2}} \quad (2.5)$$

Densità di elettroni liberi in un metallo

In un metallo gli elettroni liberi occupano una banda delimitata da un livello inferiore (E_0) che si può assumere come riferimento per le energie. Introducendo l'approssimazione della *massa efficace* l'interno del metallo si considera equipotenziale al valore E_0 . Pertanto E_0 è la più bassa energia, posseduta dagli elettroni mobili. Le energie riferite a tale livello sono pure energie cinetiche¹. Con il riferimento scelto il valore di energia del bordo inferiore della banda di conduzione vale $E_0 = 0$.

La concentrazione totale degli elettroni liberi vale quindi

$$\begin{aligned} n &= \int_0^{E_{\text{top}}} f(E) \gamma E^{\frac{1}{2}} dE \\ n &= \frac{4\pi}{h^3} (2m^*)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{E}}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1} dE \end{aligned}$$

Ponendo $\xi = \frac{E}{kT}$ e $\xi_F = \frac{E_F}{kT}$ si ha

$$n = N_C \mathcal{F}_{\frac{1}{2}}(\xi_F) \quad (2.6)$$

$$N_C = \frac{4\pi}{h^3} (2kT m^*)^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (2.7)$$

$$\mathcal{F}_{1/2}(\xi_F) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\xi^{\frac{1}{2}}}{e^{\xi - \xi_F} + 1} d\xi \quad (2.8)$$

$\mathcal{F}_{1/2}(\xi_F)$ è la *funzione integrale di Fermi* di ordine $\frac{1}{2}$ e di argomento ξ_F , definita con

$$\mathcal{F}_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{y^{\frac{1}{2}}}{e^{y-x} + 1} dy \quad (2.9)$$

La funzione di Fermi può essere approssimata

¹Se si ha un'energia potenziale E_0 , nelle formule al posto di E deve porsi $E - E_0$. In questo caso ovviamente il limite inferiore dell'integrale diventerebbe E_0 .

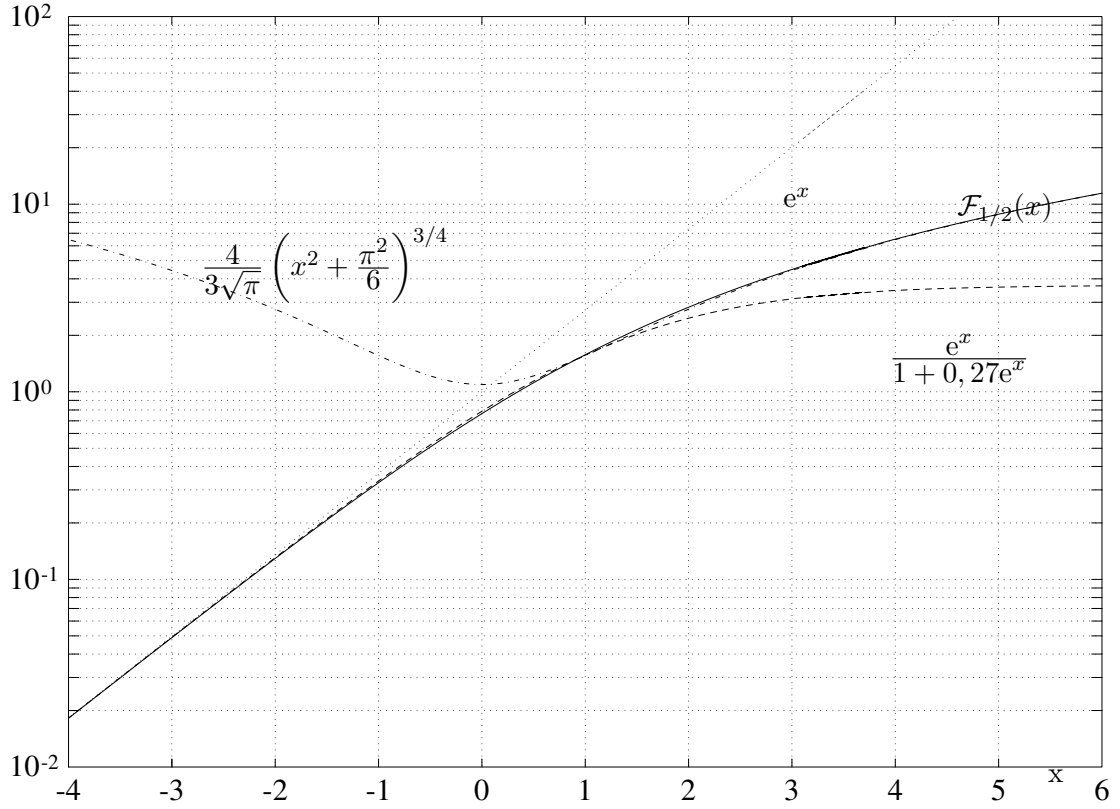


Figura 2.2: Integrale di Fermi e sue approssimazioni.

$$x \gg 0 \Rightarrow \mathcal{F}_{\frac{1}{2}} \sim \frac{4}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}} \quad (\text{Sommerfeld})$$

$$x \ll 0 \Rightarrow \mathcal{F}_{\frac{1}{2}} \sim e^x \quad (\text{Boltzmann})$$

È possibile un'ulteriore approssimazione con un errore $< 3\%$ ²

$$\mathcal{F}_{\frac{1}{2}} \sim \begin{cases} x \leq 1 \Rightarrow e^x \frac{1}{1 + 0.27e^x} \\ x \geq 1 \Rightarrow \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left(x^2 + \frac{\pi^2}{6}\right)^{3/4} \end{cases}$$

Usando l'approssimazione $x \gg 0$, allo zero assoluto si ha

$$n = \frac{4\pi}{h^3} (2m_e)^{\frac{3}{2}} (kT)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} \frac{E_F^{\frac{3}{2}}}{(kT)^{\frac{3}{2}}}$$

$$n = \frac{4\pi}{h^3} (2m_e)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} E_F^{\frac{3}{2}}$$

risultato identico a quello ottenibile integrando

$$n = \int_0^{E_F} \gamma E^{\frac{1}{2}} dE = \frac{2}{3} \gamma E_F^{\frac{3}{2}}$$

²Blakemore - Solid State Electronics - Novembre 1982.

2.1 Concentrazione e mobilità degli elettroni liberi

2.1.1

Ricavare l'espressione della concentrazione n degli elettroni liberi al m^3 , usando i simboli:

d	=	densità in kg/m^3
ν	=	valenza in elettroni liberi per atomo
A'	=	peso atomico
A	=	peso atomico in kg/mole
M_H	=	massa dell'atomo di peso unitario, in kg
M	=	numero atomi/molecola
N_{AV}	=	numero di Avogadro $6,02 \times 10^{23}$, in molecole/mole.

L'espressione della concentrazione n degli elettroni liberi è

$$\begin{aligned} n &= \text{num. atomi}/\text{m}^3 \times \text{num. elettroni liberi/atomo} \\ \frac{\text{num. atomi}}{\text{m}^3} &= \frac{\text{peso totale}}{\text{m}^3 \times \text{peso di un atomo}} = \frac{\text{densità}}{\text{peso atomico} \times \text{peso atomo unitario}} \\ n &= \frac{d}{A' \times M_H} \times \nu \end{aligned}$$

In modo alternativo

$$\begin{aligned} A' \times M_H &= \frac{\text{chilogrammo mole}}{N_{AV} \times M} \\ \text{peso atomico in kg} &= \frac{\text{chilogrammo mole}}{M} \\ A' \times M_H &= \frac{\text{peso atomico in kg}}{N_{AV}} = \frac{A}{N_{AV}} \\ n &= \frac{d}{A} N_{AV} \nu \end{aligned}$$

dove d/A è il numero di moli al m^3 .

2.1.2

Si calcoli la mobilità degli elettroni liberi nell'alluminio sapendo che la densità del metallo è $2,7 \text{ g cm}^{-3}$ e la resistività è $3,44 \times 10^{-6} \Omega \text{ cm}$.

L'atomo dell'alluminio ha tre elettroni di valenza. Il numero di elettroni liberi si calcola con i risultati del problema 2.1.1

$$n = N_{AV} \frac{d \nu}{A} M = \frac{6,02 \cdot 10^{23} \times 2,7 \cdot 10^3 \times 3}{26,97 \cdot 10^{-3}} = 1,8 \cdot 10^{29} \frac{\text{eln}}{\text{m}^3}$$

La mobilità compare nell'espressione della conducibilità σ

$$\begin{aligned}\sigma &= \mu n q \Rightarrow \mu = \frac{\sigma}{n q} = \frac{1}{\rho n q} \\ \mu &= \frac{1}{\left(18 \cdot 10^{28} \frac{\text{eln}}{\text{m}^3}\right) 1,6 \cdot 10^{-19} \frac{\text{C}}{\text{eln}} 3,44 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}} \\ &= 1,01 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}} = 10,1 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}\end{aligned}$$

2.1.3 Effetto della temperatura

Si calcoli la temperatura alla quale nell'argento metallico il livello di Fermi supera il bordo inferiore della banda di conduzione (degenerazione del metallo)³.

Suggerimento: (a) Si individui il valore di energia del bordo inferiore della banda di conduzione E_C . (b) Si scriva la relazione tra il livello di Fermi E_F allo zero assoluto e la concentrazione degli elettroni. (c) Si individui un'espressione comprendente E_F e la temperatura assoluta T , se ne faccia un grafico e si determini graficamente o numericamente il valore di T per cui $E_F = E_C$.

La banda di conduzione è l'insieme dei livelli di energia degli elettroni liberi di muoversi. In un metallo gli elettroni liberi occupano una banda delimitata da un livello inferiore che si assume come riferimento per le energie $E_C \equiv E_0 = 0$. Le energie riferite a tale livello sono pure energie cinetiche. Il numero totale degli elettroni liberi per unità di volume è

$$n = \frac{4\pi}{h^3} (2m^*)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{E}}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1} dE$$

Usando l'approssimazione della funzione integrale di Fermi $x \gg 0$, allo zero assoluto si ha

$$n = \frac{4\pi}{h^3} (2m_e)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} E_F^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \gamma E_F^{\frac{3}{2}}$$

Per l'argento metallico si può supporre: $n = 6 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ e $m^* = m_e = 9,1 \cdot 10^{31} \text{ kg}$

$$E_F(T = 0\text{K}) = 8,9 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 5,59 \text{ eV}$$

Infine, osservando che in un metallo il numero totale di elettroni è costante, si può ottenere la variazione del livello di Fermi con la temperatura risolvendo numericamente l'equazione,

$$n = \frac{4\pi}{h^3} (2m_e kT)^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathcal{F}_{\frac{1}{2}} \left(\frac{E_F}{kT} \right)$$

rispetto a E_F : l'andamento risultante del livello di Fermi con T è dato nella figura 2.3: si osserva che sino a temperature molto alte (dell'ordine di 10000 K) E_F resta praticamente costante al variare di T .

La temperatura per la quale $E_F = E_C$, ovvero, con il riferimento scelto, $E_F = 0$, si può ottenere usando l'approssimazione della funzione integrale di fermi per $x = E_F/kT < 1$.

³In realtà non esiste differenza teorica tra metalli e semiconduttori.

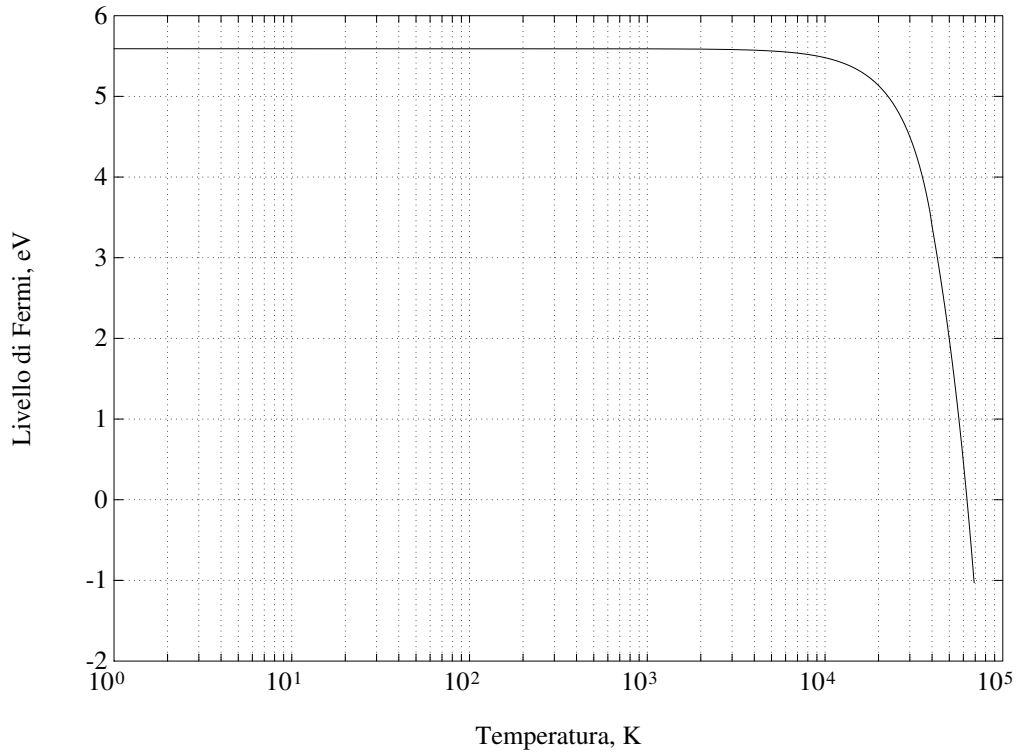


Figura 2.3: Andamento del livello di Fermi con la temperatura.

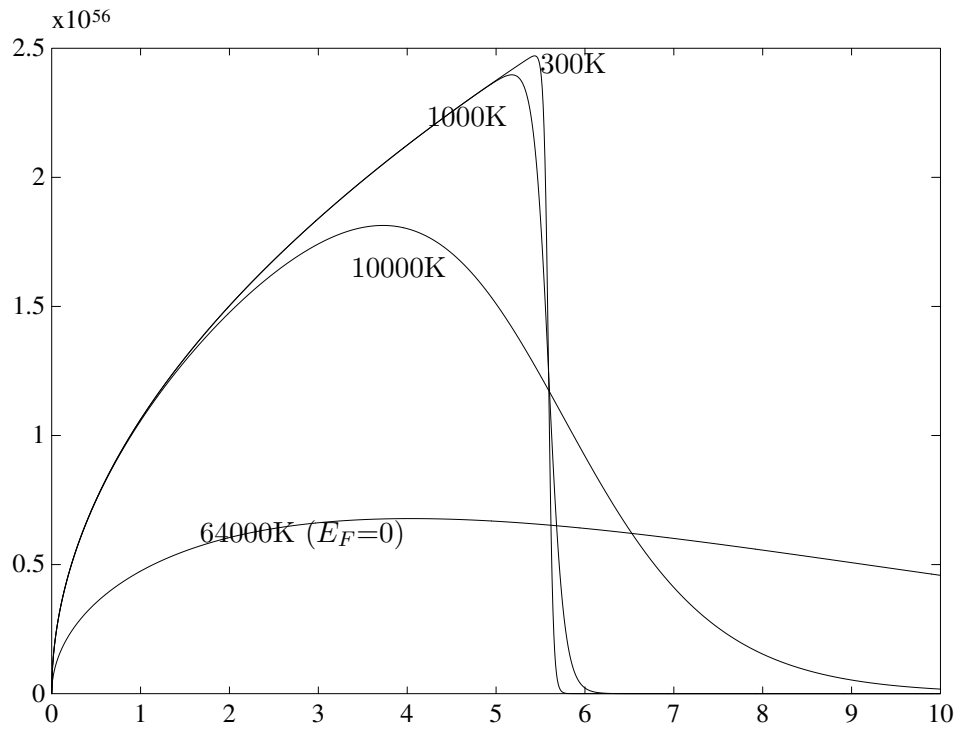


Figura 2.4: $N(E) \cdot f(E)$ per differenti temperature.

Si ha

$$\mathcal{F}_{\infty/\infty} \left(\frac{E_F}{kT} \right) \bigg|_{E_F=0} \simeq \frac{e^{E_F/kT}}{1 + 0,27e^{E_F/kT}} \bigg|_{E_F=0} = \frac{1}{1,27}$$

$$n = \frac{4\pi}{h^3} (2mk)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2 \times 1,27} T^{3/2}$$

La temperatura cercata è quindi

$$T = \frac{(1,27n h^3)^{2/3}}{2^{2/3} 2\pi m k} \simeq 62880 \text{ K}$$

2.1.4 Distribuzione in energia degli elettroni

Quanti elettroni al metro cubo nel tungsteno metallico sono forniti di un'energia compresa tra 8,5 eV e 8,6 eV, a) per $T = 0 \text{ K}$, b) per $T = 2500 \text{ K}$?

Per $T = 0 \text{ K}$ la distribuzione degli elettroni $\rho_E(E) = N(E) f(E)$ è

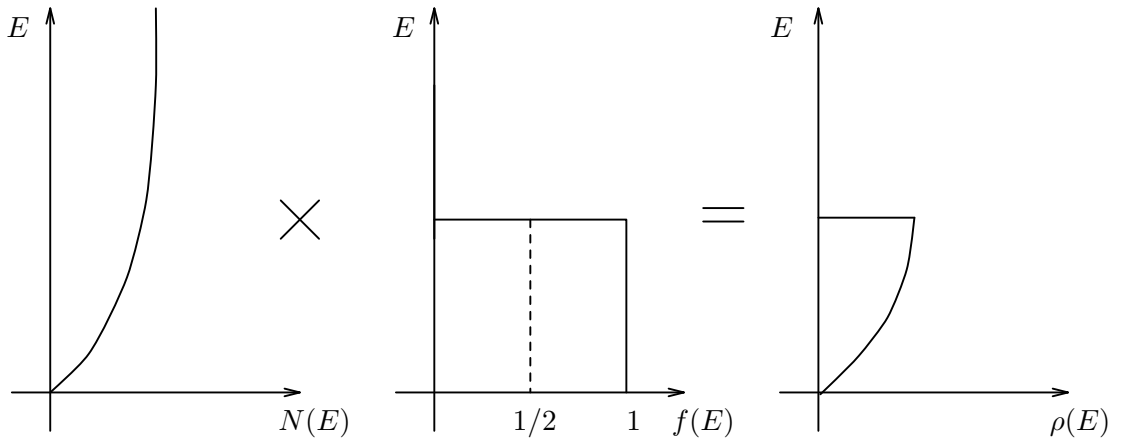


Figura 2.5: Densità degli stati, distribuzione di Fermi e densità degli elettroni in un metallo a 0 K.

$$N(E) = \gamma E^{\frac{1}{2}} ; f(E) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E-E_F}{kT}}} ; \gamma = \frac{4\pi}{h^3} (2m^*)^{\frac{3}{2}}$$

La concentrazione volumica degli elettroni nella banda di conduzione per $T = 0 \text{ K}$ vale

$$n = \int_0^{E_F} \gamma E^{\frac{1}{2}} \underbrace{f(E)}_{=1} dE = \frac{2}{3} \gamma E_F^{\frac{3}{2}} \rightarrow E_F = \left(\frac{3}{2} \frac{n}{\gamma} \right)^{\frac{2}{3}}$$

e si può calcolare come nel problema 2.1.1

$$n = N_{AV} \frac{d\nu}{A}$$

N_{AV}	=	numero di Avogadro	$6,02 \cdot 10^{23} \text{ molecole/m}^{-3}$
d	=	densità in kg cm^{-3}	$18,8 \cdot 10^{-3} \text{ kg cm}^{-3}$
A	=	peso atomico	$184 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mole}$
ν	=	elettroni liberi per atomo	2 eln/atomo

$$\begin{aligned} n &= 6,02 \cdot 10^{23} \times \frac{18,8 \cdot 10^{-3}}{184 \cdot 10^{-3}} \times 2 \\ &= 12,3 \cdot 10^{22} \text{ eln cm}^{-3} = 12,3 \cdot 10^{28} \text{ eln m}^{-3} \end{aligned}$$

Si calcola di γ

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{4\pi}{h^3} (2m^*)^{\frac{3}{2}} = \frac{4\pi}{(6,625 \cdot 10^{-34})^3} \times (2 \times 9,1 \cdot 10^{-31})^{\frac{3}{2}} \\ &= 1,0651 \cdot 10^{56} \left[\text{J}^{-\frac{3}{2}} \text{ m}^{-3} \right] \end{aligned}$$

e se ne fa un'analisi dimensionale

$$\begin{aligned} \left[\text{J}^{-3} \text{ s}^{-3} \text{ kg}^{\frac{3}{2}} \right] &= \text{kg}^{-3} \text{ m}^{-6} \text{ s}^6 \text{ s}^{-3} \text{ kg}^{\frac{3}{2}} = \\ &= (\text{kg m}^2 \text{ s}^{-2})^{-\frac{3}{2}} \text{ m}^{-3} = \left[\text{J}^{-\frac{3}{2}} \text{ m}^{-3} \right] \end{aligned}$$

Per ottenere γ in $\left[\text{eV}^{-\frac{3}{2}} \text{ m}^{-3} \right]$ si deve dividere per $(1,6 \cdot 10^{-19})^{-\frac{3}{2}}$

$$\gamma = 1,0651 \cdot 10^{56} \times (1,6 \cdot 10^{-19})^{\frac{3}{2}} = 6,83 \cdot 10^{27} \left[\text{eV}^{-\frac{3}{2}} \text{ m}^{-3} \right]$$

È possibile proseguire i calcoli in J o in eV

$$\begin{aligned} E_F &= \left(\frac{3 \times 12,3 \cdot 10^{28}}{2 \times 6,83 \cdot 10^{27}} \right)^{\frac{2}{3}} = 9,01 \text{ eV} \\ E_F &= \left(\frac{3 \times 12,3 \cdot 10^{28}}{2 \times 1,0651 \cdot 10^{56}} \right)^{\frac{2}{3}} = 1,4423 \cdot 10^{-18} \text{ J} \end{aligned}$$

Dato che $E_F > 8,6 \text{ eV}$ il numero n' degli elettroni compresi tra 8,5 e 8,6 eV è certamente non nullo

$$\begin{aligned} n' &= \int_{E_1=8,5}^{E_2=8,6} \gamma E^{\frac{1}{2}} \cdot 1 \cdot dE = \gamma \left[\frac{2}{3} E^{\frac{3}{2}} \right]_{E_1}^{E_2} = \frac{3}{2} \times 6,83 \cdot 10^{27} \times \left(8,6^{\frac{3}{2}} - 8,5^{\frac{3}{2}} \right) \\ n' &= 1,997 \cdot 10^{27} \text{ eln m}^{-3} = 1,997 \cdot 10^{21} \text{ eln cm}^{-3} \end{aligned}$$

b) Per $T = 2500 \text{ K}$ la distribuzione degli elettroni $\rho_E(E)$ cambia aspetto e il numero degli elettroni cercato diventa n''

$$n'' = \int_{E_1}^{E_2} \rho_E(E) dE = \int_{E_1}^{E_2} \gamma E^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1 + e^{\frac{E-E_F}{kT}}} dE$$

L'integrale è risolubile in modo analitico, l'intervallo di energie è però abbastanza piccolo da consentire di approssimare la funzione integranda con un valore costante. Se si sceglie il valore del punto di mezzo, l'errore legato all'approssimazione in parte si riduce. Infatti essendo la funzione monotona dai due lati del punto medio gli errori introdotti rispetto al calcolo esatto sono aree di segno opposto.

$$n'' = \gamma \left\{ \left[\frac{E_1 + E_2}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{1 + \exp \left(\frac{\frac{E_1 + E_2}{2} - E_F}{kT} \right)} \right] \right\} (E_2 - E_1)$$

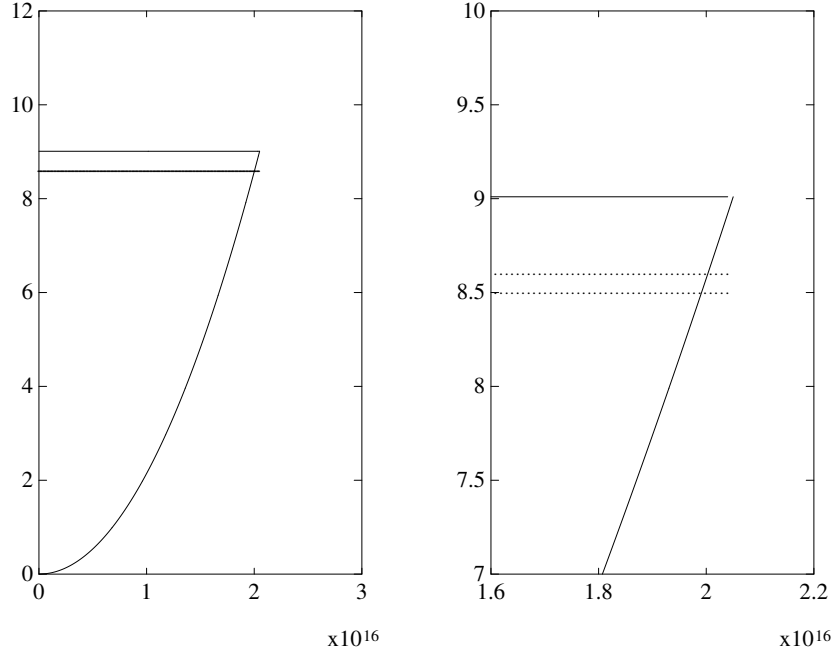


Figura 2.6: Distribuzione degli elettroni $\rho(E)$ per $T = 0$ K.

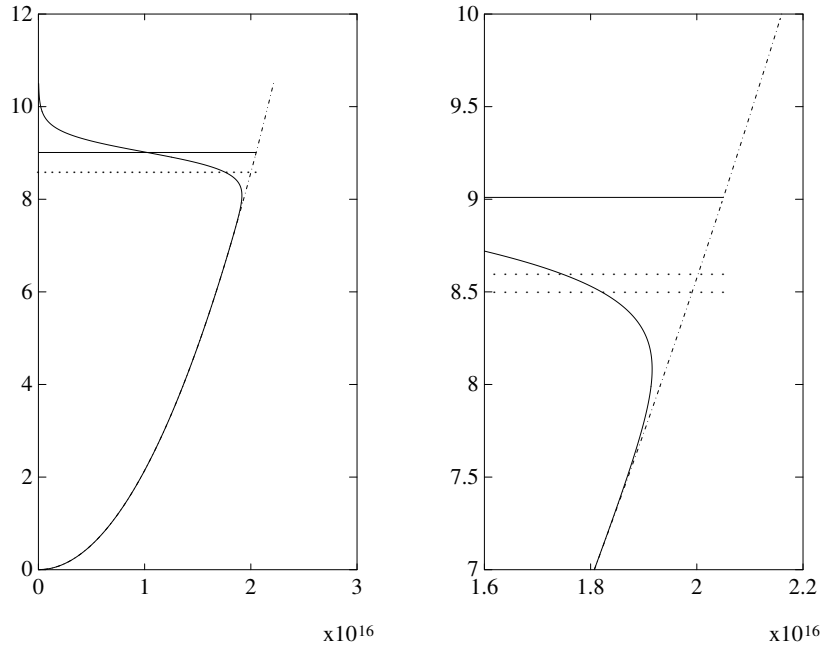


Figura 2.7: $E = N(E)$ e distribuzione degli elettroni $\rho(E)$ a $T = 2500$ K.

$$E_F = 9,01 \text{ eV}; \quad kT = 8,62 \cdot 10^{-5} \cdot 2500 = 0,2155 \text{ eV}; \quad \frac{E_1 + E_2}{2} = 8,55 \text{ eV}$$

$$n'' = \gamma \left(8,55^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1 + e^{-\frac{0,46}{kT}}} \right) 0,1 = 6,83 \cdot 10^{27} \times (2,92 \times 0,894) \times 0,1$$

$$n'' = 1,78 \cdot 10^{27} \text{ eln m}^{-3} = 1,78 \cdot 10^{21} \text{ eln cm}^{-3}$$

Con un calcolo più corretto (formula di Gauss-Legendre a 5 punti) si ottiene $1,7844 \cdot 10^{21} \text{ eln cm}^{-3}$. L'approssimazione ottenuta in precedenza è quindi ottima.

$$\frac{n''}{n'} = \frac{1,785}{1,997} = 0,893$$

2.1.5

Si calcoli per un catodo di tungsteno (densità = $18,8 \text{ g cm}^{-3}$, lavoro di estrazione = $4,24 \text{ eV}$) alla temperatura di 2000 K :

1. l'altezza della barriera di potenziale alla superficie del metallo;
2. l'espressione analitica della concentrazione degli elettroni che hanno energia superiore alla barriera e sono emessi per effetto termoelettronico;
3. il valore della concentrazione degli elettroni che possono essere emessi dal metallo.

Suggerimento: si supponga che per $E > 13,65 \text{ eV}$ la funzione integranda sia nulla e la si approssimi con una retta.

Allo zero assoluto è

$$n_0 = \frac{2}{3} \gamma E_F^{\frac{3}{2}}; \quad E_F = \left[\frac{3}{2} \frac{n_0}{\gamma} \right]^{\frac{2}{3}}$$

$$n_0 = \frac{N_{AV}}{A} \frac{d\nu}{\nu} \left\{ \begin{array}{l} N_{AV} = 6,02 \cdot 10^{23} \\ \nu = 2 \\ A = 183,85 \frac{\text{g}}{\text{mole}} \\ d = 18,8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \end{array} \right\} \rightarrow n_0 = 1,23 \cdot 10^{23} \text{ cm}^{-3}$$

Calcolato γ si determina il livello di Fermi

$$\gamma = \frac{4\pi}{h^3} (2m^*)^{\frac{3}{2}} = 1,06 \cdot 10^{56} \text{ J}^{-3} \text{ s}^{-3} \text{ kg}^{\frac{3}{2}} = 6,81 \cdot 10^{27} \text{ eV}^{-\frac{3}{2}} \text{ m}^{-3}$$

$$E_F = 9,06 \text{ eV}$$

L'altezza della barriera di potenziale localizzata alla superficie del metallo è data da

$$E_B = E_F + E_W = 13,3 \text{ eV}$$

c) Approssimando la distribuzione di Fermi con quella di Boltzmann, la concentrazione degli elettroni emessi si calcola come

$$n = \int_{E_B}^{\infty} N(E) f(E) dE \simeq \gamma \int_{E_B}^{\infty} \sqrt{E} e^{-\frac{E-E_F}{kT}} dE$$

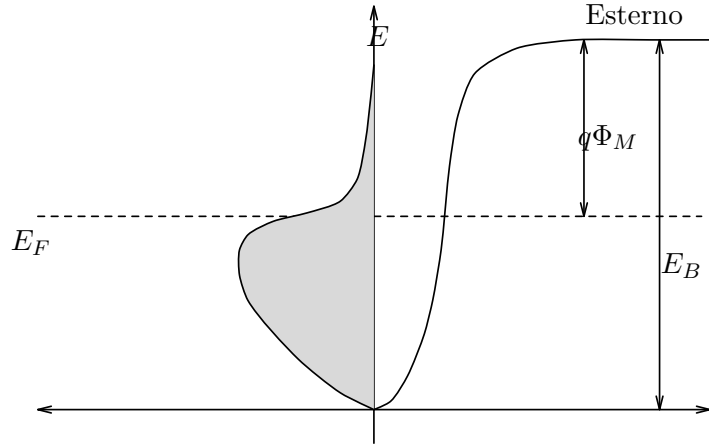


Figura 2.8: Effetto termoelettronico.

c) La funzione integranda, per energie superiori a E_B ha un andamento approssimativamente di tipo esponenziale decrescente:

$$\Phi(E) = \gamma e^{\frac{E_F}{kT}} \sqrt{E} e^{-\frac{E}{kT}}$$

Dato che per $E > E_M = 13,65$ eV la funzione integranda è quasi nulla, si può approssimare la curva esponenziale con una retta

$$\begin{aligned} y(E) &= \Phi(E_B) \frac{E_M - E}{E_M - E_B} \\ n &\simeq \frac{\Phi(E_B)}{E_M - E_B} \int_{E_B}^{E_M} (E_M - E) dE \\ &= \frac{1}{2} \Phi(E_B) (E_M - E_B) \end{aligned}$$

Per calcolare il valore di $\Phi(E_B)$ si ha ora $kT = 0,1724$ eV $= 2,761 \cdot 10^{-20}$ J; conviene svolgere i conti con unità coerenti

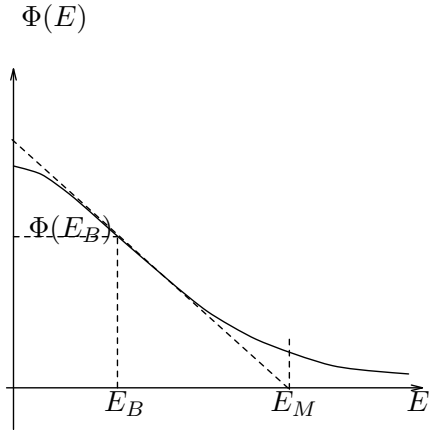


Fig. 2.9

$$\begin{aligned} \Phi(E_B) &= \gamma e^{-\frac{E_W}{kT}} \sqrt{E_B} = 5,157 \cdot 10^{17} \text{ m}^{-3} \text{ eV}^{-1} \\ n &\simeq 9,025 \cdot 10^{16} \text{ m}^{-3} = 9,025 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3} \end{aligned}$$

Nota. Il valore $E_M = 13,65$ eV è fissato basandosi su un calcolo corretto dell'integrale. Non conoscendo tale valore si può però avere una stima approssimata del risultato con un metodo numerico di quadratura. Integrare la funzione $y = f(x)$ tra x_0 e x_1 significa valutare l'area della figura geometrica racchiusa tra l'asse x , la curva $f(x)$ e le due rette $x = x_0$ e $x = x_1$. Nel *metodo dei trapezi* si sostituisce alla curva una spezzata di segmenti rettilinei, l'area da valutare diventa somma di aree di trapezi.

L'esponenziale, che è la funzione dominante dell'integranda, ha una costante di decadimento pari a kT . Si può pensare di sommare aree di trapezi $\Delta = \frac{1}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1}))(x_{i+1} - x_i)$ con base $(x_{i+1} - x_i)$ pari a frazioni di $kT = 172$ meV, sino a che il contributo non diventi trascurabile (nella tabella si usa un passo pari a $kT/3$).

Conviene fare un cambiamento di variabili che consenta di trattare numeri non troppo elevati e di avere solo rapporti di energia e quindi di poter usare l'unità eV; definita la

nuova variabile $e = E - E_B$, si ha

$$n \simeq \gamma e^{-\frac{E_B - E_F}{kT}} \int_0^\infty \sqrt{e + E_B} e^{-\frac{e}{kT}} de = \Phi(E_B) \int_0^\infty \sqrt{\frac{e + E_B}{E_B}} e^{-\frac{e}{kT}} de$$

$e = E - E_B$ eV	E eV	$\Delta n / \Phi(E_B)$	n m^{-3}
0,05747	13,35747	$4,93661E - 02$	$2,54581E + 16$
0,11493	13,41493	$3,54485E - 02$	$4,37389E + 16$
0,17240	13,47240	$2,54545E - 02$	$5,68658E + 16$
0,22987	13,52987	$1,82779E - 02$	$6,62917E + 16$
0,28733	13,58733	$1,31245E - 02$	$7,30600E + 16$
0,34480	13,64480	$9,42405E - 03$	$7,79200E + 16$
0,40227	13,70227	$6,76687E - 03$	$8,14097E + 16$
0,45973	13,75973	$4,85885E - 03$	$8,39154E + 16$
0,51720	13,81720	$3,48880E - 03$	$8,57146E + 16$
0,57467	13,87467	$2,50504E - 03$	$8,70064E + 16$
0,63213	13,93213	$1,79866E - 03$	$8,79340E + 16$
0,68960	13,98960	$1,29146E - 03$	$8,86000E + 16$
0,74707	14,04707	$9,27275E - 04$	$8,90782E + 16$
0,80453	14,10453	$6,65782E - 04$	$8,94215E + 16$
0,86200	14,16200	$4,78027E - 04$	$8,96680E + 16$
0,91947	14,21947	$3,43217E - 04$	$8,98450E + 16$
0,97693	14,27693	$2,46423E - 04$	$8,99721E + 16$
1,03440	14,33440	$1,76926E - 04$	$9,00634E + 16$
1,09187	14,39187	$1,27027E - 04$	$9,01289E + 16$
1,14933	14,44933	$9,12011E - 05$	$9,01759E + 16$
1,20680	14,50680	$6,54786E - 05$	$9,02097E + 16$
1,26427	14,56427	$4,70105E - 05$	$9,02339E + 16$
1,32173	14,62173	$3,37510E - 05$	$9,02513E + 16$
1,37920	14,67920	$2,42313E - 05$	$9,02638E + 16$
1,43667	14,73667	$1,73965E - 05$	$9,02728E + 16$
1,49413	14,79413	$1,24895E - 05$	$9,02792E + 16$
1,55160	14,85160	$8,96650E - 06$	$9,02838E + 16$
1,60907	14,90907	$6,43723E - 06$	$9,02872E + 16$
1,66653	14,96653	$4,62138E - 06$	$9,02895E + 16$
1,72400	15,02400	$3,31773E - 06$	$9,02913E + 16$
1,78147	15,08147	$2,38181E - 06$	$9,02925E + 16$
1,83893	15,13893	$1,70990E - 06$	$9,02934E + 16$
1,89640	15,19640	$1,22752E - 06$	$9,02940E + 16$
1,95390	15,25387	$8,81224E - 07$	$9,02945E + 16$
2,01133	15,31133	$6,32616E - 07$	$9,02948E + 16$
2,06880	15,36880	$4,54141E - 07$	$9,02950E + 16$

2.1.6

Nel platino metallico ($d = 21,45 \text{ g/cm}^3$, molecole monoatomiche) calcolare la percentuale degli elettroni che a 2000 K superano di 1 eV la barriera di potenziale (ovvero gli elettroni con energia compresa tra E_B e $E_B + 1 \text{ eV}$).

Dati numerici sul platino: lavoro di estrazione: $q\Phi_M = 5,75 \text{ eV}$
 peso atomico $A = 195,09 \text{ g/atomo}$
 valenza: $\nu = 1$
 densità: $d = 21,45 \text{ g cm}^{-3}$

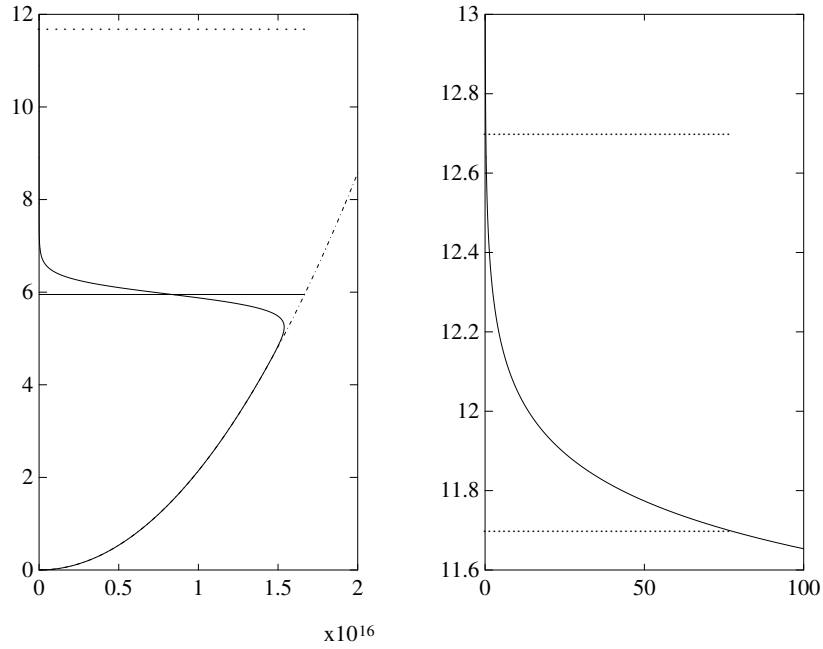


Figura 2.10: $E = N(E)$, e distribuzione degli elettroni $\rho(E)$ a 2000 K.

La situazione è descritta mediante la funzione $\rho(E)$ nella figura 2.10

$$\begin{aligned} n &= N_{AV} \frac{d\nu}{A} = 6,02 \cdot 10^{23} \times \frac{21,45 \cdot 10^{-3}}{195,09 \cdot 10^{-3}} \times 1 \\ &= 6,62 \cdot 10^{28} \text{ eln m}^{-3} = 6,62 \cdot 10^{22} \text{ eln cm}^{-3} \\ E_F &= \left(\frac{3n}{2\gamma} \right)^{\frac{2}{3}} = 5,95 \text{ eV} ; \quad E_B = E_F + q\Phi_M = 5,95 + 5,75 = 11,7 \text{ eV} \end{aligned}$$

$$n|_{2000\text{K}} = \int_{11,7\text{eV}}^{12,7\text{eV}} \gamma E^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1 + e^{\frac{E-E_F}{kT}}} dE$$

Nonostante che la funzione di Fermi possa essere ovviamente sostituita con la più semplice funzione di Boltzmann, non è possibile calcolare in forma chiusa l'integrale. Tuttavia, considerando che l'intervallo di integrazione è piuttosto piccolo, in analogia con quanto descritto nel problema 2.1.4, si può considerare costante l'integranda, al valore calcolato nel punto medio $E_m = 12,2 \text{ eV}$ ⁴:

$$n = \gamma E_m^{\frac{1}{2}} f(E_m) \Delta E = 4,51 \cdot 10^{12} \text{ m}^{-3}$$

Con un'integrazione numerica si trova $13,2 \cdot 10^{12} \text{ m}^{-3}$.

$$\frac{n}{n_0} = \frac{4,51 \cdot 10^{12}}{6,62 \cdot 10^{28}} = 6,81 \cdot 10^{-17}$$

⁴In questo caso la funzione integranda $E \gg E_F$ varia molto rapidamente, quindi l'approssimazione sarà certamente peggiore (fig. 2.11). Risultati migliori si possono ottenere mediante il metodo dei trapezi.

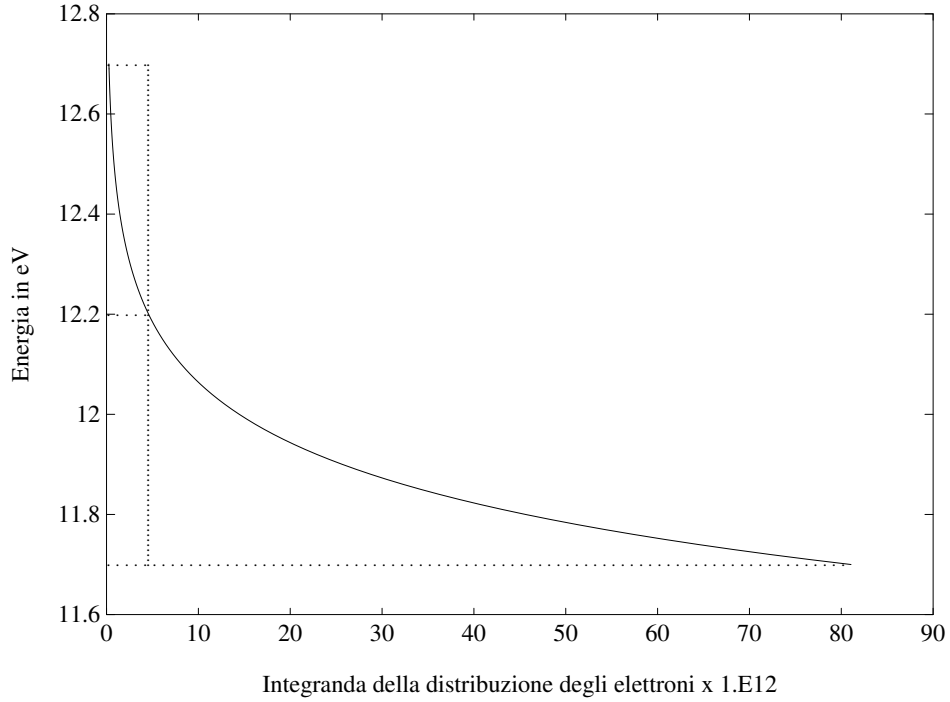


Figura 2.11: Integrale esatto (area del triangolo curvilineo) e approssimato (area del rettangolo).

2.1.7

Si dimostri che l'energia media degli elettroni in un metallo a 0 K è pari a $\frac{3}{5} E_F$.

L'energia media di una distribuzione ρ_E di elettroni si calcola in generale come

$$\bar{E} = \frac{\int_0^\infty N(E) f(E) E dE}{\int_0^\infty N(E) f(E) dE} = \frac{\int_0^\infty \rho_E(E) E dE}{\int_0^\infty \rho_E(E) dE}$$

Alla temperatura di 0 K, la funzione integranda è particolarmente semplice,

$$\rho_E(E) = N(E) f(E) = \gamma E^{\frac{1}{2}} \left. \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}}} \right|_{0K} = \gamma E^{\frac{1}{2}}$$

e per l'energia media si ottiene

$$\bar{E} = \frac{\int_0^{E_F} \gamma E^{\frac{1}{2}} E dE}{\int_0^{E_F} \gamma E^{\frac{1}{2}} dE} = \frac{\gamma \int_0^{E_F} E^{\frac{3}{2}} dE}{\gamma \int_0^{E_F} E^{\frac{1}{2}} dE} = \frac{\frac{2}{5} E_F^{\frac{5}{2}}}{\frac{2}{3} E_F^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{5} E_F$$

2.1.8

Sapendo che in un determinato materiale metallico l'energia media per elettrone a 0 K è 4,48 eV, si determini:

1. la concentrazione di elettroni liberi al m³,
2. l'espressione analitica dell'energia media nel caso in cui si porti la temperatura a 50 K;
3. il valore della derivata della funzione di Fermi-Dirac in $E = E_F$ a 50 K.
4. Immaginando di approssimare la funzione di Fermi-Dirac con una retta passante per $E = E_F$ e con pendenza pari alla tangente in quel punto, si calcoli l'energia media per elettrone a 50 K.

a)

Si cerca un legame tra \bar{E} e E_F ; a 0 K è

$$\bar{E} = \frac{\int_0^{E_F} \rho_E(E) E dE}{\int_0^{E_F} \rho_E(E) dE} = \frac{\int_0^{E_F} \gamma E^{\frac{1}{2}} E dE}{\int_0^{E_F} \gamma E^{\frac{1}{2}} dE}$$

$$\bar{E} = \frac{\frac{2}{5} \gamma \left[E_F^{\frac{5}{2}} \right]}{\frac{2}{3} \gamma \left[E_F^{\frac{3}{2}} \right]} = \frac{3}{5} E_F$$

$$E_F = \frac{5}{3} \bar{E} = \frac{5}{3} \times 4,48 = 7,47 \text{ eV}$$

$$\gamma = 6,83 \cdot 10^{27} \text{ eV}^{-\frac{3}{2}} \text{ m}^{-3} ; \quad n = \frac{2}{3} \gamma E_F^{\frac{3}{2}} \simeq 9,25 \cdot 10^{28} \text{ eln m}^{-3}$$

b)

Alla temperatura $T = 50 \text{ K}$

$$\bar{E} |_{50K} = \frac{\int_0^{\infty} \frac{\gamma E^{\frac{3}{2}}}{1 + e^{\frac{E-E_F}{kT}}} dE}{\int_0^{\infty} \frac{\gamma E^{\frac{1}{2}}}{1 + e^{\frac{E-E_F}{kT}}} dE}$$

c)

Derivando la la funzione $f(E)$ si ottiene

$$\frac{df(E)}{dE} = \frac{-1}{\left[1 + e^{\frac{E-E_F}{kT}} \right]^2} \frac{1}{kT} e^{\frac{E-E_F}{kT}}$$

$$\left. \frac{df(E)}{dE} \right|_{E=E_F} = \frac{-1}{kT (1+1)^2} = -\frac{1}{4kT} \simeq -3,62 \cdot 10^{20} \text{ J}^{-1}$$

d)

$$f'(E_F) = -57,92 \text{ eV}^{-1} = \alpha ; \quad f(E_F) = \frac{1}{2}$$

Si approssima la funzione $f(E)$ con la spezzata

$$g(E) = \begin{cases} f(E_F) + f'(E_F) \cdot (E - E_F) & \text{per } E_F - E_B \leq E \leq E_F + E_B \\ 1 & \text{per } 0 \leq E < E_F - E_B \\ 0 & \text{per } E > E_F + E_B \end{cases}$$

dove E_B è il valore per cui $g(E_F + E_B) = 0$, cioè $0 = \frac{1}{2} + \alpha E_B \rightarrow E_B = -1/2\alpha$. Pertanto

$$\bar{E} \simeq \frac{\int_0^{E_F - E_B} \gamma E^{\frac{3}{2}} dE + \int_{E_F - E_B}^{E_F + E_B} \gamma E^{\frac{3}{2}} \left[\frac{1}{2} + \alpha (E - E_F) \right] dE}{n}$$

$$\bar{E} \simeq \frac{\frac{2}{5} (E_F - E_B)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{5} \left[E^{\frac{5}{2}} \right]_{E_F - E_B}^{E_F + E_B} + \alpha \int_{E_F - E_B}^{E_F + E_B} E^{\frac{5}{2}} dE - \alpha E_F \int_{E_F - E_B}^{E_F + E_B} E^{\frac{3}{2}} dE}{n} \gamma$$

Numericamente si ha

$$\bar{E} \simeq \frac{4,16 \cdot 10^{29}}{9,25 \cdot 10^{28}} = 4,5 \text{ eV}$$

2.2 Lavoro di estrazione

La valutazione sperimentale del lavoro di estrazione si può effettuare con tre diversi metodi, che vengono esemplificati nei tre problemi 2.2.1, 2.2.3 e 2.2.4.

2.2.1

Si ricavi l'equazione di Richardson della densità di corrente emessa per effetto termoelettronico (fig. 2.12) da un metallo alla temperatura T .

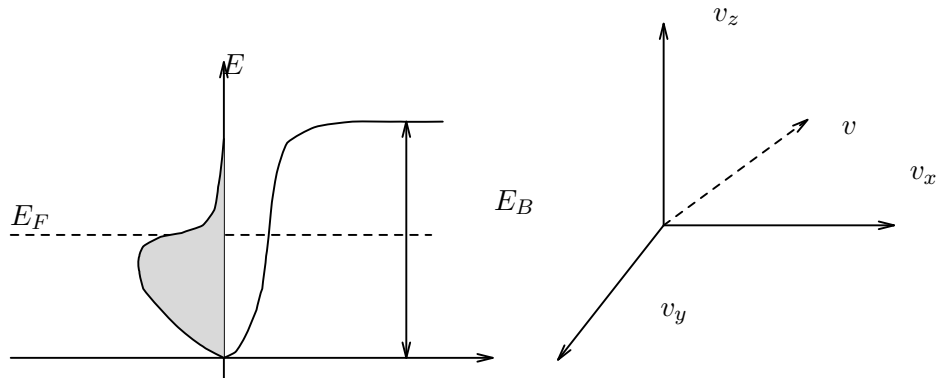


Figura 2.12: Effetto termoelettronico e spazio delle velocità.

La concentrazione degli elettroni dn_E la cui energia è compresa tra E e $E + dE$ si esprime nella forma

$$dn_E = \rho(E) dE = N(E) f(E) dE = \frac{4\pi}{h^3} (2m)^{\frac{3}{2}} \frac{E^{\frac{1}{2}} dE}{1 + e^{\frac{E-E_F}{kT}}}$$

Poiché

$$E = \frac{1}{2} m v^2; \quad \sqrt{E} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{m} v; \quad \frac{dE}{dv} = m v$$

si ha

$$\begin{aligned} dn_E &= \rho(E) dE = \frac{4\pi}{h^3} (2m)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{m} m v^2 dv \frac{1}{1 + e^{\frac{E-E_F}{kT}}} \\ &= \frac{8\pi m^3}{h^3} \frac{v^2}{1 + e^{\frac{E-E_F}{kT}}} dv \end{aligned}$$

la densità di corrente degli elettroni la cui energia è compresa tra E e $E + dE$ è $dJ_x = qv_x(E) dn_E$ ⁵, quindi la densità di corrente totale è quella relativa a tutti gli elettroni con energia superiore alla barriera di potenziale $E_B = E_F + q\Phi_M$, cioè con velocità superiore a $v_x(E_B) = v_1 = \sqrt{\frac{2E_B}{m}}$ ($v_1 \leq v_x \leq \infty$). v_1 rappresenta la velocità a un'energia pari a E_B entro il metallo (nel vuoto tale velocità sarebbe nulla).

Per quanto concerne le altre due componenti della velocità, gli elettroni emessi possono invece assumere qualunque valore. In altri termini si deve contare il contributo alla corrente degli elettroni che nello spazio delle velocità appartengono a un volume elementare, e integrare questo contributo sui valori velocità ammessi per l'emissione. Nello spazio delle velocità il volume della sfera di raggio v vale $\frac{4}{3} \pi v^3$; differenziando si ottiene il volume elementare

$$4\pi v^2 dv = dv_x dv_y dv_z \rightarrow v^2 dv = \frac{1}{4\pi} dv_x dv_y dv_z$$

L'integrale che fornisce la corrente è pertanto

$$J_x = \int_{v_1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2m^3}{h^3} \frac{q v_x}{1 + e^{\frac{E-E_F}{kT}}} dv_x dv_y dv_z$$

Dato che si considerano elettroni per cui $E - E_F \gg kT$, si può sostituire la distribuzione di Fermi con la distribuzione di Boltzmann

$$\begin{aligned} J_x &= \int_{v_1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2m^3 q}{h^3} v_x e^{-\frac{E-E_F}{kT}} dv_x dv_y dv_z \\ J_x &= \frac{2m^3 q}{h^3} e^{\frac{E_F}{kT}} \int_{v_1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v_x e^{-\frac{E}{kT}} dv_x dv_y dv_z \end{aligned}$$

Dato che $E = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{2m^3 q}{h^3} e^{\frac{E_F}{kT}} \int_{v_1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v_x e^{-\frac{m v_x^2}{2kT}} e^{-\frac{m v_y^2}{2kT}} e^{-\frac{m v_z^2}{2kT}} dv_x dv_y dv_z \\ J_x &= \frac{2m^3 q}{h^3} e^{\frac{E_F}{kT}} \int_{v_1}^{\infty} v_x e^{-\frac{m v_x^2}{2kT}} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m v_y^2}{2kT}} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m v_z^2}{2kT}} dv_z \end{aligned}$$

⁵ v_x, v_y, v_z rappresentano le componenti della velocità degli elettroni nel metallo e sono funzioni dell'energia E . L'asse x è quello con direzione anodo - catodo, quindi l'asse della corrente.

Gli ultimi due integrali valgono

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m v_y^2}{2kT}} dv_y = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m v_z^2}{2kT}} dv_z = \sqrt{\frac{2\pi kT}{m}}$$

Il primo integrale si calcola con il cambio di variabile $v_x^2 = w$, da cui $dw = 2v_x dv_x$

$$\begin{aligned} \int_{v_1}^{\infty} v_x e^{-\frac{m v_x^2}{2kT}} dv_x &= \int_{v_1^2}^{\infty} \frac{e^{-\frac{m w}{2kT}}}{2} dw = -\frac{kT}{m} e^{-\frac{m w}{2kT}} \Big|_{v_1^2}^{\infty} = \\ &= \frac{kT}{m} e^{-\frac{m v_1^2}{2kT}} = \frac{kT}{m} \cdot e^{-\frac{E_B}{kT}} \end{aligned}$$

dato che $v_1 = \sqrt{2E_B/m}$.

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{2m^3 q}{h^3} e^{\frac{E_F}{kT}} \frac{2\pi kT}{m} \frac{kT}{m} e^{-\frac{E_F + q\Phi_M}{kT}} = \frac{4\pi m q}{h^3} (kT)^2 e^{-\frac{q\Phi_M}{kT}} \\ &= A_0 T^2 e^{-\frac{q\Phi_M}{kT}} \\ A_0 &= \frac{4\pi m q k^2}{h^3} = \frac{4 \times 3,1415 \times 9,1 \cdot 10^{-31} \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times 1,38^2 \cdot 10^{-46}}{6,62^3 \cdot 10^{-102}} \\ &= 120 \cdot 10^4 \text{ A m}^{-2} \text{ K}^{-2} \end{aligned}$$

2.2.2

Si abbia un catodo di tungsteno con area emittente 10 mm^2 . a) Si calcoli la corrente emessa nel vuoto per effetto termoelettronico alla temperatura di 2000 K . b) Di quanto aumenta percentualmente la corrente per un'aumento di 300 K ? c) Di quanto deve aumentare la temperatura perché raddoppi la corrente?

2.2.3

Si utilizza il fenomeno della fotoemissione per la determinazione sperimentale del lavoro di estrazione di un metallo.

Il metallo di cui si vuole determinare il lavoro di estrazione viene posto come catodo in un tubo a vuoto e sottoposto a una radiazione monocromatica. Applicata una differenza di potenziale tra anodo e catodo si misura la corrente emessa dal metallo al variare della frequenza della radiazione luminosa con la quale si colpisce il catodo. La corrente emessa in funzione della frequenza del fotone incidente, presenta un'andamento a gradino, dovuto al fatto che non appena l'energia dei fotoni diventa inferiore all'energia necessaria a un elettrone (dotato di energia pari a E_F) per abbandonare il metallo, la popolazione che contribuisce all'emissione diminuisce in modo molto brusco (alla temperatura ambiente).

Per verificare tali asserzioni si calcolino, nel caso del platino metallico, le densità elettroniche n_1 e n_2 (che sono eccitate dalla radiazione luminosa) per due frequenze la prima corrispondente ad un'energia pari al lavoro di estrazione $q\Phi_M$ e la seconda di $0,2 \text{ eV}$ più piccola.

Per i dati relativi al platino metallico si usano i risultati del problema 2.1.6.

	Energia E	frequenza $f = E/h$	lung. d'onda $\lambda = c/f$
$E_1 = q\Phi_M$	$5,75 \text{ eV}$	$1,3885 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$	$2,1607 \cdot 10^{-7} \text{ m}$
$E_2 = q\Phi_M - 0,2$	$5,55 \text{ eV}$	$1,3402 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$	$2,2385 \cdot 10^{-7} \text{ m}$

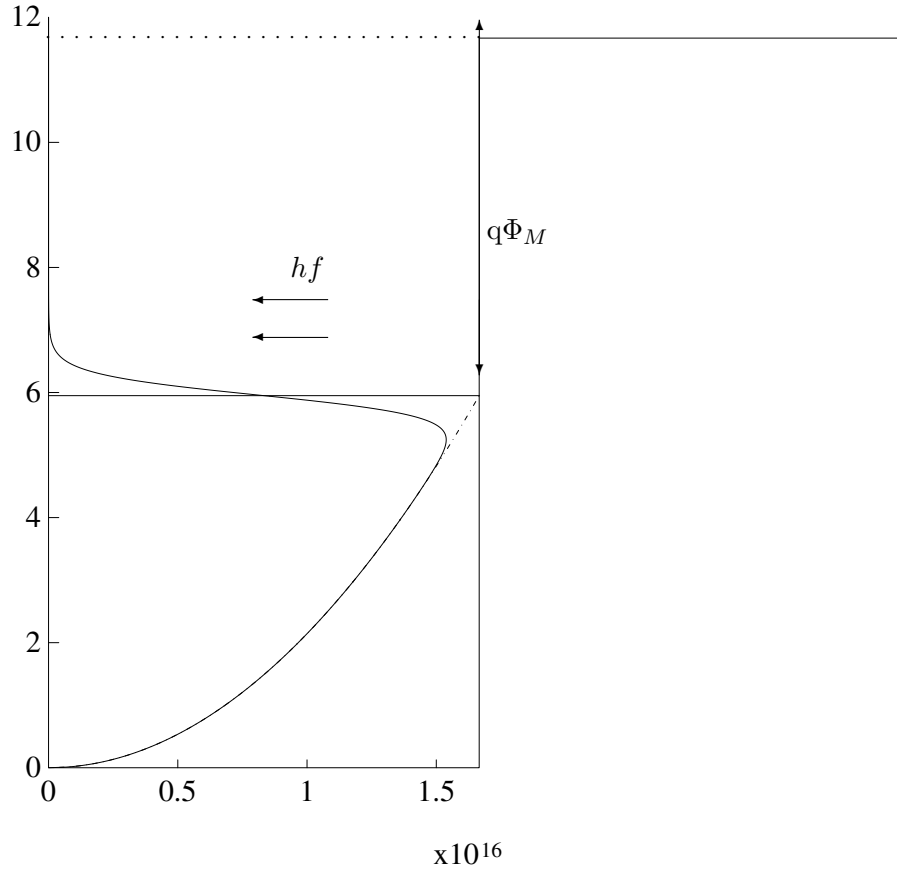


Figura 2.13: Fotoemissione: distribuzione degli elettroni interessati alla radiazione luminosa.

Si tratta di due frequenze nell'ultravioletto lontano. Per calcolare le due densità di elettroni emessi: n_1 e n_2 , si possono contare tutti gli elettroni la cui energia sia superiore alla energia della barriera meno l'energia del fotone: $n_1 = n(E > E_B - E_1)$ e $n_2 = n(E > E_B - E_2)$. Si ricorda che nel platino è (problema 2.1.6) $E_F = 5,95$ eV e la barriera di potenziale vale $E_B = E_F + q\Phi_M = 5,95 + 5,75 = 11,7$ eV. Dato che la funzione distribuzione degli elettroni decresce assai rapidamente con l'energia l'estremo superiore a cui limitare il computo degli elettroni può essere fissato a E_B .

$$n_1 = \int_{E_B - E_1}^{E_B} dn_E = \int_{E_B - E_1}^{E_B - E_2} \gamma E^{\frac{1}{2}} f(E) dE + \int_{E_B - E_2}^{E_B} \gamma E^{\frac{1}{2}} f(E) dE$$

$$n_1 = \int_{E_F}^{E_F + 0,2\text{eV}} \gamma E^{\frac{1}{2}} f(E) dE + \int_{E_F + 0,2\text{eV}}^{E_B} \gamma E^{\frac{1}{2}} f(E) dE$$

$$n_2 = \int_{E_B - E_2}^{E_B} \gamma E^{\frac{1}{2}} f(E) dE = \int_{E_F + 0,2\text{eV}}^{E_B} \gamma E^{\frac{1}{2}} f(E) dE$$

$$n_1 = \int_{5,95}^{6,15} \gamma E^{\frac{1}{2}} f(E) dE + n_2 ; \quad n_2 = \int_{6,15}^{11,7} \gamma E^{\frac{1}{2}} f(E) dE$$

Si usano i metodi illustrati in appendice per calcolare gli integrali⁶

$$\int_{5,95}^{6,15} \gamma E^{\frac{1}{2}} f(E) dE = 2,43 \cdot 10^{26} \text{ m}^{-3}$$

$$\int_{6,15}^{11,7} \gamma E^{\frac{1}{2}} f(E) dE = 9,8 \cdot 10^{22} \text{ m}^{-3}$$

$$\frac{n_1}{n_2} = 2,48 \cdot 10^3$$

2.2.4

Si vuole stimare il valore del lavoro di estrazione in un metallo usando il metodo di “emissione a catodo freddo”. In questo metodo, il metallo di cui si vuole misurare $q\Phi_M$, è il catodo di un diodo a vuoto. Tra il catodo, mantenuto a temperatura ambiente, e l'anodo viene applicata un'elevata differenza di potenziale V_a . Dai valori della tensione applicata, e della corrente emessa per effetto tunnel, valutata in modo approssimato per $E = E_F$, è possibile calcolare il valore del lavoro di estrazione

Suggerimento: Si individui la forma della barriera di potenziale sul catodo. Si usi il risultato (??) del capitolo 1 per calcolare la probabilità di attraversamento della barriera per effetto tunnel. Si leghi, a meno di un fattore di proporzionalità, tale probabilità alla densità di corrente.

L'energia potenziale alla superficie del metallo viene modificata dalla presenza della tensione V_a tra catodo e anodo, separati da una distanza d . Nasce un campo elettrico, $\mathcal{E} = V_a/d$; l'energia potenziale $U(x)$ ha pertanto un andamento lineare decrescente, con valore massimo E_B (in $x = 0$), a un'energia $q\Phi_M$ sopra il livello di Fermi E_F . Si desidera calcolare la corrente di emissione per effetto tunnel attraverso la barriera che si forma sulla superficie del metallo del catodo. Per ogni valore di energia si ha un contributo alla corrente.

Se si considera però la distribuzione degli elettroni e la si affianca all'andamento dell'energia potenziale (fig. 2.14), appare evidente che per energie superiori a E_F il numero degli elettroni risulta trascurabile. D'altra parte per energie inferiori all'allargarsi della barriera il coefficiente di trasmissione per effetto tunnel si riduce molto rapidamente. È pertanto giustificabile l'approssimazione di considerare la sola emissione per $E = E_F$. Per calcolare la corrente di emissione per effetto tunnel: $J \propto N(E_F) F(E_F) T(E_F)$, si usa il metodo approssimato detto “WKB” (si veda il capitolo 1)

$$T(E) = \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_0^d \{2m(U(x) - E)\}^{\frac{1}{2}} dx \right]$$

Per calcolare $T(E_F)$ è necessario esprimere l'energia potenziale, riferendola a $E = E_F$, dove la barriera è larga l

$$U(x) - E_F = q\Phi_M - \frac{q\Phi_M}{l} x = q\Phi_M \left(1 - \frac{x}{l} \right) \text{ dove :}$$

$$\mathcal{E} = \frac{\Phi_M}{l} = \frac{V_a}{d}$$

⁶Il secondo integrale è di difficile valutazione dato che l'integranda tende ad annullarsi rapidamente. È sufficiente limitare l'integrale a valori assai minori di 11,7 eV.

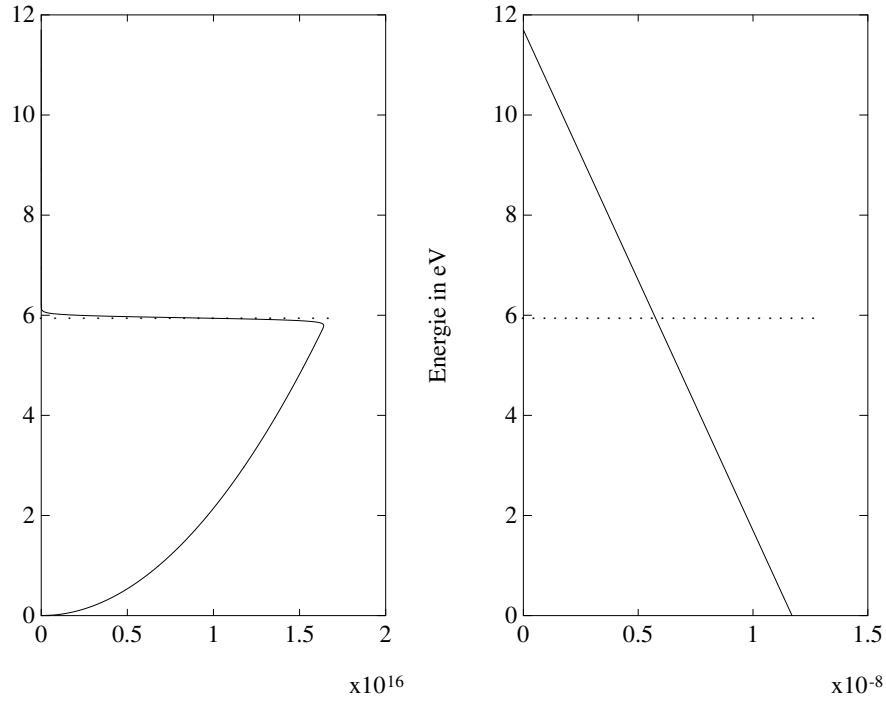


Figura 2.14: Emissione a catodo freddo: $dn(E)/dE$ e barriera di potenziale.

$$\begin{aligned}
 T(E_F) &= \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_0^l \sqrt{2m \left(q\Phi_M \left(1 - \frac{x}{l} \right) \right)} dx \right] \\
 &= \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2mq\Phi_M} \int_0^l \sqrt{\left(1 - \frac{x}{l} \right)} dx \right] \\
 &= \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2mq\Phi_M} \left[-\frac{2}{3} l \left(1 - \frac{x}{l} \right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^l \right] \\
 &= \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2mq\Phi_M} \frac{2}{3} l \right] = \exp \left[-\frac{4}{3\hbar} \sqrt{2mq\Phi_M} l \right] \\
 &= \exp \left[-\frac{4}{3\hbar} \sqrt{2mq\Phi_M} \frac{\Phi_M}{\mathcal{E}} \right] = \exp \left[-\frac{4}{3\hbar} \sqrt{2mq\Phi_M} \frac{\Phi_M}{V_a} d \right]
 \end{aligned}$$

Poiché la densità di corrente emessa è proporzionale a $T(E_F)$, nota J si può dare una stima di $T(E)$ e quindi di $q\Phi_M$.

2.2.5

Si usi il risultato del problema ?? per calcolare, nel caso di un catodo di platino distante 1 mm dall'anodo, cui è applicata la tensione V_a , il coefficiente di trasmissione per effetto tunnel e il numero medio di elettroni emessi ($\propto J_{\text{emiss.}}$). a) $V_a = 10$ kV; b) $V_a = 1000$ kV.

Nel caso del platino è $q\Phi_M = 5,75$ eV, $E_F = 5,98$ eV. La densità di corrente emessa per effetto tunnel è proporzionale al numero medio di elettroni in grado di attraversare la barriera al livello di Fermi: $J_{\text{emiss.}} \propto n \propto N(E_F) f(E_F) T(E_F)$.

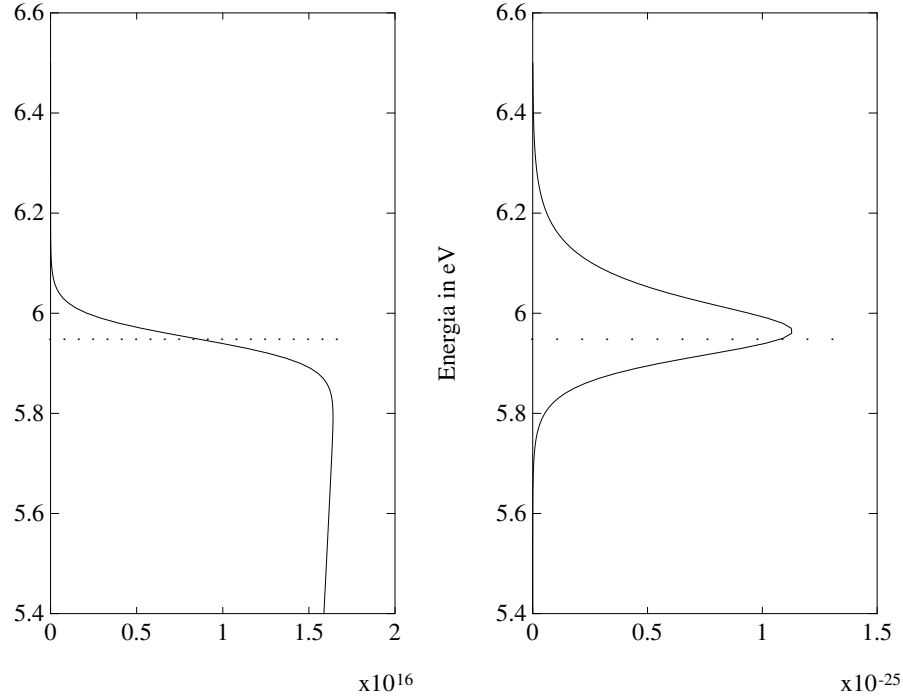


Figura 2.15: Emissione a catodo freddo: $dn(E)/dE$ entro e fuori il metallo.

- a) $d = 1\text{mm}$ e $V_a = 10\text{ kV}$
 $T(E_F) \simeq 0$
- b) $d = 1\text{mm}$ e $V_a = 1000\text{ kV}$
 $T(E_F) = 9,3 \cdot 10^{-42}$

Gli elettroni (per unità di volume) che possono essere emessi entro un intervallo $\Delta E = 0,1\text{ eV}$ sono

$$\begin{aligned}
 \Delta n &= N(E_F) f(E_F) T(E_F) \Delta E = \frac{4\pi}{h^3} (2m^*)^{\frac{3}{2}} E_F^{\frac{1}{2}} T(E_F) \Delta E = \\
 &= \frac{4\pi}{h^3} (2m^*)^{\frac{3}{2}} E_F^{\frac{1}{2}} T(E_F) \Delta E = \\
 &= 1,065 \cdot 10^{56} \times \sqrt{5,98 \times 1,6 \cdot 10^{-19}} \times 9,3 \cdot 10^{-42} \times 0,1 \times 1,6 \cdot 10^{-19} = \\
 &= 1,5 \cdot 10^{-14} \text{ cm}^{-3}
 \end{aligned}$$

2.2.6

Si usi il metodo WKB per comprendere la validità del metodo dell'emissione a catodo freddo per la determinazione della funzione di lavoro. Si trovi l'espressione di $T(E)$ e si calcoli la funzione $dn/dE = N(E) f(E) T(E)$ nel caso dei problemi 2.2.4, 2.2.5, disegnandone l'andamento in funzione dell'energia.

La barriera ha l'espressione

$$U(x) = q\Phi_M \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

Indicando con w la larghezza della barriera all'energia E , si ha

$$w = \frac{q\Phi_M + E_F - E}{q\Phi_M} l$$

per cui $w(E_F) = l$ e $w(E_B = E_F + q\Phi_M) = 0$. Posto per brevità

$$H = \frac{E_F - E}{q\Phi_M} + 1$$

si ottiene

$$\begin{aligned} T(E) &= \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_0^w \{2m(U(x) - E)\}^{\frac{1}{2}} dx \right] \\ &= \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2mq\Phi_M} \int_0^w \sqrt{\left(H - \frac{x}{l}\right)} dx \right] \\ &= \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2mq\Phi_M} \left[-\frac{2}{3} l \left(H - \frac{x}{l}\right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^w \right] \\ &= \exp \left[-\frac{4l}{3\hbar} \sqrt{2mq\Phi_M} \left\{ H^{3/2} - \left(H - \frac{w}{l}\right)^{3/2} \right\} \right] \end{aligned}$$

L'andamento della distribuzione degli elettroni emessi è riportato nella figura 2.15: come si osserva la crescita esponenziale di $T(E)$ e il crollo della distribuzione degli elettroni oltre il livello di Fermi generano una curva assai aguzza per gli elettroni che fuoriescono dal metallo, con massimo per $E \simeq E_F$.

Capitolo 3

Semiconduttori in condizioni di equilibrio

In questo capitolo vengono chiariti gli strumenti di analisi dei semiconduttori, puri e drogati con quantità controllate di impurità. Per motivi di semplicità, si trattano soltanto semiconduttori con drogaggio uniforme e in condizioni di equilibrio termodinamico.

Poiché la conoscenza della densità dei portatori in un semiconduttore (elettroni e lacune) costituisce la base per la caratterizzazione del suo comportamento elettrico, particolare spazio è riservato ai metodi che ne consentono la valutazione.

I concetti di diagramma a bande, distribuzione degli stati, livello di Fermi sono illustrati in esempi numerici approfonditi, prima per i semiconduttori intrinseci, poi per quelli drogati.

Infine viene analizzata l'influenza della concentrazione delle impurità droganti sulla densità dei portatori tenendo conto della temperatura e dei fenomeni di ionizzazione.

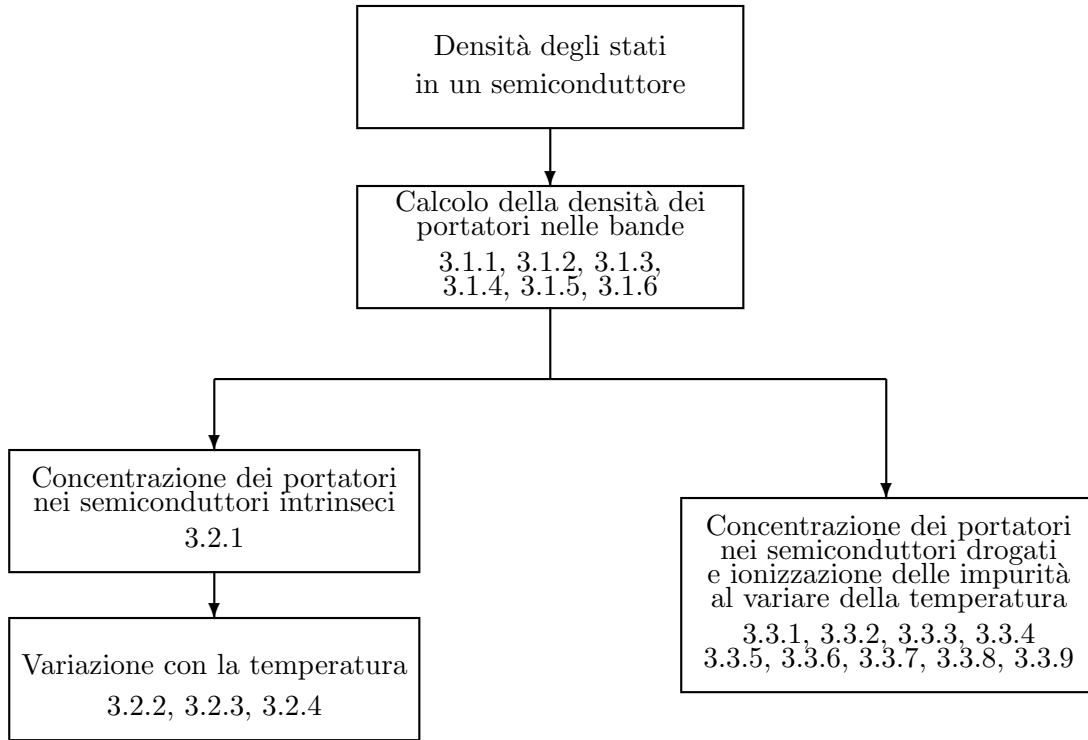


Figura 3.1: Struttura del capitolo 3.

Popolazioni dei portatori nelle bande

Per determinare le densità dei portatori liberi nelle bande di conduzione e di valenza di un semiconduttore si fa ricorso alla distribuzione degli elettroni e delle lacune in funzione dell'energia

$$\frac{dn_E}{dE} = N(E) f(E) \quad ; \quad \frac{dp_E}{dE} = N(E) (1 - f(E))$$

dove n_E e p_E sono i numeri per unità di volume di elettroni e lacune la cui energia è compresa tra E e $E + dE$, $N(E)$ è la densità degli stati e $f(E)$ la probabilità di occupazione di ogni stato per un elettrone.

La popolazione di elettroni associati a valori di energia compresi in un intervallo $[E_1 \div E_2]$ si valuta allora come

$$\Delta n = \int_{E_1}^{E_2} N(E) f(E) dE \quad (3.1)$$

per le lacune, si ha

$$\Delta p = \int_{E_1}^{E_2} N(E) (1 - f(E)) dE \quad (3.2)$$

Integrando la distribuzione degli elettroni nell'intera banda di conduzione ($E \geq E_C$) si ottiene la concentrazione degli elettroni liberi

$$n = \int_{E_C}^{\infty} \frac{dn_E}{dE} dE = \int_{E_C}^{\infty} N(E) f(E) dE$$

integrando nella banda di valenza ($E \leq E_V$) si ha la concentrazione delle lacune libere ¹

$$p = \int_{-\infty}^{E_V} \frac{dn_E}{dE} = \int_{-\infty}^{E_V} N(E)(1 - f(E)) dE$$

Per i singoli termini si possono impiegare le seguenti espressioni.

- Densità degli stati in un semiconduttore:

$$N(E) = \begin{cases} \frac{4\pi}{h^3} (2m_n^*)^{\frac{3}{2}} \sqrt{E - E_C} & E > E_C \\ 0 & E_V \leq E \leq E_C \\ \frac{4\pi}{h^3} (2m_p^*)^{\frac{3}{2}} \sqrt{E_V - E} & E < E_V \end{cases} \quad (3.3)$$

dove m_n^* e m_p^* sono le masse efficaci dell'elettrone e della lacuna, mentre E_C e E_V indicano rispettivamente il bordo inferiore della banda di conduzione e quello superiore della banda di valenza.

- Probabilità di occupazione degli stati

Funzione di probabilità di Fermi-Dirac

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E - E_F}{kT}}} \quad (3.4)$$

Funzione di probabilità di Boltzmann, che può essere usata solo se il semiconduttore non è degenere, cioè per $E - E_F \gg kT$:

$$f(E) = e^{-\frac{E - E_F}{kT}} \quad (3.5)$$

Se il semiconduttore non è degenere l'approssimazione di Boltzmann consente un'integrazione in forma chiusa e si ottiene

- densità degli elettroni liberi in banda di conduzione

$$n = N_C e^{-\frac{E_C - E_F}{kT}} \quad ; \quad N_C = 2 \left(\frac{2m_n^* \pi k T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (3.6)$$

dove la quantità N_C prende il nome di densità efficace degli stati in banda di conduzione.

- densità delle lacune libere in banda di valenza

$$p = N_V e^{-\frac{E_F - E_V}{kT}} \quad ; \quad N_V = 2 \left(\frac{2m_p^* \pi k T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (3.7)$$

dove la quantità N_V prende il nome di densità efficace degli stati in banda di valenza.

Espressioni più generali, valide anche se il semiconduttore è degenere, si basano sulla distribuzione di Fermi-Dirac. Non sono più possibili soluzioni analitiche.

¹L'estremo superiore della banda di conduzione e quello inferiore della banda di valenza non sono infiniti. Le funzioni integrande però decrescono con l'energia con rapidità di tipo esponenziale, pertanto è irrilevante distinguere quei limiti dall'infinito.

- densità degli elettroni liberi in banda di conduzione

$$n = N_C \mathcal{F}_{\frac{1}{2}} \left(\frac{E_F - E_C}{kT} \right) \quad (3.8)$$

$\mathcal{F}_{1/2}(x)$ è la *funzione integrale di Fermi* di ordine $\frac{1}{2}$ e di argomento x , definita come

$$\mathcal{F}_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{y^{\frac{1}{2}}}{e^{y-x} + 1} dy$$

- densità delle lacune libere in bande di valenza

$$p = N_V \mathcal{F}_{\frac{1}{2}} \left(\frac{E_V - E_F}{kT} \right) \quad (3.9)$$

Nel capitolo 2 si sono esaminate approssimazioni della funzione integrale di Fermi-Dirac.

3.1 Concentrazione dei portatori liberi

3.1.1

Si ricavino le espressioni (3.6) e (3.7) per il calcolo delle densità dei portatori in banda di valenza e di conduzione. Inoltre, nell'ipotesi che in un semiconduttore drogato il livello di Fermi valga $E_F = E_C - 0,1 \text{ eV}$, si calcolino le concentrazioni delle lacune e degli elettroni liberi alla temperatura di 300 K e si traccino, in funzione dell'energia, l'andamento di $f(E)$, $N(E)$, $f(E)N(E)$.

La concentrazione degli elettroni in banda di conduzione può essere determinata a partire dalla distribuzione degli stati (3.3) e dalla funzione di Fermi (3.4). Per ogni valore E di energia, $N(E)$ fornisce il numero di stati elettronici ammessi per unità di volume e per unità di intervallo di energia, mentre il prodotto $N(E) dE$ è il numero di stati elettronici per unità di volume nell'intervallo infinitesimo di energia dE e infine il prodotto $f(E) N(E) dE$ è il numero di stati elettronici per unità di volume effettivamente occupato da un elettrone. Per ottenere la densità di elettroni in banda di conduzione (numero di elettroni per unità di volume) è allora sufficiente integrare il prodotto $N(E) f(E) dE$ su tutta l'estensione della banda:

$$n = \int_{E_C}^\infty N(E) f(E) dE$$

Tale integrale non è valutabile che numericamente; tuttavia, nell'ipotesi che il semiconduttore drogato non sia degenere e che quindi il livello inferiore della banda di conduzione E_C sia separato dal livello di Fermi di una quantità pari almeno ad alcune volte il valore kT , una semplice approssimazione permette di ottenere un'espressione analitica. Sotto questa ipotesi, infatti, si ha, per tutto l'intervallo di integrazione,

$$\frac{E - E_C}{kT} \gg 1$$

dunque la distribuzione di Fermi può essere approssimata con quella di Boltzmann

$$f(E) \simeq e^{-\frac{E - E_F}{kT}}$$

Indicando con $\gamma \sqrt{E - E_C}$ la concentrazione degli stati in banda di conduzione, si ha

$$n = \int_{E_C}^{\infty} \gamma (E - E_C)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{E-E_F}{kT}} dE \quad ; \quad \gamma = \frac{4\pi}{h^3} (2m_n^*)^{\frac{3}{2}}$$

$$n = \frac{4\pi}{h^3} (2m_n^*)^{\frac{3}{2}} \int_{E_C}^{\infty} (E - E_C)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{E-E_F}{kT}} dE$$

$$n = \frac{4\pi}{h^3} (2m_n^*)^{\frac{3}{2}} e^{E_F/kT} \int_{E_C}^{\infty} (E - E_C)^{\frac{1}{2}} e^{-E/kT} dE$$

Il cambio di variabile

$$W = E - E_C \Rightarrow \begin{cases} E = E_C & \rightarrow W = 0 \\ E = \infty & \rightarrow W = \infty \end{cases}$$

permette di riscrivere l'equazione in una forma integrale nota ²

$$n = \frac{4\pi}{h^3} (2m_n^*)^{\frac{3}{2}} e^{E_F/kT} \int_0^{\infty} W^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{W+E_C}{kT}} dW$$

$$n = \frac{4\pi}{h^3} (2m_n^*)^{\frac{3}{2}} e^{E_F/kT} e^{-E_C/kT} \int_0^{\infty} W^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{W}{kT}} dW$$

L'espressione risultante per la concentrazione degli elettroni è

$$n = \frac{4\pi}{h^3} (2m_n^*)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{E_F-E_C}{kT}} \frac{\sqrt{\pi}}{2 \left(\frac{1}{kT}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$n = \underbrace{2 \left(\frac{2m_n^* \pi k T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}}}_{N_C} e^{-\frac{E_C-E_F}{kT}} = N_C e^{-\frac{E_C-E_F}{kT}}$$

Con procedura analoga, la concentrazione delle lacune (3.7) si ottiene integrando, all'interno della banda di valenza, il prodotto della concentrazione degli stati per la probabilità che gli stati non siano occupati da elettroni. In questo caso, la densità di probabilità è esprimibile come $(1 - f(E))$, si ha

$$p = \int_{-\infty}^{E_V} N(E) (1 - f(E)) dE = N_V e^{-\frac{E_F-E_V}{kT}}$$

Nel caso $T = 300$ K, le densità efficaci degli stati valgono

$$N_C = 2 \left(\frac{21,089,1 \cdot 10^{-31} \cdot \pi \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{(6,63 \cdot 10^{-34})^2} \right)^{1,5} = 3,22 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$$

$$N_V = 2 \left(\frac{20,819,1 \cdot 10^{-31} \cdot \pi \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \times 300}{(6,63 \cdot 10^{-34})^2} \right)^{1,5} = 1,83 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$$

$$2 \int_0^{\infty} x^{\frac{1}{2}} e^{-x/kT} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2 \left(1/kT\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Infine, si ottengono le concentrazioni di elettroni e lacune, qui calcolate nell'ipotesi $E_F = E_C - 0,1 \text{ eV}$:

$$n = 3,22 \cdot 10^{19} \exp\left(-\frac{0,1}{8,62 \cdot 10^{-5} \times 300}\right) = 6,74 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$$

$$p = 1,83 \cdot 10^{19} \exp\left(-\frac{1,024}{8,62 \cdot 10^{-5} \times 300}\right) = 116 \text{ cm}^{-3}$$

Nella figura 3.2, sono riportati gli andamenti di $N(E)$ e, per la sola banda di conduzione, di $N(E)f(E)$; le funzioni $N(E)$ e $N(E)f(E)$ sono state normalizzate rispetto al loro valore massimo nell'intervallo in esame.

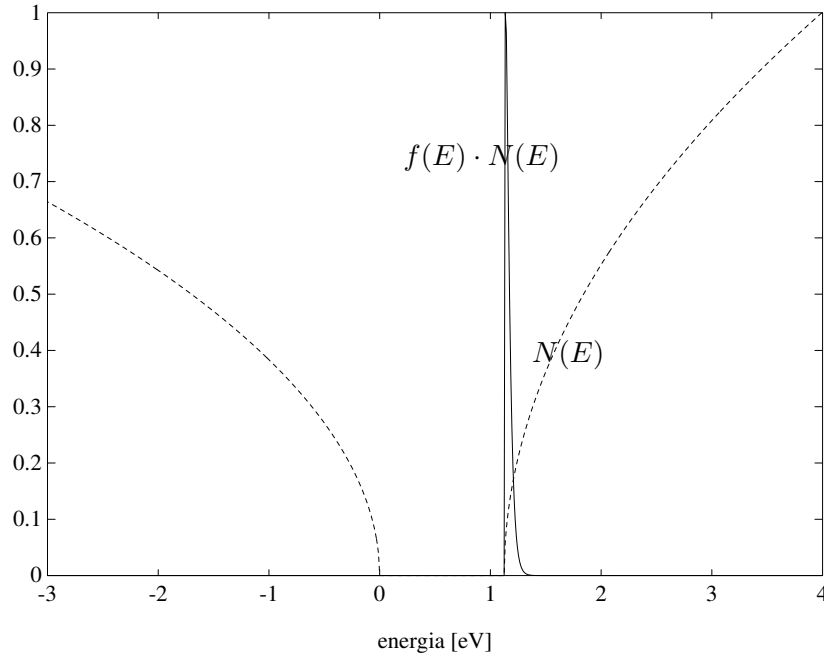


Figura 3.2: Andamento delle funzioni $N(E)$ e $f(E) \cdot N(E)$ normalizzate al loro valore massimo nell'intervallo in esame.

3.1.2

Si desidera verificare l'entità dell'approssimazione introdotta con l'impiego della distribuzione di Boltzmann per determinare la concentrazione dei portatori.

Si disegni l'andamento della concentrazione degli elettroni n in funzione della differenza di energia $E_F - E_C$, ponendo a confronto le varie formule che si possono usare.

Si disegna l'andamento della concentrazione degli elettroni n in funzione della differenza di energia $E_F - E_C$, ponendo a confronto le formule ottenute
a) con l'approssimazione di Boltzmann,

$$n \simeq N_C \exp\left(-\frac{E - E_F}{kT}\right)$$

b) sostituendo alla distribuzione di Boltzmann quella di Fermi-Dirac

$$n \simeq N_C \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right)}$$

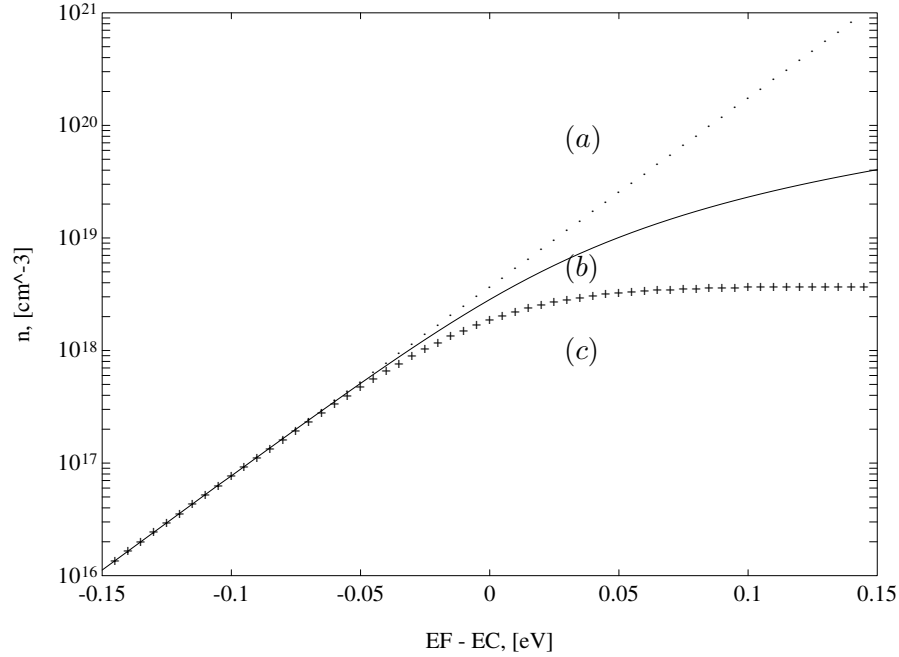


Figura 3.3: Approssimazioni per densità degli elettroni: a) con distribuzione di Boltzmann, b) con distribuzione di Fermi-Dirac e c) con l'integrale di Fermi $\mathcal{F}_{1/2}$.

c) con l'integrale di Fermi $\mathcal{F}_{1/2}$.

$$n = N_C \mathcal{F}_{\frac{1}{2}} \left(\frac{E_F - E_C}{kT} \right)$$

Le curve sono disegnate nel caso $T = 300$ K. Risulta evidente che le approssimazioni a) e b) valgono solo per semiconduttori non degeneri e che sono entrambe approssimazioni per eccesso, con errore inferiore per l'approssimazione b). L'errore aumenta man mano che il livello di Fermi cresce.

3.1.3

È dato un campione di semiconduttore per il quale $E_C - E_F = 0,149$ eV: si chiede di determinare la percentuale di concentrazione di elettroni che alla temperatura di 300 K hanno energia compresa tra E_C , bordo inferiore della banda di conduzione, e $E_C + \Delta E$, con $\Delta E = 0,01$ eV. Inoltre, calcolare a quale temperatura tale percentuale è pari al 10%.

Il numero n_1 di elettroni aventi energia compresa fra E_C e $E_C + 0,01$ eV si valuta risolvendo l'integrale

$$n_1 = \int_{E_C}^{E_C + 0,01} N(E) f(E) dE$$

dove $f(E)$ e $N(E)$ sono date rispettivamente dalle (3.4) e (3.3). Per temperature non troppo elevate, la funzione probabilità di Fermi si può approssimare con quella di Boltzmann. Il cambio di variabile $E - E_C = W$ consente di mettere l'integrale nella

forma

$$n_1 \simeq \gamma \int_{E_C}^{E_C+0,01} (E - E_C)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{E-E_F}{kT}} dE = \gamma e^{-\frac{E_C-E_F}{kT}} \int_0^{0,01} W^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{W}{kT}} dW$$

Il calcolo dell'integrale, effettuato usando le formule di Gauss-Laguerre descritte in appendice, fornisce il valore $n_1 = 1,25 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$. Una stima del valore cercato si può ottenere valutando la funzione integranda nel punto medio W_m dell'intervallo di integrazione e moltiplicandone il valore per l'ampiezza ΔW dell'intervallo:

$$\int_0^{0,01} W^{\frac{1}{2}} e^{-W/kT} dW \simeq W_m^{\frac{1}{2}} e^{-W_m/kT} \Delta W = 5,83 \cdot 10^{-4} \text{ eV}^{\frac{3}{2}}$$

Il valore stimato risulta $n_1 = 1,44 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$, con un errore relativo pari al 15%. Si calcola la densità totale degli elettroni in banda di conduzione n mediante la (3.6) e si trova $n = 1 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ e la percentuale di concentrazione cercata vale

$$\frac{n_1}{n} = \frac{1,44 \cdot 10^{16}}{1 \cdot 10^{17}} = 0,144 \simeq 14,4\%$$

L'andamento della distribuzione degli elettroni in banda di conduzione, per 300, 500 e 1000 gradi Kelvin, è riportato nella figura 3.4. L'effetto della temperatura è inizialmente soltanto quello di modificare la distribuzione degli elettroni, senza alterare il numero totale di portatori; tuttavia, al crescere di T , gli elettroni generati termicamente non sono più trascurabili e l'area sottesa alla curva di distribuzione tende ad aumentare in modo esponenziale. L'espressione che permette di calcolare la frazione di elettroni

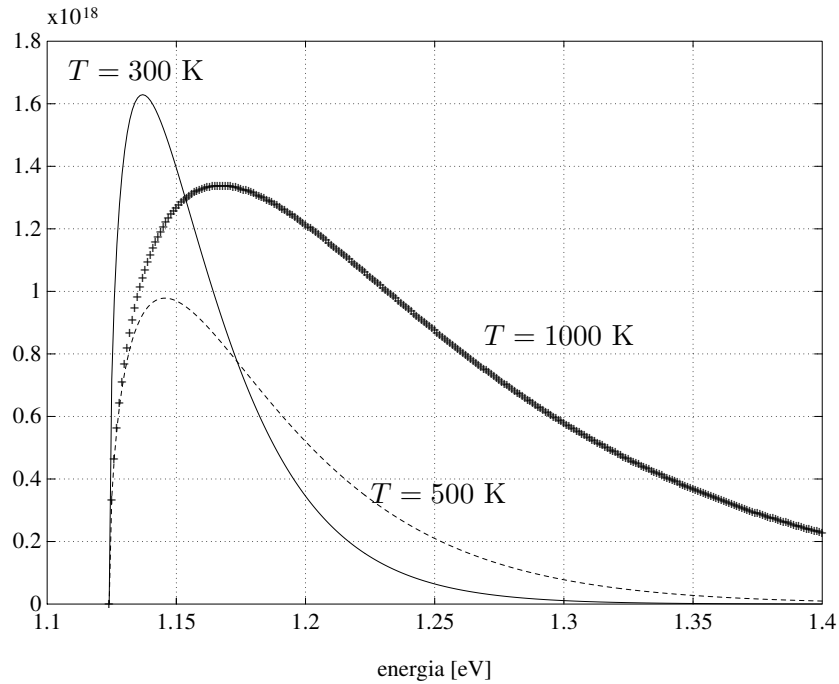


Figura 3.4: Distribuzione degli elettroni in banda di conduzione, per 300, 500 e 1000 Kelvin.

aventi energia compresa tra E_C e $E_C + 0,01$ eV, a una temperatura T , è la seguente ³:

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{n_1}{n} &= \frac{\int_{E_C}^{E_C+0,01} N(E) e^{-\frac{E-E_F}{kT}} dE}{\int_{E_C}^{\infty} N(E) e^{-\frac{E-E_F}{kT}} dE} = \frac{\int_{E_C}^{E_C+0,01} \gamma (E - E_C)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{E-E_F}{kT}} dE}{\int_{E_C}^{\infty} \gamma (E - E_C)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{E-E_F}{kT}} dE} = \\ &= \frac{\gamma e^{-\frac{E_C-E_F}{kT}} \int_0^{0,01\text{eV}} W^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{W}{kT}} dW}{\gamma e^{-\frac{E_C-E_F}{kT}} \int_0^{\infty} W^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{W}{kT}} dW} = \frac{\int_0^{0,01\text{eV}} W^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{W}{kT}} dW}{\int_0^{\infty} W^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{W}{kT}} dW} \end{aligned}$$

Il denominatore si valuta in modo esatto (problema 3.1.1), l'integrale a numeratore si approssima, si può allora scrivere

$$\alpha = \frac{W_m^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{W_m}{kT}} \Delta W}{\frac{\sqrt{\pi}}{2} (kT)^{\frac{3}{2}}}$$

dove $W_m = 0,005$ eV e $\Delta W = 0,01$ eV. Svolgendo i calcoli, si ottiene

$$\alpha = \sqrt{0,005} \frac{0,02}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{0,01}{2kT}}}{(kT)^{\frac{3}{2}}}$$

da cui

$$T = \frac{1}{k} \left(\sqrt{0,005} \frac{0,02}{\sqrt{\pi} \alpha} \right)^{\frac{2}{3}} e^{-\frac{0,01}{3kT}}$$

L'equazione trovata, risolta iterativamente nel caso $\alpha = 0,1$, fornisce il risultato $T = 423$ K. Il grafico riportato nella figura 3.5 è stato ottenuto ricorrendo alle formule di integrazione di Gauss-Laguerre (appendice A); per $\alpha = 0,1$ si ha $T = 358$ K, quindi il risultato approssimato è sovrastimato del 18%.

3.1.4

Si calcoli l'energia media degli elettroni in banda di conduzione a 300 K, per un semiconduttore tale che $E_C - E_F = 0,11$ eV. Si dimostri che, per un semiconduttore non degenero, l'energia media non dipende dal livello di drogaggio e si confronti il valore trovato con l'energia corrispondente al massimo della funzione $N(E)f(E)$.

L'andamento della distribuzione degli elettroni in banda di conduzione per il semiconduttore è mostrato nella figura 3.6. $N(E)f(E)$ è la distribuzione in energia degli elettroni, quindi $N(E)f(E)dE$ è il numero di elettroni con energia E ; l'energia media si valuta con l'espressione

$$E_m = \frac{1}{n} \int_{E_C}^{\infty} E N(E) f(E) dE = \frac{\int_{E_C}^{\infty} E N(E) f(E) dE}{\int_{E_C}^{\infty} N(E) f(E) dE}$$

³Anche qui la funzione distribuzione di Fermi è stata approssimata con quella di Boltzmann: la validità di tale approssimazione può essere provata al termine dell'esercizio, verificando che alla temperatura trovata sia $E_C - E_F \gg kT$.

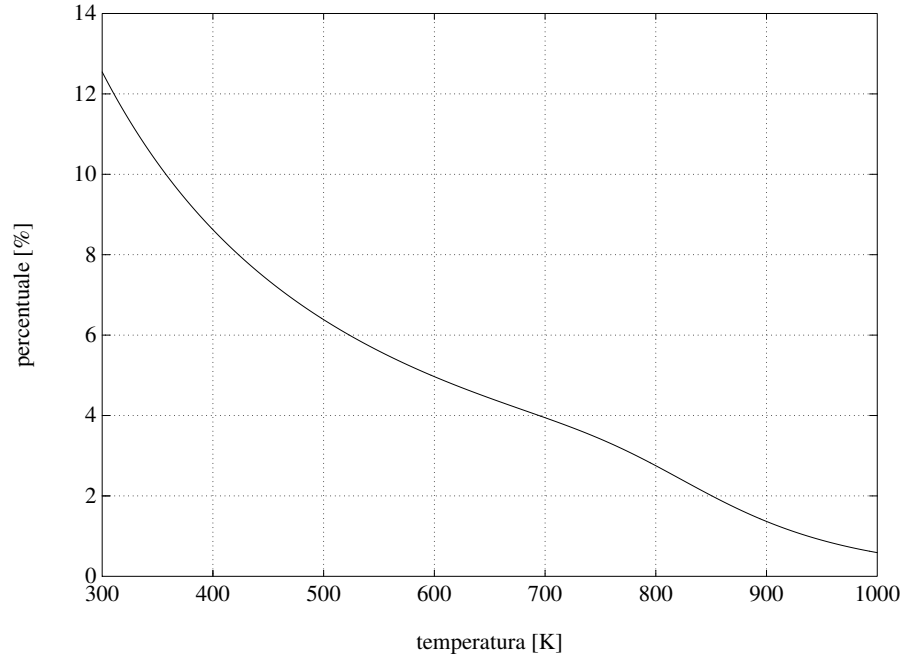


Figura 3.5: Percentuale di elettroni compresi entro 0,01 eV da E_C .

dove n è la concentrazione totale degli elettroni in banda di conduzione. Nell'intervallo di integrazione è $E \gg E_F$, quindi la funzione probabilità di Fermi può essere ben approssimata con quella di Boltzmann; con un cambio di variabile si ottiene

$$E_m = \frac{\gamma e^{-\frac{E_C - E_F}{kT}} \int_0^\infty \left(W^{3/2} e^{-\frac{W}{kT}} + E_C W^{1/2} e^{-\frac{W}{kT}} \right) dW}{\gamma e^{-\frac{E_C - E_F}{kT}} \int_0^\infty W^{1/2} e^{-\frac{W}{kT}} dW}$$

$$E_m = \frac{\int_0^\infty \left(W^{3/2} e^{-\frac{W}{kT}} + E_C W^{1/2} e^{-\frac{W}{kT}} \right) dW}{\int_0^\infty W^{1/2} e^{-\frac{W}{kT}} dW}$$

Poiché scompare la dipendenza da $E_C - E_F$ si può concludere che l'energia media non dipende più dal livello di drogaggio del semiconduttore, purché questo sia non degenere. Risolvendo gli integrali ⁴, si ha

$$E_m = \frac{\left[\frac{3}{4} \sqrt{\pi} (kT)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2} \sqrt{\pi} E_C (kT)^{\frac{3}{2}} \right]}{\frac{1}{2} \sqrt{\pi} (kT)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_m = \frac{2\pi}{(\pi kT)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} (kT)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{3}{2} kT + E_C \right]$$

$$E_m = \frac{3}{2} kT + E_C = 1,16 \text{ eV}$$

Per trovare il valore massimo della funzione distribuzione degli elettroni in funzione dell'energia si pone

$$x = \frac{1}{kT} (E - E_C) \quad ; \quad \alpha = e^{(E_C - E_F)/kT}$$

$${}^4 \int_0^\infty x^{1/2} e^{-ax} dx = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{a^{3/2}} \quad , \quad \int_0^\infty x^{3/2} e^{-ax} dx = \frac{3}{4} \frac{\sqrt{\pi}}{a^{5/2}}$$

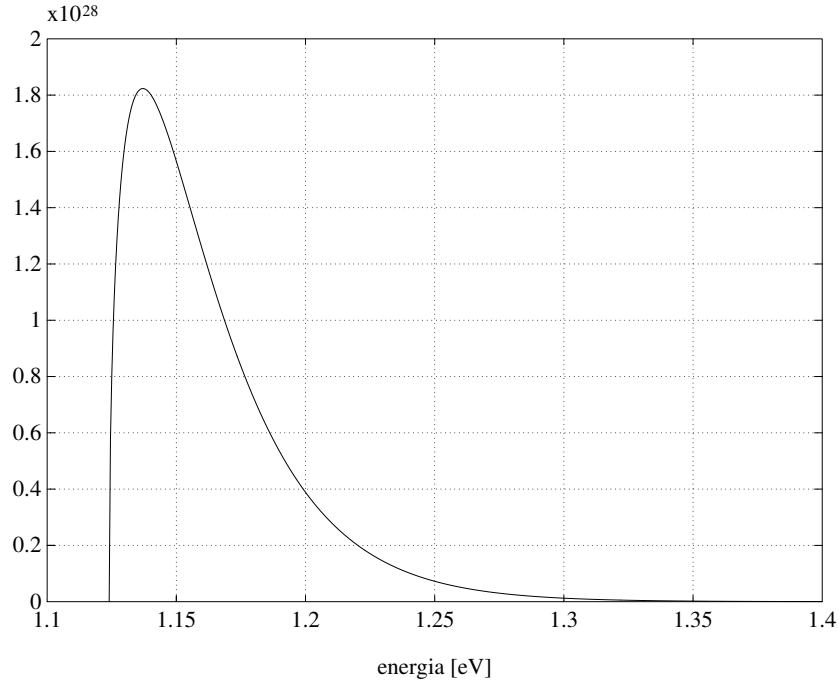


Figura 3.6: Distribuzione degli elettroni in banda di conduzione in cm^{-3} .

e la funzione $N(E)f(E)$ si può riscrivere in funzione di x come

$$F(x) = \gamma \sqrt{kT} \sqrt{x} \frac{1}{1 + \alpha e^x}$$

Per trovare il valore massimo di tale funzione, si annulla la derivata rispetto a x , ottenendo

$$\gamma \sqrt{kT} \left[\frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{1 + \alpha e^x} - \sqrt{x} \frac{\alpha e^x}{(1 + \alpha e^x)^2} \right] = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \frac{\alpha e^x}{1 + \alpha e^x} = 0$$

da cui $x = \ln \left(\frac{1}{2x - 1} \right) - \ln(\alpha)$.

Risolvendo iterativamente tale equazione (appendice A), si trova $x = 0,5043$ e dunque $E - E_C = 0,013 \text{ eV}$ e $E_{\text{max}} = 1,137 \text{ eV}$.

3.1.5

Valutare, per un campione di silicio, la percentuale di elettroni liberi che a 300 K hanno energia entro una fascia di 0,02 eV sopra il minimo della banda di conduzione. A quale temperatura tale percentuale raddoppia?

3.1.6

L'energia media degli elettroni in un campione di silicio è pari a 1,5 eV: calcolare il valore di temperatura corrispondente. È lecito in questo caso approssimare la distribuzione di Fermi con quella di Boltzmann?

3.1.7

Si confrontino al variare della temperatura le distribuzioni di Fermi e Boltzmann. Entro quali condizioni di energia e temperatura la distribuzione di Fermi può essere approssimata con quella di Boltzmann commettendo un errore inferiore al 10%?

3.2 Semiconduttori intrinseci

Livello di Fermi di un semiconduttore intrinseco

$$E_{Fi} = \frac{E_C + E_V}{2} - \frac{kT}{2} \ln \frac{N_C}{N_V}$$

Se $N_C \simeq N_V$ è

$$E_{Fi} \simeq \frac{E_C + E_V}{2}$$

dunque il livello di Fermi del semiconduttore intrinseco si trova *approssimativamente* al centro della banda proibita

Legge dell'azione di massa:

$$np = n_i^2 \quad (3.10)$$

dove n_i^2 è la concentrazione dei portatori in un semiconduttore intrinseco, valutabile come

$$n_i^2 = 4 \left(\frac{2\pi m_0 k}{h^2} \right)^3 \left(\frac{m_n^* m_p^*}{m_0^2} \right)^{\frac{3}{2}} T^3 e^{-\frac{E_g}{kT}} \quad (3.11)$$

m_0 è la massa a riposo dell'elettrone. Le *equazioni di Shockley* mostrano in modo esplicito come entrambe le concentrazioni degli elettroni e delle lacune dipendano esponenzialmente dalla distanza in energia tra il livello di Fermi e il livello intrinseco:

$$\begin{cases} n = n_i \exp\left(\frac{E_F - E_{Fi}}{kT}\right) \\ p = p_i \exp\left(\frac{E_{Fi} - E_F}{kT}\right) \end{cases}$$

3.2.1

Ricavare le equazioni di Shockley, a partire dalle (3.6) e (3.7).

Le relazioni che forniscono le concentrazioni dei portatori nelle bande di conduzione e di valenza, ricavate sotto l'ipotesi che il semiconduttore non sia degenere, possono essere usate per determinare la posizione del livello di Fermi, quando sia nota la concentrazione di impurità droganti. Infatti, nell'ipotesi di completa ionizzazione, le (3.6) e (3.7) possono essere riscritte come

$$E_F = E_C - kT \ln \frac{N_C}{n} = E_C - kT \ln \frac{N_C}{N_d} \quad (3.12)$$

per un semiconduttore di tipo n e

$$E_F = E_V + kT \ln \frac{N_V}{p} = E_V + kT \ln \frac{N_V}{N_a} \quad (3.13)$$

per un semiconduttore di tipo p . Facendo ricorso alla legge di azione di massa (3.10), la posizione del livello di Fermi si può esprimere in funzione della concentrazione dei portatori intrinseci n_i e del livello di Fermi intrinseco E_i :

$$n_i^2 = n p = N_C e^{-\frac{E_C - E_F}{kT}} N_V e^{-\frac{E_F - E_V}{kT}} = N_C N_V e^{-\frac{E_C - E_V}{kT}}$$

$$n_i^2 = N_C N_V e^{-\frac{E_g}{kT}} \quad ; \quad n_i = \sqrt{N_C N_V} e^{-\frac{E_g}{2kT}}$$

Le equazioni (3.6) e (3.7) per un semiconduttore non drogato, diventano:

$$n_i = p_i = N_C \exp\left(-\frac{E_C - E_i}{kT}\right) = N_V \exp\left(-\frac{E_i - E_V}{kT}\right) \quad (3.14)$$

Si ricavano allora N_C dalla (3.6) e N_V dalla (3.7)

$$N_C = n \exp\left(\frac{E_C - E_F}{kT}\right) \quad ; \quad N_V = p \exp\left(\frac{E_F - E_V}{kT}\right)$$

e si sostituiscono nella (3.14), ottenendo

$$n_i = n \exp\left(\frac{E_C - E_F}{kT}\right) \exp\left(-\frac{E_C - E_i}{kT}\right) = n \exp\left(-\frac{E_F - E_i}{kT}\right)$$

$$n = n_i \exp\left(\frac{E_F - E_i}{kT}\right) \quad (3.15)$$

per la concentrazione degli elettroni; per le lacune si ha invece

$$n_i = p \exp\left(\frac{E_F - E_V}{kT}\right) \exp\left(-\frac{E_i - E_V}{kT}\right)$$

$$p = n_i \exp\left(\frac{E_i - E_F}{kT}\right) \quad (3.16)$$

Le (3.15) e (3.16) prendono il nome di equazioni di Shockley; esse consentono di valutare E_F rispetto a E_i per un semiconduttore, nella seguente forma

$$E_i - E_F = kT \ln \frac{p}{n_i} \quad ; \quad E_F - E_i = kT \ln \frac{n}{n_i}$$

3.2.2

Si ricavi un'espressione che consenta di determinare il valore dell'energia di Fermi in un semiconduttore intrinseco; si valuti inoltre l'errore percentuale che si compie assumendo per tale energia il valore $\frac{1}{2}(E_C + E_V)$ a 300 K e a 600 K nel silicio.

In un semiconduttore non drogato, la concentrazione di elettroni in banda di conduzione è eguale a quella delle lacune in banda di valenza: dalle (3.6) e (3.7) si può quindi scrivere

$$N_C e^{-\frac{E_C - E_i}{kT}} = N_V e^{-\frac{E_i - E_V}{kT}}$$

$$\frac{-(E_C - E_i)}{kT} = \ln \frac{N_V}{N_C} + \frac{-(E_i - E_V)}{kT}$$

$$2 E_i = kT \ln \frac{N_V}{N_C} + E_C + E_V$$

$$E_i = \frac{1}{2} kT \ln \frac{N_V}{N_C} + \frac{E_C + E_V}{2}$$

Sostituendo N_C e N_V con le espressioni date nelle (3.6) e (3.7), si ottiene

$$E_i = \frac{E_C + E_V}{2} + \Delta E_i \quad ; \quad \Delta E_i = \frac{3}{4} kT \ln \frac{m_p^*}{m_n^*}$$

Il livello E_i riferito al bordo della banda di valenza vale

$$E_i - E_V = \frac{E_C - E_V}{2} + \Delta E_i = \frac{E_g}{2} + \Delta E_i$$

Nel caso numerico richiesto, si ha

$$\begin{aligned} m_p^* &= 0,81 m_0 & ; & & m_n^* &= 1,08 m_0 \\ E_g &= 1,12 \text{ eV} \big|_{300 \text{ K}} & ; & & E_g &= 0,97 \text{ eV} \big|_{600 \text{ K}} \end{aligned}$$

T [K]	ΔE_i [eV]	$\Delta E_i/E_g$
300	$5,6 \cdot 10^{-3}$	0,5%
600	$1,12 \cdot 10^{-2}$	1,15%

3.2.3

Confrontare i livelli di concentrazione dei portatori intrinseci di silicio, di germanio e di arseniuro di gallio, a 300, 500 e 1000 gradi Kelvin.

3.2.4

Usando la (3.11), tracciare l'andamento della concentrazione dei portatori intrinseci nel silicio da 0°C a 1000°C.

3.3 Ionizzazione delle impurità droganti e semiconduttori drogati

- L'introduzione di atomi droganti nel semiconduttore comporta la nascita di livelli energetici nella banda proibita la cui densità degli stati è

$$\text{tipo n:} \quad N(E) = N_d \delta(E - E_d) \quad (3.17)$$

$$\text{tipo p:} \quad N(E) = N_a \delta(E - E_a) \quad (3.18)$$

dove $\delta(E - E^\circ)$ è la delta di Dirac centrata intorno al valore E° , N_d e N_a sono le concentrazioni di atomi donatori e accettori, E_d e E_a dipendono dalle energie di attivazione delle impurità droganti.

- La probabilità di occupazione degli stati legati ad atomi di impurità ⁵:

$$f_i(E) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}e^{\frac{E-E_F}{kT}}} \quad (3.19)$$

- Concentrazioni di elettroni e lacune derivanti dalle impurità ionizzate:

$$N_d^+ = \frac{N_d}{1 + 2e^{\frac{E_F-E_d}{kT}}} \quad ; \quad N_a^- = \frac{N_a}{1 + 2e^{\frac{E_a-E_F}{kT}}}$$

- Condizione di neutralità:

$$N_d^+ + p = N_a^- + n \quad (3.20)$$

3.3.1

Si scriva l'espressione dei donatori N_d^+ e accettori N_a^- ionizzati in un semiconduttore e si stabilisca la condizione per una completa ionizzazione.

La densità degli elettroni intrappolati nel livello dei donatori è data da

$$n_d = \frac{N_d}{1 + \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{E_d-E_F}{kT}}}$$

e il numero degli elettroni che si sono liberati per andare in banda di conduzione è

$$N_d - n_d = N_d^+ = \frac{N_d}{1 + 2 \cdot e^{\frac{E_F-E_d}{kT}}}$$

Affinché sia $N_d \simeq N_d^+$ occorre che l'esponentiale al denominatore sia trascurabile, cioè l'esponente deve essere negativo

$$E_d > E_F$$

e abbastanza grande ($E_d - E_F \gg kT$).

Analogamente per le lacune risulta

$$N_a^- = \frac{N_a}{1 + 2 \cdot e^{\frac{E_a-E_F}{kT}}}$$

Affinché sia $N_a \simeq N_a^-$ occorre che l'esponentiale al denominatore sia trascurabile, cioè l'esponente deve essere negativo

$$E_a < E_F$$

e abbastanza grande ($E_F - E_a \gg kT$).

In conclusione solo se il livello di Fermi dista dalla banda corrispondente agli atomi droganti di almeno alcune volte kT , si può sperare di avere una ionizzazione quasi completa. Quindi per drogaggi elevati (per esempio in semiconduttori degeneri) in cui il livello di Fermi si avvicina alla banda dei portatori maggioritari (sino ad entrarvi) le impurità sono solo parzialmente ionizzate.

⁵Il fattore $1/2$ nella formula della probabilità di Fermi è dovuto al fatto che ogni livello E_d per ogni atomo può essere occupato da due elettroni con spin opposto.

3.3.2

Si consideri un campione di silicio drogato di tipo n in cui i donatori hanno concentrazione N_d ed E_d è il loro livello energetico.

1. Ricavare l'espressione della concentrazione degli atomi donatori ionizzati.
2. Scrivere un'equazione che consenta di calcolare il livello di Fermi. Entro quale intervallo si trova E_F per $T \rightarrow 0$ K?
3. Calcolare il livello di Fermi per $T = 300$ K, per un drogaggio $N_d = 1 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ con donatori il cui livello è situato 0,14 eV sotto la banda di conduzione.
4. Si disegni in scala la curva $E_F = f(T)$.

a)

La concentrazione degli atomi droganti ionizzati si ottiene dalla densità degli stati nell'intorno di $E = E_d$,

$$g_d(E) = N_d \delta(E - E_d)$$

e dalla distribuzione di Fermi,

$$f_d(E) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} e^{\frac{E - E_F}{kT}}}$$

integrando su un intervallo di valori di energia che comprenda E_d il prodotto della densità degli stati per la probabilità che ogni atomo sia ionizzato, ovvero che gli stati corrispondenti non siano occupati da elettroni:

$$\begin{aligned} N_d^+ &= \int_{E_d - \Delta E}^{E_d + \Delta E} g_d(E) [1 - f_d(E)] dE = N_d [1 - f_d(E_d)] = \\ &= N_d \frac{1 + \frac{1}{2} e^{\frac{E_d - E_F}{kT}} - 1}{1 + \frac{1}{2} e^{\frac{E_d - E_F}{kT}}} = \frac{N_d}{1 + 2 e^{\frac{E_F - E_d}{kT}}} \end{aligned}$$

b)

Sostituendo nella condizione di neutralità per un semiconduttore di tipo n ,

$$n = N_d^+ + p$$

le espressioni per n , p e N_d^+ si ha

$$N_C e^{-\frac{E_C - E_F}{kT}} = \frac{N_d}{1 + 2 e^{\frac{E_F - E_d}{kT}}} + N_V e^{\frac{E_V - E_F}{kT}}$$

Supponendo che il semiconduttore non sia degenere, deve essere $E_C > E_F$: dunque, per temperature prossime a zero, l'esponente a primo membro tende a valori negativi molto grandi e l'esponenziale è trascurabile. Analogamente, risulta $E_V < E_F$ e la concentrazione delle lacune a secondo membro si annulla quando T tende a 0. Affinché anche la concentrazione degli atomi ionizzati N_d^+ si annulli, per $T \rightarrow 0$ K deve essere $E_d < E_F < E_C$.

c)

Il valore cercato del livello di Fermi si può ottenere scrivendo l'equazione nella forma di un processo iterativo a punto fisso:

$$E_F = E_C + kT \ln \left[\frac{1}{N_C} \left(\frac{N_d}{1 + 2e^{\frac{E_F - E_d}{kT}}} + N_V e^{\frac{E_V - E_F}{kT}} \right) \right]$$

Usando i dati $N_C = 2,8 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$, $N_V = 1,04 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$, $N_d = 1 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$, $E_C = 1,124 \text{ eV}$, $E_d = 0,984 \text{ eV}$, $E_V = 0 \text{ eV}$, $T = 300 \text{ K}$, la soluzione si ha con 10 iterazioni e si trova $E_F - E_V = 0,9152 \text{ eV}$.

Si confronta ora il risultato ottenuto con quello che si troverebbe assumendo la completa ionizzazione delle impurità droganti: la (3.6) dà come risultato

$$E_F \simeq E_C - kT \ln \left(\frac{N_C}{N_d} \right) = 1,124 - 0,026 \ln \left(\frac{2,8 \cdot 10^{19}}{10^{16}} \right) = 0,9176 \text{ eV}$$

L'errore commesso risulta inferiore a 2,5 meV.

d)

L'andamento del livello di Fermi al variare della temperatura, ottenuto risolvendo l'equazione precedente per differenti valori di T , è riportato nella figura 3.7.

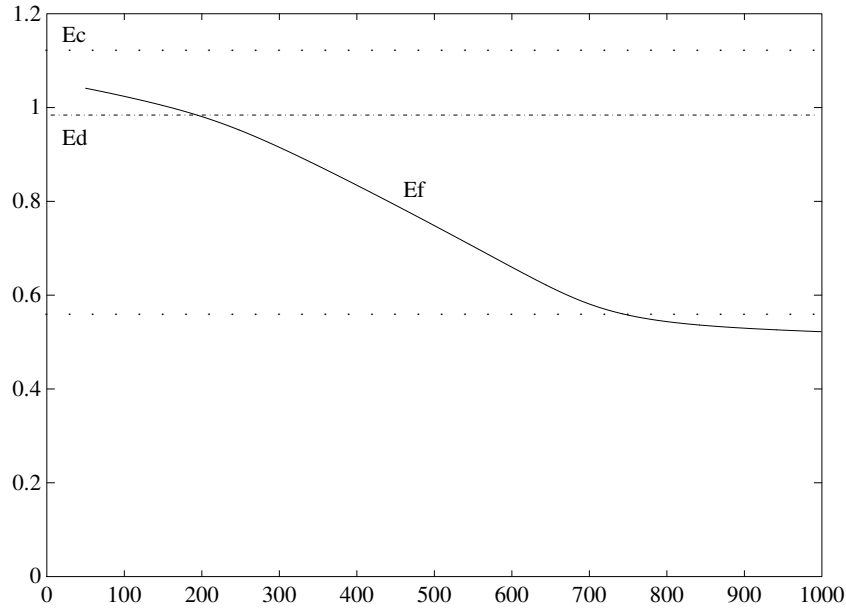


Figura 3.7: Andamento di E_F con la temperatura.

Si noti come in realtà, al crescere della temperatura l'ampiezza dell'intervallo di energia proibita, E_g , si riduca; il fenomeno, su un'escursione di temperatura così ampio, non è irrilevante. Nel caso del silicio si ha

$$E_g(T) = E_g(0) - \frac{\alpha T^2}{T + \beta}$$

dove $\alpha = 7,02 \cdot 10^{-4} \text{ eVK}^{-1}$, $\beta = 1108 \text{ K}$ e $E_g(0) = 1,16 \text{ eV}$. Scegliendo come livello di riferimento a energia nulla quello di mezzo della banda proibita, si ottiene l'andamento di E_F al variare di T riportato nella figura 3.8.

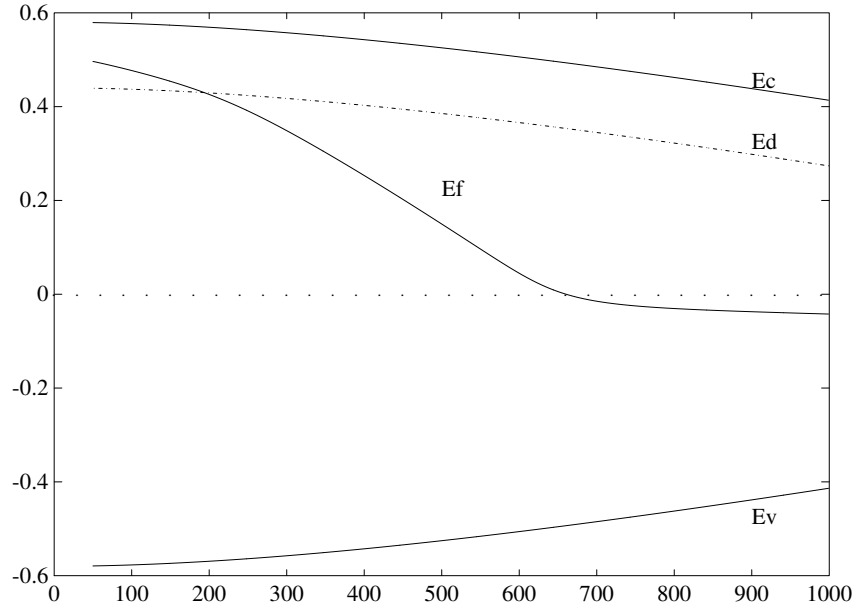


Figura 3.8: Andamento di E_F con la temperatura (tenendo conto della riduzione di E_g).

3.3.3

Si consideri un campione di silicio di tipo n , drogato con $N_d = 5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ atomi di fosforo.

1. Calcolare la concentrazione dei portatori maggioritari e minoritari a 300 K, supponendo la completa ionizzazione delle impurità, e la posizione del livello di Fermi alla medesima temperatura.
2. Tracciare l'andamento della concentrazione dei portatori (degli elettroni in banda di conduzione e delle lacune in banda di valenza) al variare della temperatura, da 100 K a 1000 K. Per quale valore di T la densità degli elettroni in banda di conduzione è doppia rispetto a quella a 300 K?
3. Determinare la temperatura alla quale metà delle impurità droganti sono ionizzate, nell'ipotesi che tutti i portatori derivino dalle impurità ionizzate.

Per il fosforo nel silicio, si ha $E_C - E_d = 0,044 \text{ eV}$.

a)

Nel semiconduttore a 300 K le impurità droganti si possono considerare completamente ionizzate e la concentrazione dei portatori intrinseci n_i è trascurabile rispetto a N_d (regione estrinseca). Ne consegue che la concentrazione degli elettroni vale $n \simeq N_d = 5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ mentre quella delle lacune è

$$p = \frac{n_i^2}{n} \simeq \frac{n_i^2}{N_d} = \frac{(1,45 \cdot 10^{10})^2}{5 \cdot 10^{16}} = 4,2 \cdot 10^3 \text{ cm}^{-3}$$

La posizione del livello di Fermi, a 300 K e nell'ipotesi di completa ionizzazione, si ottiene dalla (3.15)

$$E_F - E_i = kT \ln \frac{N_d}{n_i} = 0,39 \text{ eV}$$

da cui sommando $E_i \simeq E_g/2$, si ha

$$E_F - E_V = (0,35 + 0,56) \text{ eV} = 0,95 \text{ eV}$$

b)

Al crescere di T , il semiconduttore esce dalla zona estrinseca, in cui $n \simeq N_d$ indipendentemente dalla temperatura, e tende a comportarsi come un semiconduttore intrinseco. Sostituendo le (3.6) e (3.7) nella (3.10), si ha

$$np = N_C e^{-\frac{E_C - E_F}{kT}} N_V e^{-\frac{E_F - E_V}{kT}} = N_C N_V e^{-\frac{E_g}{kT}} = n_i^2$$

da cui si ottiene la dipendenza della concentrazione dei portatori intrinseci da T :

$$n_i = \sqrt{N_C N_V} e^{-\frac{E_g}{2kT}} = \sqrt{N_C(T) N_V(T)} e^{-\frac{E_g}{2kT}}$$

La concentrazione totale degli elettroni si può ottenere a partire dalla condizione di neutralità elettrica

$$n = N_d^+ + p$$

dove N_d^+ è la concentrazione degli atomi droganti ionizzati; poiché già a temperatura ambiente le impurità droganti si possono considerare completamente ionizzate, tale assunzione resta valida anche per temperature superiori e $N_d^+ \simeq N_d$. Usando la legge dell'azione di massa $p = n_i^2/n$, si può scrivere l'equazione di secondo grado

$$n^2 - N_d n - n_i^2 = 0$$

la cui soluzione fornisce la concentrazione degli elettroni

$$n = \frac{N_d}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2n_i}{N_d} \right)^2} \right]$$

Per valori di temperatura sufficientemente elevati, la concentrazione di elettroni nel semiconduttore drogato tende a eguagliare quella dei portatori intrinseci e quindi la dipendenza di n da T è esponenziale.

A 300 K, $n_i \ll N_d$ e quindi

$$n \simeq N_d = 5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$$

mentre alla temperatura cercata deve essere

$$n(T) = \frac{N_d}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2n_i}{N_d} \right)^2} \right] = 2N_d = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$$

da cui si ha

$$n_i(T) = \sqrt{2} N_d$$

Si noti come non sia sufficiente la condizione $n_i = N_d$ per raddoppiare il numero degli elettroni in banda di conduzione, a causa del maggiore grado di ricombinazione conseguente alla crescita di n e p .

Esplicitando T si ottiene

$$T = \frac{E_g}{2k} \left(\ln \frac{\sqrt{N_C(T) N_V(T)}}{\sqrt{2} N_d} \right)^{-1}$$

che fornisce in cinque iterazioni la soluzione $T = 829,6$ K.

c)

Per temperature sensibilmente inferiori a quella ambiente invece, le impurità droganti non si possono considerare tutte ionizzate: il calcolo della concentrazione degli elettroni non può quindi prescindere dalla valutazione di N_d^+ al variare di T . In generale si ha

$$n(T) = \frac{1}{2} N_d^+(T) \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2n_i(T)}{N_d^+(T)} \right)^2} \right]$$

Nell'ipotesi di poter trascurare $n_i(T)$ rispetto a $N_d^+(T)$ anche a temperature inferiori a 300 K ⁶, si può sviluppare l'espressione precedente in serie di Taylor nell'intorno di $x = 2n_i/N_d^+ = 0$ e troncare lo sviluppo al termine di ordine due. In tal modo, la concentrazione degli elettroni liberi si può scrivere come

$$n(T) \simeq \frac{n_i^2(T)}{N_d^+(T)} + N_d^+(T) \simeq N_d^+(T)$$

L'andamento della concentrazione di impurità ionizzate, espressa dalla

$$N_d^+(T) = \frac{N_d}{1 + 2e^{\frac{E_F - E_d}{kT}}}$$

è dato nella figura 3.9. La temperatura alla quale metà delle impurità sono ionizzate si può determinare imponendo

$$n(T) = \frac{1}{2} N_d = N_C e^{-\frac{E_C - E_F}{kT}}$$

e risolvendo rispetto a T . A tale scopo è però necessario conoscere come l'energia di Fermi E_F dipenda dalla temperatura. Si ha

$$N_d^+ = \frac{N_d}{1 + 2e^{\frac{E_F - E_d}{kT}}} = \frac{N_d}{2}$$

da cui

$$E_F = E_d + kT \ln \left(\frac{1}{2} \right)$$

Sostituendo ora E_F nell'espressione di n si ha

$$n = \frac{N_d}{2} = \frac{1}{2} N_C e^{-\frac{E_C - E_d}{kT}} = \frac{1}{2} N'_C \left(\frac{T}{300} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{E_C - E_d}{kT}}$$

dove $N'_C = 2,8 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ è il valore di N_C a 300 K. Esplicitando rispetto a T , si ottiene

$$T = \frac{E_C - E_d}{k} \frac{1}{\ln \frac{N'_C}{N_d} + \frac{3}{2} \ln \frac{T}{300}}$$

⁶Dalle espressioni di $n_i(T)$ e $N_d^+(T)$ si verifica facilmente che $\lim_{T \rightarrow 0} n_i/N_d^+ = 0$.

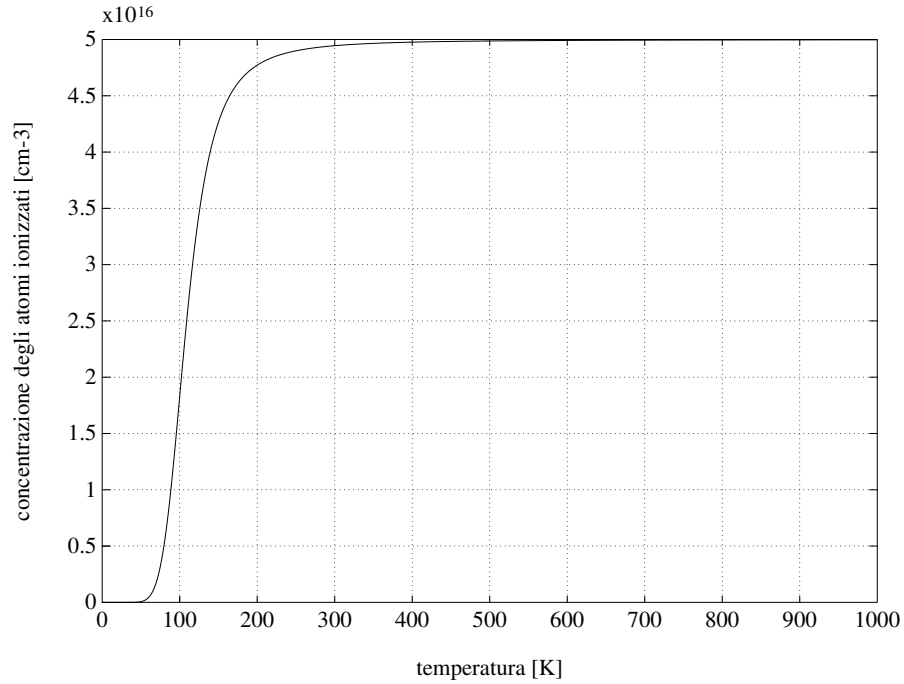


Figura 3.9: Concentrazioni degli atomi droganti ionizzati, in funzione della temperatura.

L'equazione si risolve iterativamente e in 9 iterazioni fornisce la soluzione

$$T = 107 \text{ K}$$

Tale risultato è in buon accordo con il grafico della figura 3.9, dal quale si vede che la metà degli atomi droganti sono ionizzati a una temperatura di poco superiore ai 100 K: la differenza riscontrata deve essere attribuita all'aver trascurato il contributo dei portatori intrinseci nella valutazione della concentrazione degli elettroni, supponendo $n = N_d^+$.

Nella figura 3.10 sono riportati gli andamenti di $n(T)$ (linea continua), $p(T)$ (linea tratteggiata) e $n_i(T)$ (linea a tratto spesso) sull'intervallo di temperatura 0 - 1000 K. La curva della concentrazione degli elettroni è stata tracciata senza ricorrere all'ipotesi di completa ionizzazione, ma risolvendo in modo iterativo l'equazione

$$n(T) = \frac{N_d^+}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2n_i}{N_d^+} \right)^2} \right]$$

nella quale N_d^+ dipende dal livello di Fermi E_F valutato con l'espressione

$$E_F = E_i + k T \ln \left(\frac{n(T)}{N_i(T)} \right)$$

La variazione di E_g con la temperatura non è stata considerata. Si nota che per valori elevati di T risulta $n_i \gg N_d$, e dunque $n(T) \simeq p(T) \simeq n_i(T)$. Per valori molto bassi di T , l'andamento di $n(T)$ riproduce quello di N_d^+ nella figura 3.9.

3.3.4

Si scriva un'espressione che consenta di determinare la temperatura T alla quale, in un semiconduttore drogato con N_d atomi donatori per unità di volume, la percentuale

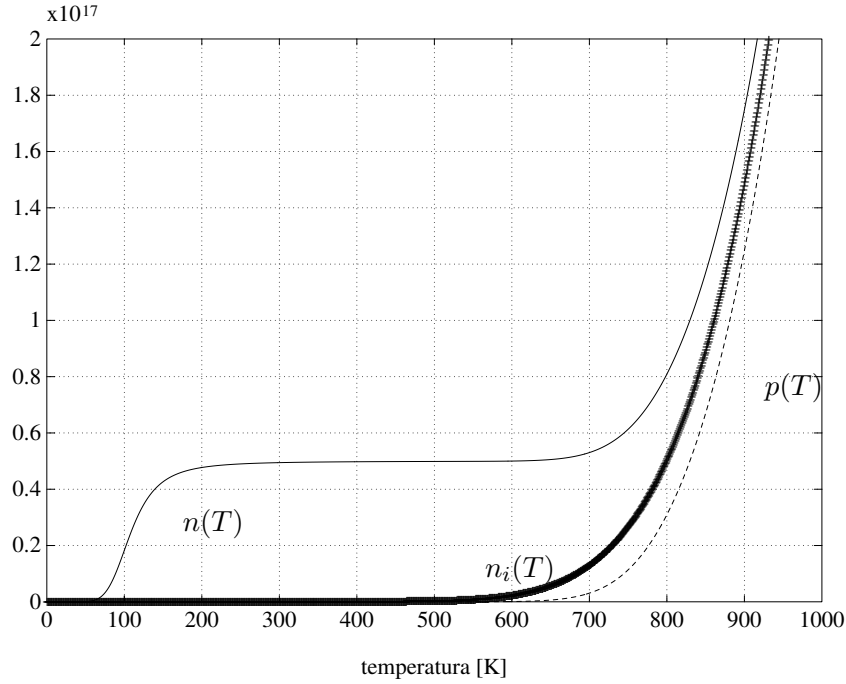


Figura 3.10: Concentrazioni di elettroni, lacune e portatori intrinseci, in funzione della temperatura.

di atomi droganti ionizzati sia α (si assuma che tutti i portatori mobili derivino da impurità ionizzate). Nel caso particolare in cui $N_d = 5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ e $E_C - E_d = 0,049 \text{ eV}$, si tracci l'andamento della concentrazione degli elettroni liberi al variare della temperatura da 0 a 300 K.

Dalla condizione di neutralità di carica e dalla legge di azione di massa si ricava l'espressione generale della concentrazione di elettroni in banda di conduzione

$$n = \frac{N_d^+}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2n_i}{N_d^+} \right)^2} \right]$$

Nel caso $2n_i \ll N_d^+$, l'espressione si può approssimare con

$$n \simeq N_d^+ + \frac{n_i^2}{N_d^+} \simeq N_d^+$$

L'approssimazione è certamente valida entro la zona di comportamento estrinseco del semiconduttore; tuttavia, al diminuire della temperatura, si riducono sia n_i che N_d^+ e pertanto occorre verificarne l'applicabilità. Osservando che la dipendenza da T (per $T \rightarrow 0$) ha la forma

$$n_i = K_1 T^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{E_g}{2kT}} \quad ; \quad N_d^+ = K_2 e^{-\frac{E_F - E_d}{kT}}$$

si trova per il rapporto delle due grandezze un legame con la temperatura T del tipo

$$\frac{n_i}{N_d^+} = \frac{K_1}{K_2} T^{\frac{3}{2}} \exp \left[-\frac{0,5E_g - (E_F - E_d)}{kT} \right]$$

Poiché $0,5E_g > E_F - E_d$, risulta che n_i è trascurabile rispetto a N_d^+ anche per valori di T molto piccoli. Si usa quindi l'approssimazione $n \simeq N_d^+$ e si ha

$$n = N_d^+ = \alpha N_d = \frac{N_d}{1 + 2e^{\frac{E_F - E_d}{kT}}}$$

da cui

$$E_F = E_d + kT \ln \left(\frac{1 - \alpha}{2\alpha} \right)$$

Sostituendo nella (3.6), si ottiene

$$n = N_C e^{-\frac{E_C - E_F}{kT}} = \alpha N_d = N_C e^{-\frac{E_C - E_d}{kT}} \frac{1 - \alpha}{2\alpha}$$

e quindi

$$T = \frac{E_C - E_d}{k} \left[\ln \left(\frac{N_C(T)}{N_d} \right) + \ln \left(\frac{1 - \alpha}{2\alpha^2} \right) \right]^{-1}$$

Poiché l'unica incognita è la temperatura, l'equazione può essere risolta iterativamente. La figura 3.11 riporta, nel caso numerico in esame, l'andamento della concentrazione degli elettroni liberi in banda di conduzione, per temperature comprese tra 0 e 300 K.

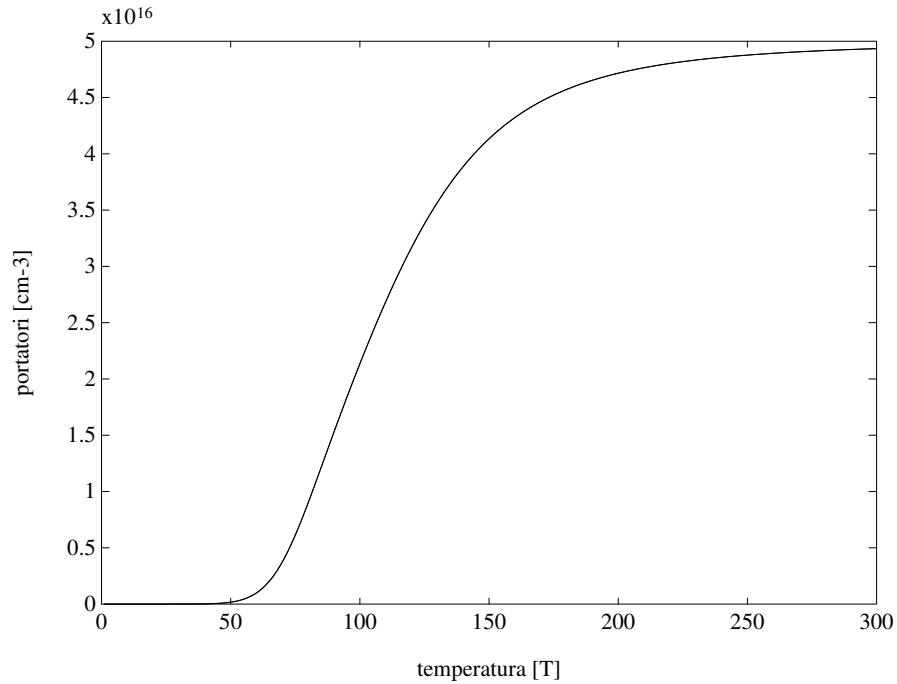


Figura 3.11: Concentrazione dei portatori in banda di conduzione al variare della temperatura.

Si noti che nel caso $\alpha = 0,5$, l'espressione trovata si riduce a quella ricavata nell'esercizio precedente.

3.3.5

Si determini, nel caso del silicio, del germanio e dell'arseniuro di gallio l'intervallo di valori di temperatura entro il quale un campione di semiconduttore drogato con $N_d = 5 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ atomi donatori mostra un comportamento estrinseco (per tutti e tre i materiali, assumere che le impurità droganti siano del tipo donatore e abbiano energia di attivazione pari a $E_d = 3 \text{ meV}$).

3.3.6

Si usino le equazioni di Shockley per calcolare la posizione del livello di Fermi, rispetto a E_i in un semiconduttore di tipo p, drogato con $N_a = 5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ atomi di boro.

3.3.7

Calcolare la posizione del livello di Fermi rispetto al centro dell'intervallo di energia proibita in un semiconduttore di tipo n e uno di tipo p, entrambi con un livello di drogaggio pari a $N = 7,3 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$. A quali differenze tra le due situazioni deve essere attribuita l'asimmetria riscontrata?

3.3.8

Un campione di silicio di tipo n è drogato con $N_d = 9,5 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ atomi di fosforo. Calcolare la concentrazione degli elettroni e delle lacune liberi, a 50 K, 300 K e 1000 K.

3.3.9

Calcolare il valore del lavoro di estrazione per un campione di silicio drogato con $N_a = 9 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ atomi di boro a 300 K.

3.3.10

Si disegni un grafico che fornisca la posizione del livello di Fermi in un campione di silicio in funzione del livello di drogaggio, di tipo p e n, variabile tra 0 e 10^{19} cm^{-3} . Si assuma la completa ionizzazione e una temperatura di 300 K.

Capitolo 4

Fenomeni di trasporto nei semiconduttori

In questo capitolo viene affrontato lo studio dei semiconduttori in condizioni di non equilibrio. La presenza di correnti di trascinamento e di diffusione quando nel semiconduttore si vengano a trovare campi elettrici e gradienti di concentrazione dei portatori liberi, richiede lo studio dei fenomeni di trasporto.

L'importanza della mobilità nel determinare il comportamento elettrico dei dispositivi a semiconduttore suggerisce l'analisi di metodi per la valutazione di tale grandezza. In alcuni esercizi vengono forniti gli strumenti per la valutazione della mobilità a partire sia da modelli teorici, che descrivono l'interazione degli elettroni con il reticolo reale (impurità, fononi acustici), sia da curve sperimentali. Infine viene valutata e discussa la coerenza dei risultati ottenuti.

Nei semiconduttori la resistività è l'effetto macroscopico più evidente della mobilità dei portatori e della loro concentrazione in condizione di non equilibrio. A tal fine vengono proposti esercizi che descrivono alcuni metodi sperimentali per la misura della resistività nei semiconduttori uniformemente drogati.

Come ulteriore contributo allo studio del concetto di mobilità viene analizzato il legame campo-velocità, mettendo in evidenza i fenomeni di saturazione di velocità che così profondamente influenzano il comportamento dei dispositivi a effetto di campo, quali i MOSFET, nei circuiti integrati (capitoli 11-12).

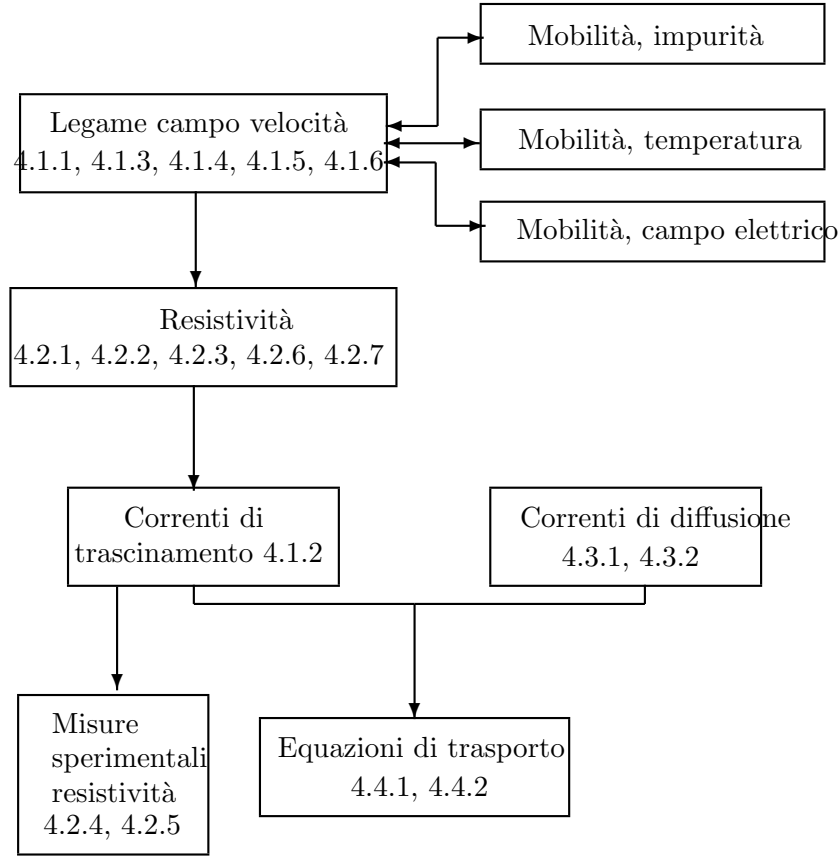


Figura 4.1: Struttura del capitolo 4.

Legame tra campo elettrico e velocità dei portatori

In assenza di campo elettrico esterno, i portatori di un semiconduttore si trovano in uno stato di agitazione termica caratterizzato da una velocità media che dipende dalla temperatura (v_{th}); in presenza di un campo esterno \mathcal{E} , i portatori acquisiscono una seconda componente di velocità nella direzione del campo. Gli elettroni e le lacune subiscono urti successivi con le non periodicità del cristallo e il moto è caratterizzato da una velocità media v_d detta *velocità di trascinamento*.

Il legame tra la velocità media dei portatori e il campo elettrico che la sostiene può essere espresso nella forma

$$v_d = \mu \mathcal{E}$$

dove μ è la *mobilità* del portatore. Il moto dovuto al campo elettrico ha usualmente una velocità di entità inferiore rispetto a quella termica ($v \ll v_{th}$), pertanto se si indica con τ_{coll} il tempo medio tra due urti e con λ il cammino libero medio,

$$\tau_{coll} = \frac{\lambda}{v_{th}}$$

la mobilità si esprime con

$$\mu = \frac{q\tau_{coll}}{m^*}$$

Se si verificano diversi tipi di “collisioni” (per esempio con atomi di impurità e con fononi), ognuno caratterizzato da un proprio tempo medio di collisione, il tempo medio

complessivo si trova con l'espressione

$$\frac{1}{\tau_{\text{coll}}} = \frac{1}{\tau_{\text{impurità}}} + \frac{1}{\tau_{\text{fononi}}}$$

e quindi la mobilità risultante si calcola come

$$\frac{1}{\mu_{\text{coll}}} = \frac{1}{\mu_{\text{impurità}}} + \frac{1}{\mu_{\text{fononi}}}$$

Nella pratica si impiegano formule empiriche.

- La mobilità dei portatori nel silicio al variare della temperatura e della concentrazione delle impurità può essere calcolata con l'uso delle relazioni ¹

$$\mu_n(T, N) = 88 T_n^{-0,57} + \frac{7,4 \cdot 10^8 (300 T_n)^{-2,33}}{1 + 0,88 N (1,26 \cdot 10^{17} T_n^{2,4})^{-1} T_n^{-0,146}} \quad (4.1)$$

$$\mu_p(T, N) = 54,3 T_n^{-0,57} + \frac{1,36 \cdot 10^8 (300 T_n)^{-2,23}}{1 + 0,88 N (2,35 \cdot 10^{17} T_n^{2,4})^{-1} T_n^{-0,146}} \quad (4.2)$$

dove $T_n = T/300$, T è la temperatura in Kelvin e $N = N_a + N_d$ è la concentrazione totale di drogante in cm^{-3} .

- La dipendenza della mobilità dal campo elettrico può essere approssimata dall'espressione

$$\mu(\mathcal{E}) = \frac{\mu}{1 + \frac{\mu}{v_{\text{sat}}} \mathcal{E}} \quad (4.3)$$

dove v_{sat} è la velocità di saturazione dei portatori, raggiunta per valori molto elevati di \mathcal{E} e stimabile in $v_{\text{sat}} = 10^7 \text{ cm s}^{-1}$.

4.1 Mobilità e velocità di trascinamento

4.1.1

A un campione di silicio drogato in modo uniforme con $N_d = 4,5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ atomi di fosforo e lungo $10 \mu\text{m}$, viene applicata una differenza di potenziale di 1 V .

1. Calcolare la velocità di trascinamento dei portatori a 300 K applicando le relazioni (4.1) e (4.2) per il valore della mobilità;
2. confrontare tale velocità con quella degli elettroni nell'alluminio, a parità di campo elettrico (per la mobilità, si assuma il valore $\mu = 10,02 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$);
3. calcolare, per il semiconduttore e per il metallo, le resistività e densità di corrente a 300 K e 1000 K .

a)

Supponendo la completa ionizzazione delle impurità droganti, le concentrazioni dei portatori nel semiconduttore valgono

$$n \simeq N_d = 4,5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3} \quad ; \quad p \simeq \frac{n_i^2}{N_d} = \frac{(1,45 \cdot 10^{10})^2}{4,5 \cdot 10^{16}} = 4672 \text{ cm}^{-3}$$

¹N.D.Arora, J.R.Hauser, D.J.Roulston, "Electron and hole mobilities in silicon as a function of concentration and temperature" IEEE Trans. on Electron Devices, vol.ED-29, pag.292, febbraio 1982.

Usando le (4.1) e (4.2), si calcolano i valori di mobilità per gli elettroni e le lacune ²

$$\mu_n = 1040 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1} \quad ; \quad \mu_p = 402 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

Se nel campione di semiconduttore si ha una distribuzione uniforme di campo elettrico, questo vale $\mathcal{E} = V/L = 1000 \text{ V cm}^{-1}$ e le velocità di trascinamento dei portatori sono

$$v_n = \mu_n \mathcal{E} = 1,04 \cdot 10^6 \text{ cm s}^{-1} \quad ; \quad v_p = \mu_p \mathcal{E} = 4,02 \cdot 10^5 \text{ cm s}^{-1}$$

b)

Nel caso dell'alluminio, il valore di mobilità degli elettroni, più basso di quello nel silicio, è compensato dalla maggiore concentrazione di portatori, ricavata nel problema 2.1.2:

$$n_{Al} = \frac{N_{AV} M d \nu}{A} = 1,8 \cdot 10^{23} \text{ cm}^{-3}$$

dove N_{AV} è il numero di Avogadro, M è il numero di atomi per molecola, d è la densità, ν è il numero di elettroni liberi per atomo, A è il peso atomico. Si ha quindi

$$v_{Al} = 1 \cdot 10^4 \text{ cm s}^{-1}$$

c)

Il confronto tra i due materiali sotto l'aspetto delle proprietà di trasporto si può effettuare sulle densità di corrente

$$\begin{aligned} J_n &= q n \mu_n \mathcal{E} = q n v_n = 7488 \text{ A cm}^{-2} \\ J_p &= q p \mu_p \mathcal{E} = q n v_p = 1,88 \cdot 10^{-10} \text{ A cm}^{-2} \\ J_{Al} &= q n_{Al} \mu_{Al} \mathcal{E} = q n_{Al} v_{Al} = 2,9 \cdot 10^8 \text{ A cm}^{-2} \end{aligned}$$

o sui corrispondenti valori di resistività

$$\begin{aligned} \rho_n &= 0,133 \Omega \text{ cm} \\ \rho_p &= 5,319 \text{ M}\Omega \text{ cm} \\ \rho_{Al} &= 3,44 \cdot 10^{-6} \Omega \text{ cm} \end{aligned}$$

Si noti come, per il semiconduttore, il contributo di ρ_p sia trascurabile quando si valuta la resistività complessiva

$$\rho = \frac{1}{\frac{1}{\rho_n} + \frac{1}{\rho_p}} = \frac{1}{1/0,133 + 1/5,319 \cdot 10^6} \simeq 0,133 \Omega \text{ cm}$$

Si riprendono ora le relazioni (4.1) e (4.2), per ottenere le mobilità di elettroni e lacune a 1000 K:

$$\mu_n = 119 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1} \quad ; \quad \mu_p = 55 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

Per i metalli, la mobilità varia con la temperatura come $(T)^{-\frac{3}{2}}$; pertanto, nota la mobilità a 300 K, il valore a 1000 K si ottiene mediante l'espressione

$$\mu_{Al}(1000) = \mu_{Al}(300) \left(\frac{1000}{300} \right)^{-\frac{3}{2}} = 1,64 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

²Si trascura qui la riduzione di mobilità dovuta al campo elettrico.

La concentrazione dei portatori non varia per l'alluminio, mentre deve essere ricalcolata per il silicio, come indicato nel problema ??

$$n = \frac{N_d}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2n_i}{N_d} \right)^2} \right]$$

La concentrazione dei portatori intrinseci aumenta sensibilmente con la temperatura

$$n_i^2 = 4 \left(\frac{2\pi m k}{h^2} \right)^3 \left(\frac{m_n^* m_p^*}{m^2} \right)^{\frac{3}{2}} T^3 e^{-\frac{E_g}{kT}}$$

a 1000 K si ha $n_i = 4,07 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ e quindi

$$n = 4,3 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3} \quad ; \quad p = \frac{n_i^2}{n} = 3,85 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$$

Ne consegue che le densità di corrente a 1000 K sono

$$\begin{aligned} J_n &= q n \mu_n \mathcal{E} = q n v_n = 8187 \text{ A cm}^{-2} \\ J_p &= q p \mu_p \mathcal{E} = q n v_p = 3388 \text{ A cm}^{-2} \\ J_{Al} &= q n_{Al} \mu_{Al} \mathcal{E} = q n_{Al} v_{Al} = 4,72 \cdot 10^7 \text{ A cm}^{-2} \end{aligned}$$

e le resistività

$$\begin{aligned} \rho_n &= 0,121 \text{ } \Omega \text{ cm} \\ \rho_p &= 0,295 \text{ } \Omega \text{ cm} \\ \rho_{Al} &= 2,11 \cdot 10^{-5} \text{ } \Omega \text{ cm} \end{aligned}$$

In questo caso, i valori di ρ_n e ρ_p sono confrontabili e la resistività complessiva del silicio è

$$\rho = \left(\frac{1}{\rho_n} + \frac{1}{\rho_p} \right)^{-1} = 0,086 \text{ } \Omega \text{ cm}$$

Si noti come, passando da 300 K a 1000 K, la resistività del metallo sia aumentata di circa un ordine di grandezza, a causa della diminuzione della mobilità, mentre nel silicio l'aumento della concentrazione dei portatori (soprattutto minoritari) abbia come conseguenza la riduzione sia della mobilità che della resistività.

4.1.2

Si calcoli la densità di corrente di trascinamento in un campione di semiconduttore lungo 50 μm a cui siano applicati 5 V di potenziale nei seguenti casi:

- a) Si intrinseco a 300K;*
 - b) GaAs intrinseco a 300K;*
 - c) Si di tipo n ($N_d = 10^{14} \text{ cm}^{-3}$) a 300K;*
 - d) Si intrinseco a 500 K;*
 - e) GaAs intrinseco a 500 K;*
 - f) Si di tipo n ($N_d = 10^{14} \text{ cm}^{-3}$) a 500 K;*
 - g) GaAs di tipo n ($N_d = 10^{14} \text{ cm}^{-3}$) a 500 K;*
- Per quanto riguarda il GaAs, si usino i seguenti valori di mobilità:*

Mobilità del GaAs

	T [K]	μ_n [cm ² V ⁻¹ s ⁻¹]	μ_p [cm ² V ⁻¹ s ⁻¹]
Intrinseco	300	8800	400
Intrinseco	500	4400	210
($N_d = 10^{14}$)	500	3800	180

Nella situazione indicata il valore del campo elettrico (supposto uniforme) nel semiconduttore è pari a

$$\mathcal{E} = \frac{V}{L} = \frac{5}{50 \cdot 10^{-4}} = 1 \cdot 10^3 \text{ Vcm}^{-1}$$

La densità della corrente di trascinamento in un semiconduttore è data dalla relazione ³

$$J = (q\mu_n n + q\mu_p p)\mathcal{E}$$

È quindi necessario calcolare i valori di mobilità (μ_n e μ_p) e le concentrazione dei portatori (n e p) nelle diverse situazioni in esame. Per quanto riguarda la mobilità del silicio si ha:

Mobilità del Si

	T [K]	μ_n [cm ² V ⁻¹ s ⁻¹]	μ_p [cm ² V ⁻¹ s ⁻¹]
intrinseco	300	1339	284
$N_d = 10^{14}$	300	1339	284
intrinseco	500	446	110
$N_d = 10^{14}$	500	446	110

mentre i valori di concentrazione sono riportati in tabella 4.1.

I valori risultanti di velocità e densità di corrente sono nelle tabelle 4.2 e 4.3.

Per quanto riguarda la variazione della concentrazione dei portatori intrinseci con la temperatura, si è fatto uso della relazione

$$n_i^2 = 4 \left(\frac{2\pi m_0 k}{h^2} \right)^3 \left(\frac{m_n^* m_p^*}{m_0^2} \right)^{\frac{3}{2}} T^3 e^{-\frac{E_g}{kT}}$$

Dai valori indicati si evidenziano alcuni fenomeni caratteristici dei semiconduttori:

- nei semiconduttori intrinseci la corrente di trascinamento è legata sia agli elettroni che alle lacune;
- nel GaAs, le concentrazioni nel materiale intrinseco sono bassissime e lo restano anche a temperature elevate, al contrario di quanto avviene nel silicio;

³È immediato verificare la consistenza di questa relazione con l'espressione di conducibilità utilizzata nel capitolo 3, infatti

$$\begin{aligned} J = J_n + J_p &= q\mu_n n \mathcal{E} + q\mu_p p \mathcal{E} \\ \sigma &= q\mu_n n + q\mu_p p \end{aligned}$$

caso	n_i	p_i	n	p
$T = 300 \text{ K}$				
Si _{in}	$1,45 \cdot 10^{10}$	$1,45 \cdot 10^{10}$	$1,45 \cdot 10^{10}$	$1,45 \cdot 10^{10}$
GaAs _{in}	$9,0 \cdot 10^6$	$9,0 \cdot 10^6$	$9,0 \cdot 10^6$	$9,0 \cdot 10^6$
Si ($N_d = 10^{14}$)	$1,45 \cdot 10^{10}$	$1,45 \cdot 10^{10}$	$1 \cdot 10^{14}$	$2,1 \cdot 10^6$
$T = 500 \text{ K}$				
Si _{in}	$1,77 \cdot 10^{14}$	$1,77 \cdot 10^{14}$	$1,77 \cdot 10^{14}$	$1,77 \cdot 10^{14}$
GaAs _{in}	$4,84 \cdot 10^{11}$	$4,84 \cdot 10^{11}$	$4,84 \cdot 10^{11}$	$4,84 \cdot 10^{11}$
Si ($N_d = 10^{14}$)	$1,77 \cdot 10^{14}$	$1,77 \cdot 10^{14}$	$2,34 \cdot 10^{14}$	$1,34 \cdot 10^{14}$
GaAs ($N_d = 10^{14}$)	$4,84 \cdot 10^{11}$	$4,84 \cdot 10^{11}$	$1 \cdot 10^{14}$	$2,34 \cdot 10^9$

Tabella 4.1: Concentrazioni dei portatori in cm^{-3} .

caso	v_n [cm/s]	v_p [cm/s]
$T = 300 \text{ K}$		
Si _{in}	$1,339 \cdot 10^6$	$0,284 \cdot 10^6$
GaAs _{in}	$8,8 \cdot 10^6$	$0,4 \cdot 10^6$
Si $N_d = 10^{14}$	$1,339 \cdot 10^6$	$0,284 \cdot 10^6$
$T = 500 \text{ K}$		
Si _{in}	$0,446 \cdot 10^6$	$0,11 \cdot 10^6$
GaAs _{in}	$4,4 \cdot 10^6$	$0,21 \cdot 10^6$
Si ($N_d = 10^{14}$)	$0,446 \cdot 10^6$	$0,11 \cdot 10^6$
GaAs ($N_d = 10^{14}$)	$3,8 \cdot 10^6$	$0,18 \cdot 10^6$

Tabella 4.2: Velocità di trascinamento.

caso	J_n [A/cm ²]	J_p [A/cm ²]	J_{tot} [A/cm ²]
$T = 300 \text{ K}$			
Si _{in}	$3,1 \cdot 10^{-3}$	$0,66 \cdot 10^{-3}$	$3,76 \cdot 10^{-3}$
GaAs _{in}	$1,26 \cdot 10^{-5}$	$5,76 \cdot 10^{-7}$	$1,32 \cdot 10^{-5}$
Si ($N_d = 10^{14}$)	21,4	$9,54 \cdot 10^{-8}$	21,4
$T = 500 \text{ K}$			
Si _{in}	12,63	3,12	15,75
GaAs _{in}	0,34	0,016	0,356
Si ($N_d = 10^{14}$)	16,69	2,36	19,05
GaAs ($N_d = 10^{14}$)	60,8	$6,74 \cdot 10^{-5}$	60,8

Tabella 4.3: Densità di corrente.

- l'approssimazione di confondere la concentrazione dei portatori maggioritari con la concentrazione delle impurità, e quindi trascurare la correnti di trascinamento dei portatori minoritari, è giustificato solo se le concentrazioni dei portatori intrinseci sono piccole, come si verifica a basse temperature e in particolar modo nel GaAs.

4.1.3

Si vuole in questo problema comprendere meglio alcuni meccanismi di comportamento statistico che contribuiscono alla formulazione dell'espressione della mobilità.

1. *Un elettrone in un cristallo è sottoposto a un moto di natura termica, cui non corrisponde in media alcun flusso di corrente, e a un moto legato alla presenza di un campo elettrico. Quest'ultimo è di solito di entità inferiore al precedente, ma dà origine a un flusso di corrente. La velocità di ogni singolo elettrone varia nel tempo⁴ e la componente nella direzione del campo subisce una brusca riduzione a ogni urto con le non periodicità del cristallo, per poi aumentare nuovamente sino a un urto susseguente. La velocità dell'insieme degli elettroni accelerati tra due urti successivi ha un valore medio e si conviene di rappresentare il moto indotto dal campo elettrico come se avvenisse a velocità costante, pari al valore medio (velocità di trascinamento v_d).*

Si trovi un'espressione della mobilità immaginando che l'impulso acquisito dall'elettrone, volando tra due urti successivi a velocità costante, sia ceduto completamente al momento dell'urto. Sia τ il tempo medio tra le due collisioni.

2. *Indicando con n_0 il numero totale di elettroni, con $n(t)$ il numero di elettroni che all'istante t non hanno subito urti e con αdt la probabilità a priori per un elettrone di subire un urto nell'intervallo dt , si valuti il tempo medio tra due collisioni.*
3. *Osservando che α è una costante legata a un particolare meccanismo d'urto, si determini il tempo di vita medio risultante quando siano presenti due diversi tipi di meccanismi di collisione.*
4. *Si consideri un semiconduttore in cui siano attivi due meccanismi di collisione: se fosse presente solo il primo meccanismo, la mobilità risulterebbe essere $\mu = 700 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$, mentre se fosse presente solo il secondo si avrebbe $\mu = 150 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Determinare un'espressione per valutare la mobilità risultante e calcolarne il valore quando siano presenti entrambi i meccanismi di collisione.*

a)

Usando la rappresentazione in cui il comportamento effettivo viene approssimato con valori medi, un elettrone caratterizzato da una mobilità μ soggetto a un campo elettrico \mathcal{E} si muove con velocità di trascinamento

$$v_d = \mu \mathcal{E}$$

Indicando con m^* la massa efficace e con τ il tempo medio fra due collisioni, il teorema dell'impulso permette di scrivere

$$q \mathcal{E} \tau = m^* v_d = m^* \mu \mathcal{E}$$

⁴Dal punto di vista cinematico si tratta perlomeno di un moto uniformemente accelerato e la velocità cresce linearmente con il tempo.

e quindi si ha per la mobilità l'espressione

$$\mu = \frac{q \tau}{m^*}$$

b)

Se si indica con

- n_0 = numero totale di elettroni
- αdt = probabilità a priori per elettrone di subire un urto nell'intervallo dt
- α = costante legata a un particolare meccanismo d'urto
- $n(t)$ = numero di elettroni che all'istante t non hanno subito urti

è possibile valutare il numero di elettroni che nell'intervallo dt subisce un urto per la prima volta; tale numero è pari alla diminuzione della quantità di elettroni che non hanno subito urti:

$$dn = -n(t) \alpha dt$$

$$\frac{dn}{dt} = -\alpha n(t)$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale è

$$n(t) = A e^{-\alpha t}$$

e imponendo la condizione iniziale $n(t=0) = n_0$ si ottiene $A = n_0$ e dunque

$$n(t) = n_0 e^{-\alpha t}$$

La probabilità $f(t) dt$ che un elettrone subisca un urto nell'intervallo tra t e $t + dt$, si può valutare come prodotto della probabilità per elettrone di subire un urto entro un tempo dt e la probabilità che tale urto riguardi uno degli elettroni che, all'istante t , non hanno ancora subito un urto:

$$\underbrace{\alpha dt}_{\text{prob.1}} \underbrace{\frac{n(t)}{n_0}}_{\text{prob.2}} = f(t) dt$$

Allora $f(t)$ è la distribuzione dei tempi intercorrenti tra due urti per uno stesso elettrone e vale

$$f(t) = \alpha e^{-\alpha t}$$

Il tempo medio tra due collisioni può essere calcolato integrando la variabile t tra 0 e ∞ , pesata con la probabilità che si verifichi un urto ⁵

$$\begin{aligned} \tau &= \int_0^\infty t f(t) dt = \alpha \int_0^\infty t e^{-\alpha t} dt = \\ &= \alpha \left\{ \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} t \right]_0^\infty + \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty e^{-\alpha t} dt \right\} = \\ &= \alpha \left\{ 0 - \left[\frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha t} \right]_0^\infty \right\} = \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

⁵Integrazione per parti:

$$\int f' g = f g - \int f g'$$

c)

In presenza di due meccanismi di urto distinti e statisticamente indipendenti, la probabilità che si verifichi un urto qualsiasi, nell'intervallo dt , è data dalla somma delle due probabilità $\alpha_1 dt$ e $\alpha_2 dt$:

$$\alpha dt = \alpha_1 dt + \alpha_2 dt$$

Quindi la relazione tra α e τ permette di scrivere

$$\frac{1}{\tau} = \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}$$

dove τ_1 e τ_2 sono i tempi medi di collisione propri di ciascun fenomeno di collisione.

d)

La relazione tra i tempi medi di collisione di due diversi meccanismi permette di scrivere

$$\mu = \frac{q \tau}{m^*} = \frac{q}{m^* (\alpha_1 + \alpha_2)}$$

$$\frac{1}{\mu_{\text{tot}}} = \frac{m^*}{q} (\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1 \frac{m^*}{q} + \alpha_2 \frac{m^*}{q} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}$$

Numericamente

$$\mu_{\text{tot}} = 1 / \left(\frac{1}{700} + \frac{1}{150} \right) = 123,52 \text{ cm}^2 \text{ v}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

4.1.4

Si consideri un tratto di semiconduttore di tipo n, per esempio il canale di un transistor a effetto di campo, lungo $l_g = 1 \mu\text{m}$, cui sia applicata una differenza di potenziale. Nell'ipotesi che si abbia un solo meccanismo di urto per le particelle in moto, si calcoli il numero di urti che queste subiscono durante il percorso. Si mettano a confronto alla temperatura ambiente a) silicio e b) arseniuro di gallio.

Il numero degli urti è approssimativamente espresso dal rapporto tra l_g e il cammino libero medio λ . Nell'ipotesi che la velocità termica v_{th} sia di molto superiore alla velocità di trascinamento legata al campo elettrico, si ha $\lambda = v_{\text{th}} \cdot \tau$, dove τ è il tempo medio tra due urti.

Dall'espressione della mobilità si ricava una relazione per il cammino libero medio

$$\begin{aligned} \mu_n &= \frac{q \tau}{m_n}, \Rightarrow \lambda = v_{\text{th}} \cdot \tau = v_{\text{th}} \cdot \frac{\mu_n m_n}{q} \\ \frac{1}{2} m_n v_{\text{th}}^2 &= \frac{3}{2} k T, \Rightarrow \lambda = \sqrt{\frac{3 k T}{m_n}} \cdot \frac{\mu_n m_n}{q} \end{aligned}$$

a) Silicio : $\mu_n = 1417 \text{ cm}^2 \text{ V} \cdot \text{s}, \quad m_n = 0,26 \cdot m_0$

Si ha $\lambda \simeq 4,80 \cdot 10^{-2} \mu\text{m} = 48 \text{ nm}$, pertanto il numero di urti è ~ 20 (la velocità termica vale $v_{\text{th}} \sim 2,29 \cdot 10^7 \text{ cm/s}$ e la vita media è $\tau \simeq 0,21 \text{ ps}$)

b) Arseniuro di gallio : $\mu_n = 8800 \text{ cm}^2 \text{ V} \cdot \text{s}, \quad m_n = 0,068 \cdot m_0$

Si ha $\lambda \simeq 15,23 \cdot 10^{-2} \mu\text{m} = 152,3 \text{ nm}$, pertanto il numero di urti è ~ 6 (la velocità termica vale $v_{\text{th}} \sim 4,48 \cdot 10^7 \text{ cm/s}$ e la vita media è $\tau \simeq 0,34 \text{ ps}$).

4.1.5

Usando le relazioni empiriche (4.1) e (4.2) per la determinazione della mobilità dei portatori in un semiconduttore in funzione della concentrazione totale delle impurità droganti N e della temperatura T , si vuole valutare approssimativamente la validità di alcune formule teoriche che esplicitano particolari legami funzionali.

1. Si traccino gli andamenti di μ_n e μ_p al variare della temperatura, tra 250 e 500 K, per concentrazioni pari a 10^{14} , 10^{15} , 10^{16} , 10^{17} e 10^{18} cm $^{-3}$.
2. Si faccia l'ipotesi che siano attivi nel semiconduttore due meccanismi di urto, legati all'interazione rispettivamente con i fononi e con le impurità ionizzate con concentrazione N . Si scriva l'espressione della mobilità totale assumendo che la mobilità caratteristica del primo meccanismo di urto sia proporzionale a $T^{-5/2}$ e la seconda a $N^{-1} T^{3/2}$. Si usi il metodo dei minimi quadrati per trovare i coefficienti di proporzionalità che forniscono la migliore approssimazione delle curve ottenute nel punto precedente.

a)

Gli andamenti di μ_n e μ_p al variare della temperatura, tra 250 e 500 K, per concentrazioni pari a 10^{14} , 10^{15} , 10^{16} , 10^{17} e 10^{18} cm $^{-3}$, calcolati usando le relazioni (4.1) e (4.2), sono riportati con linee continue nella figura 4.2 per gli elettroni e 4.3 per le lacune.

μ_n [cm 2 V $^{-1}$ s $^{-1}$]

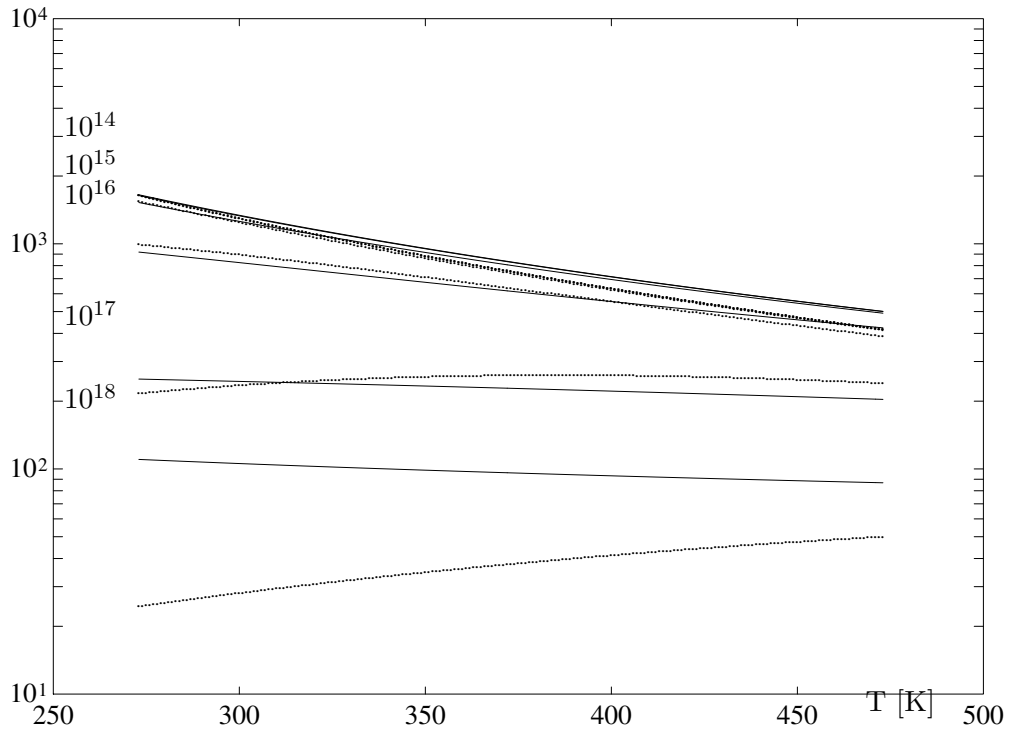


Figura 4.2: Mobilità degli elettroni nel silicio.

μ_p [cm²V⁻¹s⁻¹]

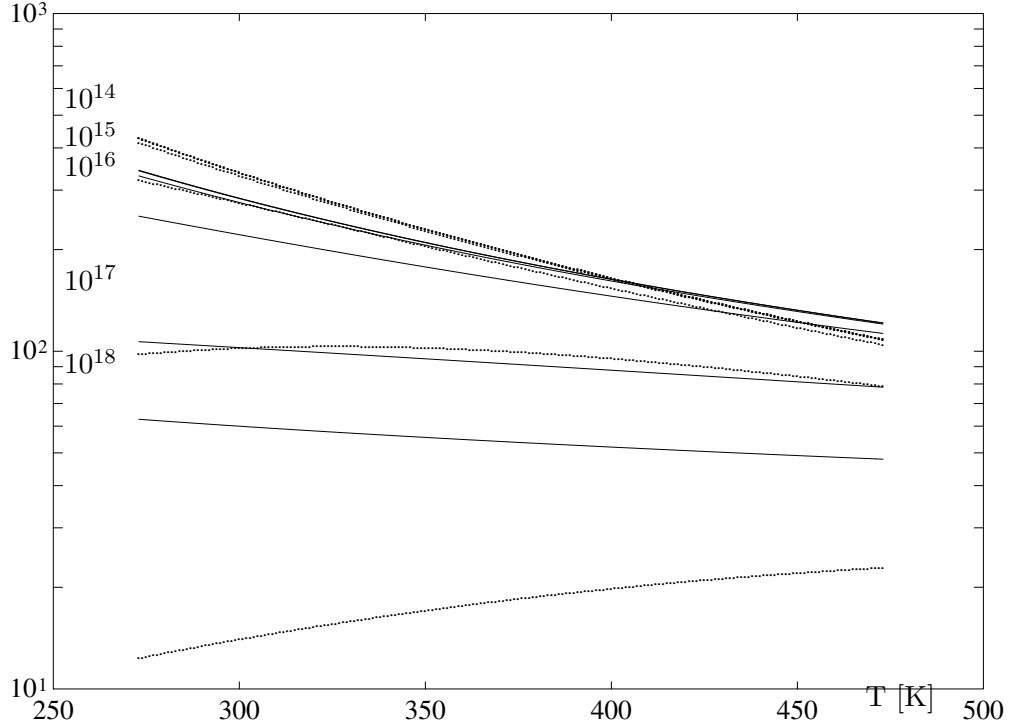


Figura 4.3: Mobilità delle lacune nel silicio.

Il fenomeno di collisione con le impurità presenti nel silicio produce una mobilità ⁶ direttamente proporzionale a $T^{3/2}$ e inversamente a N ; un modello di tale mobilità può essere

$$\mu_I(N, T) = k_1 N^{-1} T^{\frac{3}{2}} = k_1 f_1(N, T)$$

Analogamente per la mobilità dovuta all'interazione con i fononi si ha l'espressione

$$\mu_{Ph}(T) = k_2 T^{-\frac{5}{2}} = k_2 f_2(T)$$

Come risulta dal problema 4.1.3, l'effetto combinato dei due meccanismi di collisione porta a una mobilità complessiva

$$\mu = \frac{1}{1/\mu_I(N, T) + 1/\mu_{Ph}(T)}$$

I coefficienti k_1 e k_2 , differenti per lacune e elettroni, si potrebbero determinare imponendo che la curva della mobilità così ottenuta si sovrapponga al meglio all'andamento delle curve riportate nelle figure 4.2 e 4.3. Se le curve, le ipotesi e i modelli di mobilità fossero esatti, sarebbe sufficiente imporre il passaggio per una coppia di punti qualsiasi scelti sui grafici delle figure 4.2 e 4.3. Poiché invece le curve sono desunte da relazioni empiriche (4.1) e (4.2) e i modelli di mobilità sono solo in parte adeguati, i valori trovati per k_1 e k_2 dipendono dalla scelta della coppia di punti. Per una approssimazione delle (4.1) e (4.2), negli intervalli di T e N assegnati, si ricorre al metodo dei minimi quadrati.

⁶Si veda: Simon M. Sze, "Dispositivi a semiconduttore", Hoepli, Milano, 1991

Si sceglie sul grafico della figura 4.2, per gli elettroni, e sul grafico della figura 4.3, per le lacune, (linee continue) un insieme di n punti. Siano (N_i, T_i) i valori di N e T corrispondenti all' i -esimo punto, in cui la mobilità vale y_i . Posto

$$\begin{aligned}\mu_{Ii} &= \mu_I(N_i, T_i) = k_1 f_1(N_i, T_i) = k_1 f_{1i} \\ \mu_{Phi} &= \mu_{Ph}(T_i) = k_2 f_2(T_i) = k_2 f_{2i}\end{aligned}$$

l'errore commesso nell'approssimazione all' i -esimo punto vale

$$e_i = \left| \frac{1}{y_i} - \left(\frac{1}{\mu_{Ii}} + \frac{1}{\mu_{Phi}} \right) \right|$$

Il metodo dei minimi quadrati, consente di determinare i valori dei coefficienti k_1 e k_2 tali da rendere minima la somma S dei quadrati degli errori

$$S = \sum_{i=1}^n e_i^2$$

A tal fine, si deriva S rispetto a k_1 e k_2

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dk_1} &= 2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{y_i} - \frac{1}{\mu_{Ii}} - \frac{1}{\mu_{Phi}} \right) \frac{1}{f_{1i}} \left(\frac{1}{k_1} \right)^2 \\ \frac{dS}{dk_2} &= 2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{y_i} - \frac{1}{\mu_{Ii}} - \frac{1}{\mu_{Phi}} \right) \frac{1}{f_{2i}} \left(\frac{1}{k_2} \right)^2\end{aligned}$$

e si impone che le due derivate si annullino; si trova il sistema di equazioni

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i f_{1i}} - \frac{1}{k_1} \sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{1i}^2} - \frac{1}{k_2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{1i} f_{2i}} &= 0 \\ \sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i f_{2i}} - \frac{1}{k_1} \sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{1i} f_{2i}} - \frac{1}{k_2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{2i}^2} &= 0\end{aligned}$$

Definiti i coefficienti A_1, B_1, C_1 e A_2, B_2, C_2 ,

$$\begin{aligned}A_1 &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i f_{1i}} ; & B_1 &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{1i}^2} ; & C_1 &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{1i} f_{2i}} \\ A_2 &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i f_{2i}} ; & B_2 &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{1i} f_{2i}} ; & C_2 &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{2i}^2}\end{aligned}$$

il sistema assume la forma

$$\begin{aligned}A_1 - \frac{1}{k_1} B_1 - \frac{1}{k_2} C_1 &= 0 \\ A_2 - \frac{1}{k_1} B_2 - \frac{1}{k_2} C_2 &= 0\end{aligned}$$

Si risolve il sistema nelle incognite $1/k_1$ e $1/k_2$ e si trova

$$\begin{aligned}k_1 &= \frac{1 - \frac{C_1 B_2}{B_1 C_2}}{\frac{A_1}{B_1} - \frac{C_1 A_2}{B_1 C_2}} \\ k_2 &= \left(\frac{A_2}{C_2} - \frac{B_2}{C_2} \frac{1}{k_1} \right)^{-1}\end{aligned}$$

Nella soluzione qui proposta, sono stati scelti 16 punti, individuati da quattro valori di temperatura (0, 25°C, 100°C e 200°C) e quattro di concentrazione di impurità (10^{15} , 10^{16} , 10^{17} , 10^{18} cm⁻³). Con il metodo indicato, si trova per gli elettroni

$$k_1 = 7,06 \cdot 10^7 \quad ; \quad k_2 = 2,84 \cdot 10^{16}$$

e per le lacune

$$k_1 = 1,67 \cdot 10^8 \quad ; \quad k_2 = 1,71 \cdot 10^{16}$$

La verifica della bontà dell'approssimazione ottenuta si ha nelle figure 4.2 e 4.3, dove la mobilità complessiva che si basa sulle relazioni ora trovate (linee tratteggiate)

$$\begin{aligned} \mu_{I,n}(N, T) &= 7,06 \cdot 10^7 N^{-1} T^{\frac{3}{2}} \quad ; \quad \mu_{Ph,n}(T) = 2,84 \cdot 10^{16} T^{-\frac{5}{2}} = k_2 f_2(T) \\ \mu_{I,p}(N, T) &= 1,67 \cdot 10^8 N^{-1} T^{\frac{3}{2}} \quad ; \quad \mu_{Ph,p}(T) = 1,71 \cdot 10^{16} T^{-\frac{5}{2}} = k_2 f_2(T) \end{aligned}$$

viene confrontata con le relazioni empiriche del punto (a) (linee continue).

4.1.6

Si studi l'influenza del fenomeno della saturazione della velocità dei portatori in un resistore realizzato con un campione di silicio drogato di tipo n (si assume che la mobilità in presenza di campi elettrici di piccola intensità sia $\mu_n \simeq 1000$ cm²V⁻¹s⁻¹).

1. *Si disegni la curva della relazione velocità-campo (equazione 4.3) supponendo $v_{\text{sat}} = 10^7$ cm s⁻¹. Si calcoli il campo di soglia \mathcal{E}_{th} nell'approssimazione lineare $v = \mu_n \mathcal{E}$ valida per campi di bassa intensità.*
2. *Si calcoli per confronto la velocità che corrisponde al campo elettrico di soglia valutato nel punto a), usando la relazione (4.3).*
3. *Si scriva l'espressione della conduttanza del resistore e il suo legame con la tensione applicata V . Si descriva l'andamento della corrente I al variare della tensione applicata.*
4. *Si valuti la massima tensione che si può applicare al resistore prima di avere saturazione, nel caso in cui la lunghezza del semiconduttore sia pari a 1 cm o a 1 μ m.*

a)

La curva della velocità degli elettroni nel semiconduttore in funzione del campo elettrico applicato è riportata nella figura 4.4: per campi elettrici \mathcal{E} di piccola intensità, l'andamento è lineare e la mobilità si può considerare costante; per valori elevati del campo, la velocità risulta costante e la mobilità si annulla.

I valori di mobilità forniti per i semiconduttori si riferiscono di solito alla situazione di piccoli campi elettrici e si possono usare approssimativamente fino a un valore di soglia \mathcal{E}_{th} , scelto convenzionalmente in base alla relazione

$$\mu_n \mathcal{E}_{th} = v_{\text{sat}}$$

dove μ_n è il valore di mobilità per $\mathcal{E} = 0$ e v_{sat} è la velocità di saturazione degli elettroni nel semiconduttore. Con una mobilità a basso campo pari a $\mu_n = 1000$ cm²V⁻¹s⁻¹, si ottiene il valore del campo di soglia

$$\mathcal{E}_{th} = \frac{v_{\text{sat}}}{\mu_n} = \frac{10^7}{1000} = 10^4 \frac{\text{V}}{\text{cm}} = 10 \frac{\text{kV}}{\text{cm}}$$

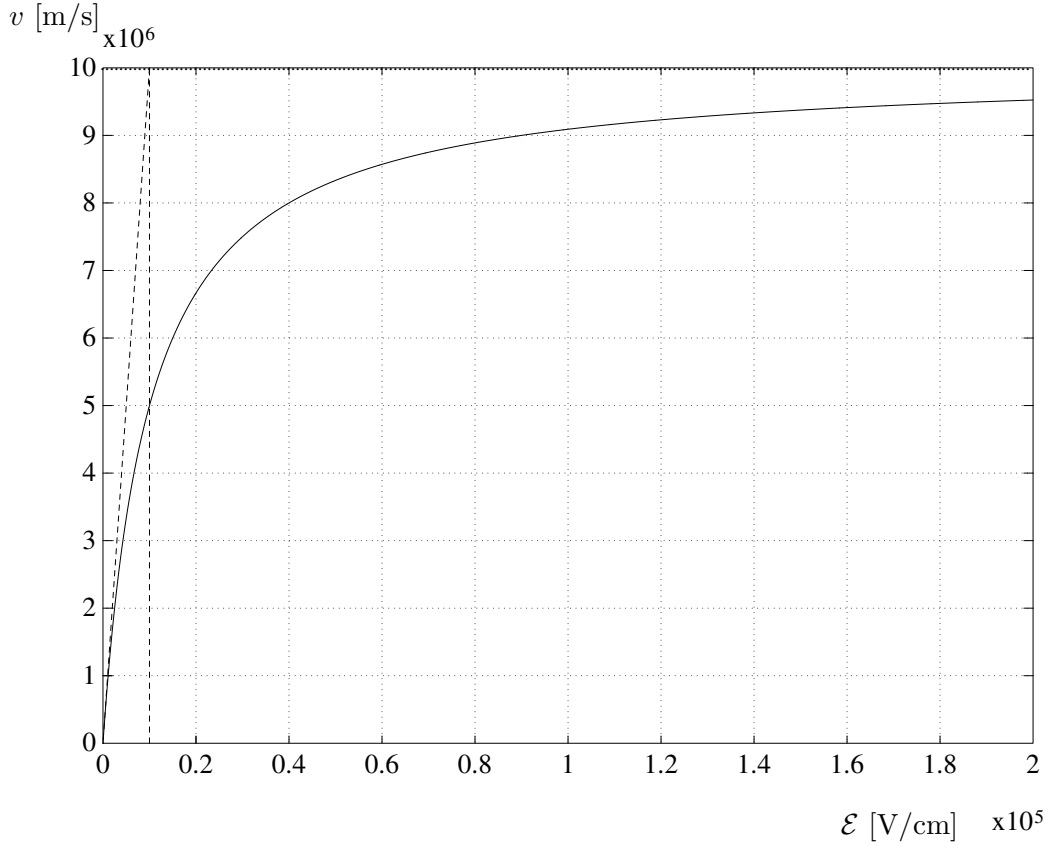


Figura 4.4: Velocità degli elettroni in funzione del campo elettrico.

Il valore di \mathcal{E}_{th} si può ottenere graficamente approssimando l'andamento della velocità nella figura 4.4 con una spezzata, costituita per il primo tratto dalla tangente alla curva passante per l'origine e, per il secondo tratto, da una linea costante di valore pari alla velocità di saturazione (asintoto alla curva della figura). L'ascissa del punto di intersezione tra le due rette dà il valore della soglia convenzionale \mathcal{E}_{th} .

b)

L'equazione [4.2](#) descrive in modo relativamente accurato la dipendenza reale tra campo e velocità:

$$\mu_n(\mathcal{E}) = \frac{\mu_n(0)}{1 + \frac{\mu_n(0) \mathcal{E}}{v_{sat}}}$$

La relazione velocità - campo elettrico si ottiene moltiplicando μ per \mathcal{E} :

$$v(\mathcal{E}) = \frac{\mu_n(0) \mathcal{E}}{1 + \frac{\mu_n(0) \mathcal{E}}{v_{sat}}}$$

Per $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{th}$, la velocità vale $v(\mathcal{E}_{th}) = 1/2 v_{sat}$.

c)

In un semiconduttore drogato di tipo n , la densità di corrente nell'ipotesi di completa ionizzazione e a temperatura ambiente può essere riscritta nella forma

$$J \simeq q\mu_n n \mathcal{E} \simeq q\mu_n N_d \mathcal{E}$$

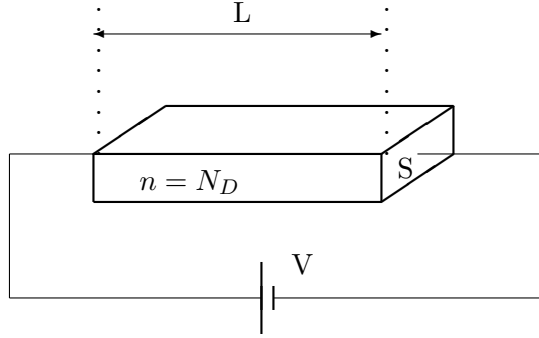


Figura 4.5: Struttura idealizzata del resistore.

Supponendo che il resistore sia come quello idealizzato nella figura 4.5, il campo elettrico che si instaura in presenza di una tensione applicata pari a V e le corrispondenti densità e intensità di corrente sono

$$\mathcal{E} = \frac{V}{L} \quad ; \quad J \simeq q \mu_n N_d \frac{V}{L} \quad ; \quad I \simeq S J = q \mu_n N_d \frac{S}{L} V$$

La conduttanza del resistore può essere espressa come

$$G = \underbrace{q \mu_n N_d}_{\sigma \text{ conducibilità}} \frac{S}{L}$$

Risulta evidente che la conducibilità resta pressoché costante sino a che i valori di tensione sono tali da mantenere il campo elettrico interno al semiconduttore inferiore al campo di soglia \mathcal{E}_{th} . Per valori di potenziale superiori è necessario esprimere la dipendenza della mobilità dal campo elettrico

$$\mu_n = \mu_n(\mathcal{E}) = \mu_n \left(\frac{V}{L} \right)$$

Usando la relazione velocità-campo elettrico del punto b), la conduttanza del resistore può essere scritta nella forma

$$G(V) = q \frac{\mu_n(0)}{1 + \frac{\mu_n(0) V/L}{v_{sat}}} \frac{S}{L} N_d$$

La conduttanza è funzione della tensione V , quindi la corrente è una funzione *non lineare* della tensione applicata, $I(V) = G(V) V$, che asintoticamente assume il valore costante

$$\lim_{V \rightarrow \infty} I(V) = \lim_{V \rightarrow \infty} q \frac{\mu_n(0)}{1 + \frac{\mu_n(0) V/L}{v_{sat}}} \frac{S}{L} N_d V = q v_{sat} N_d S$$

che rappresenta la corrente di “saturazione” di un semiconduttore. La corrente è sostanzialmente indipendente dalla tensione V quando questa superi il valore $\mathcal{E}_{th} L = v_{th}$.

d)

Nei due casi $\mathcal{E}_{th} = 10^4 \text{ V cm}^{-1}$ si ha

$$\begin{aligned} L = 1 \text{ cm} & \quad ; \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_{th} \rightarrow V = 10 \text{ KV} \\ L = 1 \text{ } \mu\text{m} & \quad ; \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_{th} \rightarrow V = 1 \text{ V} \end{aligned}$$

Il fatto che nei circuiti integrati le dimensioni lineari siano dell'ordine del μm indica quanto facilmente i dispositivi integrati possano incorrere nel fenomeno della saturazione di corrente per saturazione della velocità.

4.2 Misure di resistività su semiconduttori drogati uniformemente

La resistività di un campione di semiconduttore è

$$\rho = \frac{1}{q \mu_n n + q \mu_p p} \quad (4.4)$$

Nel caso di semiconduttori drogati a temperatura ambiente, si ha un'ottima approssimazione con la relazione

$$\rho = \frac{1}{q \mu N}$$

dove N è la concentrazione di impurità droganti e μ è la mobilità dei portatori maggioritari.

4.2.1

Sia dato un campione di silicio drogato con $N_d = 5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ atomi di fosforo. a) Si esprima la resistività del campione in funzione della temperatura e se ne calcoli il valore a 300 K, 500 K e 900 K. b) Si valuti inoltre la frazione in peso di atomi droganti rispetto agli atomi di silicio, considerando costante la concentrazione delle impurità ionizzate.

a)

In generale in un semiconduttore la conducibilità è data da

$$\sigma = \mu_n n q + \mu_p p q$$

dove n e p sono legati alla temperatura attraverso la concentrazione dei portatori intrinseci n_i , come risulta dal problema ??:

$$n(T) = \frac{N_d}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2n_i(T)}{N_d} \right)^2} \right] \quad ; \quad p(T) = \frac{n_i^2(T)}{n(T)}$$

dove

$$n_i(T) = \sqrt{N_C N_V} e^{-E_g/2kT} = [N_C(T) N_V(T)]^{\frac{1}{2}} e^{-E_g/2kT}$$

La dipendenza dalla temperatura delle mobilità μ_n e μ_p è invece fornita nelle (4.1) e (4.2). L'andamento risultante della resistività in funzione della temperatura

$$\rho = \frac{1}{\mu_n(T) n(T) q + \mu_p(T) p(T) q}$$

è riportato nella figura 4.6, dalla quale risulta per $T = 300 \text{ K}$ $\rho = 0,122 \Omega \text{ cm}$.

Poiché a 300 K risulta $n_i \ll N_d/2$, le concentrazioni dei portatori maggioritari e minoritari si possono approssimare come

$$n(T) = \frac{n_i^2(T)}{N_d^+(T)} + N_d^+(T) \simeq N_d \quad ; \quad p(T) = \frac{n_i(T)^2}{n} \simeq \frac{n_i(T)^2}{N_d}$$

ρ [Ω cm]

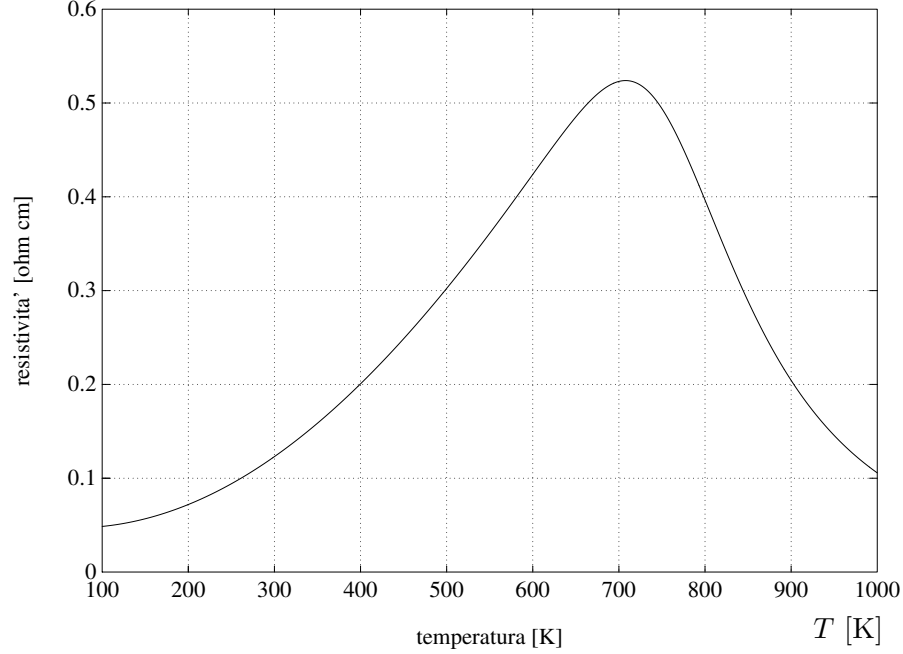


Figura 4.6: Resistività in funzione della temperatura.

A temperatura ambiente si ha quindi $n = 5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ e $p = 4200 \text{ cm}^{-3}$. Dato che i valori assunti da n e p sono separati da 13 ordini di grandezza, nel calcolo della resistività il termine $(\mu_p p q)$ può essere trascurato. Il valore della mobilità degli elettroni, con una concentrazione di atomi droganti N_d pari a $5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$, risulta $\mu_n = 1015 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$; si ha quindi

$$\rho = 0,123 \Omega \text{ cm}$$

in ottimo accordo con il risultato della figura 4.6. A 500 K si ha

$$\begin{aligned} n_i &= 1,8 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3} & , & & n &\simeq 5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3} & , & & p &= 6,5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-3} \\ \mu_n &= 413 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1} & , & & \mu_p &= 164 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

dunque la resistività si può ancora calcolare in modo approssimato come

$$\rho \simeq \frac{1}{q \mu_n N_d} = 0,3 \Omega \text{ cm}$$

Rispetto alla temperatura ambiente, si ha un incremento di ρ , dovuto essenzialmente alla riduzione del valore di mobilità. A 900 K, infine, il numero dei portatori è superiore al valore di N_d e la resistività scende:

$$\begin{aligned} n_i &= 1,4 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3} & , & & n &= 1,7 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3} & , & & p &= 1,2 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3} \\ \mu_n &= 142 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1} & , & & \mu_p &= 64 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1} & , & & \rho &= (q \mu_n n + q \mu_p p)^{-1} = 0,23 \Omega \text{ cm} \end{aligned}$$

b)

La densità del silicio vale $5 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$, quindi nel campione di semiconduttore dato si ha 1 atomo di fosforo ogni

$$\frac{5 \cdot 10^{22}}{5 \cdot 10^{16}} = 1 \cdot 10^6 \text{ atomi di silicio.}$$

Il rapporto in peso fra la concentrazione aggiunta di fosforo e quella di atomi di silicio vale

$$\frac{\text{numero di atomi di P}}{\text{numero di atomi di Si}} \times \frac{\text{peso atomico del P}}{\text{peso atomico del Si}} = \frac{5 \cdot 10^{16}}{5 \cdot 10^{22}} \cdot \frac{31}{28} = 1,107 \cdot 10^{-6}$$

4.2.2

Un campione di semiconduttore di tipo p, drogato con $N_a = 2 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ atomi di boro, subisce un ulteriore processo di diffusione, in cui sono aggiunti $N_d = 3 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ atomi di fosforo. Calcolare il tipo di conduttività (p o n) risultante e il valore di resistività prima e dopo la diffusione di fosforo.

Aggiungendo $N_d = 3 \cdot 10^{17}$ atomi di fosforo al cm^3 , il campione di semiconduttore diventa di tipo n, per effetto della compensazione tra atomi droganti del III e IV gruppo:

$$n \simeq N_d - N_a = 2,8 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$$

La mobilità delle lacune per il semiconduttore di partenza vale $\mu_p = 432,9 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$, da cui

$$\rho_p = \frac{1}{q \mu_p N_a} = 0,72 \Omega \text{ cm}$$

Dopo la diffusione di fosforo la mobilità degli elettroni nel semiconduttore dipende dalla concentrazione totale di atomi droganti, $N = N_a + N_d = 3,2 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$. Si hanno quindi i valori di mobilità $\mu_n = 475 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$, di conducibilità $\sigma = \mu_n n q = 22,8 \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$ e di resistività $\rho = 0,044 \Omega \text{ cm}$

4.2.3

Un campione di silicio puro presenta, alla temperatura di 300 K, una resistività $\rho = 2,39 \cdot 10^5 \Omega \text{ cm}$. Determinare il tipo e la concentrazione di drogaggio per i quali si ottiene il massimo valore possibile di resistività.

La resistività del campione di silicio puro vale (4.4)

$$\rho = \frac{1}{q \mu_n n_i + q \mu_p p_i}$$

dove $n_i = p_i$ è la concentrazione degli elettroni e delle lacune. Assumendo per le mobilità le relazioni (4.1) e (4.2) si hanno a temperatura ambiente i valori

$$\mu_n = 1340 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1} \quad ; \quad \mu_p = 461 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

Noto il valore di resistività, si ricava la concentrazione dei portatori, $n_i = p_i = 1,45 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$.

La resistività è elevata per piccole concentrazioni di drogaggio. Per livelli di drogaggio bassi la variazione della mobilità di elettroni e di lacune in funzione della concentrazione di impurità droganti è quasi nulla. Allora nell'espressione della resistività (4.4) i termini fortemente dipendenti dal drogaggio sono n e p . Poiché la mobilità delle lacune vale circa un terzo di quella degli elettroni, il valore massimo di resistività si ottiene ovviamente con un drogaggio di tipo p di concentrazione bassissima. La conducibilità del materiale in funzione della concentrazione p di lacune si può scrivere come

$$\sigma = q\mu_n \frac{n_i^2}{p} + q\mu_p p$$

e il valore minimo si ottiene derivando rispetto a p ed eguagliando a zero:

$$\frac{d\sigma}{dp} = -q\mu_n \frac{n_i^2}{p^2} + q\mu_p = 0$$

$$p = n_i \sqrt{\frac{\mu_n}{\mu_p}} = 2,47 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$$

Il legame tra la concentrazione di lacune e quella di atomi accettori in un semiconduttore di tipo p ($N_d = 0$) si ottiene dalla coppia di relazioni

$$p - n = N_a \quad ; \quad pn = n_i^2$$

da cui si ha

$$N_a = p - \frac{n_i^2}{p} = 1,62 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$$

Dalle (4.1) e (4.2), è possibile verificare che, per la concentrazione di drogante trovata, le mobilità di elettroni e lacune non mostrano variazioni significative. Il valore massimo assunto dalla resistività è

$$\rho_{\max} = \frac{1}{\sigma_n + \sigma_p} = \frac{1}{1,825 \cdot 10^{-6} + 1,1822 \cdot 10^{-6}} = 2,74 \cdot 10^5 \Omega \text{cm}$$

Si noti che, in realtà, il valore ideale trovato per N_a non ha significato pratico, in quanto concentrazioni così basse di impurità non sono controllabili. Nel silicio le concentrazioni di drogaggio accidentali o di sottofondo possono essere dell'ordine di 10^{12} cm^{-3} .

4.2.4

Le misure di resistività su una fetta di silicio sono normalmente effettuate usando il metodo delle quattro sonde allineate illustrato nella figura 4.7: quattro sonde equispaziate sono poste a contatto con la superficie di silicio, che si suppone uniforme e con buone caratteristiche di isotropia. Le dimensioni del campione in superficie sono da considerarsi di molto superiori rispetto alla separazione s tra le sonde e lo spessore δ è trascurabile rispetto a s . Si suppone inoltre che il contatto delle sonde sulla superficie del silicio sia puntiforme e abbia un comportamento ohmico. Le sonde si considerano lontane dai confini laterali del campione di silicio.

1. Dimostrare che, indicando con I la corrente che scorre tra le sonde 1 e 4, e con V la tensione misurata tra i contatti 2 e 3, la resistività del materiale si può valutare con la relazione

$$\rho = \frac{\pi \delta}{\ln(2)} \frac{V}{I}$$

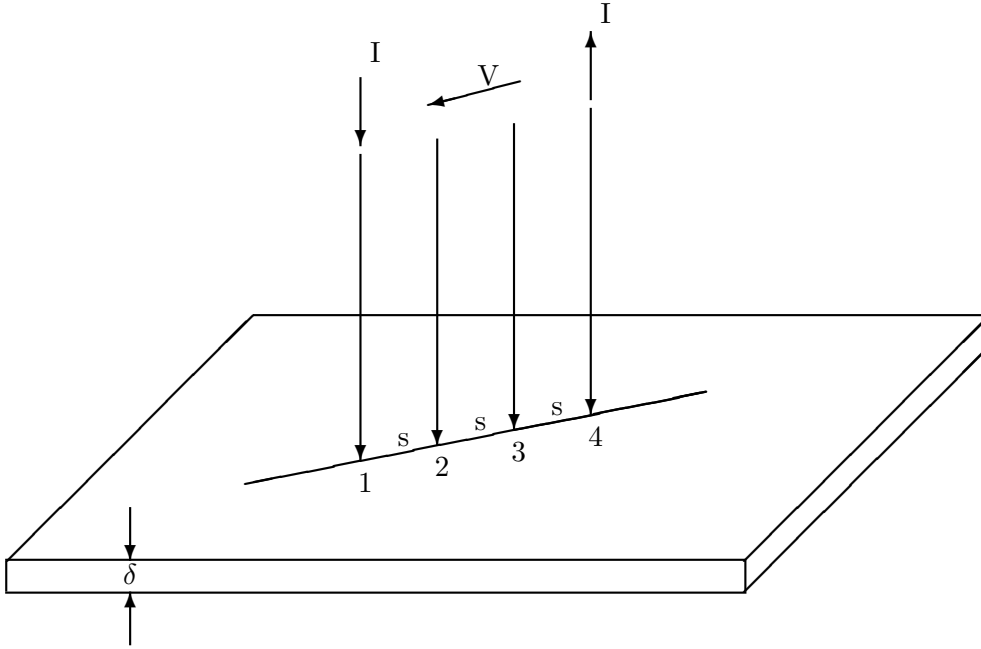


Figura 4.7: Misura di resistività su fetta.

2. Sapendo che la tensione V misurata è pari a 3,5 V e che la corrente iniettata nella sonda 1 è di 30 mA, calcolare la resistenza per quadro di un campione di silicio avente uno spessore $\delta = 200 \mu\text{m}$.

a)

Poiché $\delta \ll s$ e la distanza tra le sonde è molto più piccola delle dimensioni planari della fetta, questa può essere considerata come un foglio di estensione infinita e spessore infinitesimo, ovvero come un campione bidimensionale. Inoltre, essendo il mezzo omogeneo e isotropo, la corrente avrà una simmetria radiale intorno ai punti di contatto delle sonde 1 e 4, come indicato nella figura 4.8.

La densità di corrente tra le sonde, a una distanza r_1 dalla sonda 1, può allora essere espressa come ⁷

$$J(r_1) = \frac{I}{2\pi r_1 \delta} + \frac{I}{2\pi r_4 \delta}$$

dove $r_4 = 3s - r_1$.

La differenza di potenziale V tra le sonde 2 e 3 si può allora calcolare con

$$V = \int_s^{2s} J(r) \rho dr = \rho \frac{I}{2\pi\delta} (\ln(2s) - \ln(s) - \ln(s) - \ln(2s)) = \rho \frac{I}{2\pi\delta} 2\ln(2)$$

Nota la tensione V misurata tra le due sonde, si può valutare la resistività del silicio

$$\rho = \frac{V}{I} \frac{\pi\delta}{\ln(2)}$$

⁷Si considerino separatamente le due situazioni seguenti: 1) la corrente I è immessa tramite la sonda 1 nel mezzo semiconduttore e raccolta a distanza infinita; 2) la corrente I è prelevata dalla sonda 4 e immessa nel semiconduttore a distanza infinita. L'espressione della densità di corrente misurata tra le due sonde si ottiene per sovrapposizione degli effetti dalle densità relative alle due situazioni indicate.

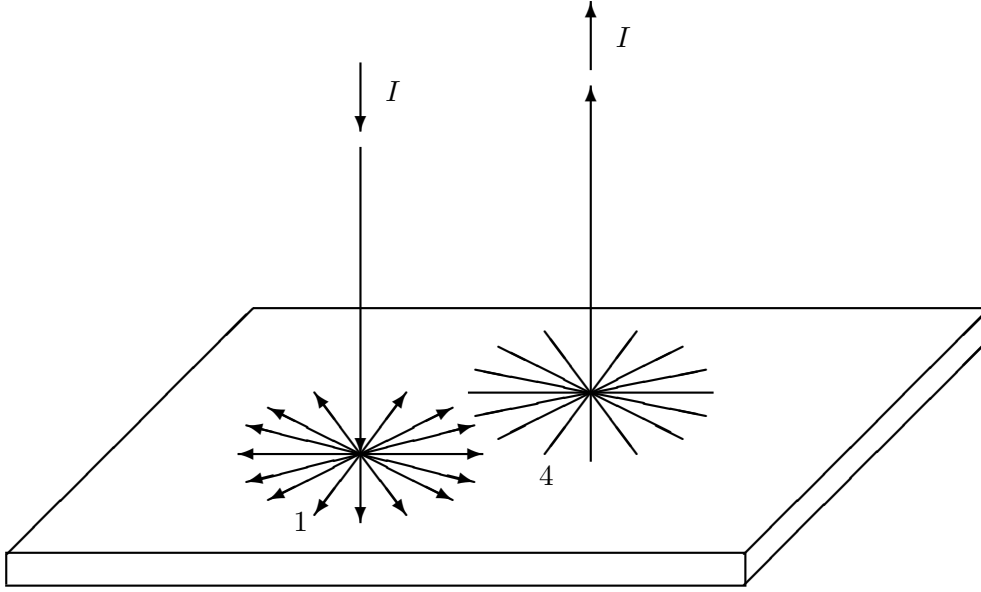


Figura 4.8: Linee di corrente in un campione bidimensionale.

b)

La resistenza per quadro (Ω/\square) di un campione di silicio di spessore δ è la resistenza offerta da una porzione quadrata di lato arbitrario e si calcola come rapporto tra la resistività del materiale e lo spessore. Nel caso presente si ha

$$\rho = \frac{3,5}{3010^{-3}} \frac{\pi 200 \cdot 10^{-4}}{\ln(2)} = 10,6 \Omega \text{ cm}$$

$$R_s = \frac{\rho}{\delta} = 529 \Omega$$

4.2.5

Nella figura 4.9 è indicata la disposizione sperimentale mediante la quale può essere misurata la resistività di un campione di semiconduttore, sfruttando l'effetto Hall. Si ricavi un'espressione che permetta di stimare il valore della resistività a partire dal campo magnetico di induzione magnetica B e dalla corrente I . Calcolare inoltre resistività e resistenza superficiale nel caso $B = 1 \text{ T}$, $I = 3 \text{ A}$, $V_H = 5 \text{ V}$ e $t = 8 \mu\text{m}$.

Supponendo che il campione di semiconduttore in questione sia di tipo p, ogni portatore in moto con velocità v_d nella direzione x è soggetto a una forza in direzione $-y$ esprimibile come

$$F = q v_d B$$

Lo spostamento di cariche positive che ne risulta produce la differenza di potenziale V_H misurata e dunque un campo elettrico \mathcal{E}_y . In condizioni di equilibrio si ha

$$q \mathcal{E}_y = q v_d B = q \frac{J_x}{q p} B$$

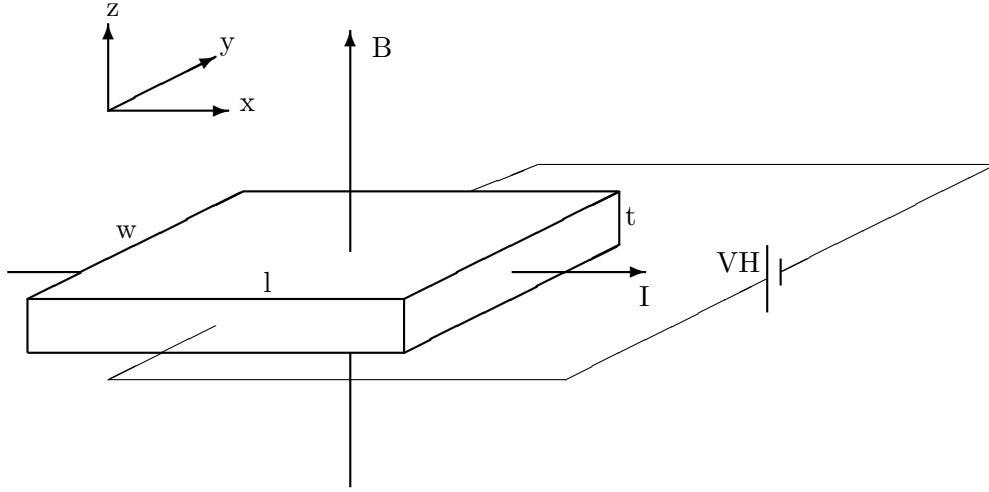


Figura 4.9: Misura di resistività mediante effetto Hall.

dove J_x è la densità di corrente longitudinale nel campione di semiconduttore e p è la concentrazione delle lacune. Indicando con w e t larghezza e spessore del campione, il campo \mathcal{E}_y si può scrivere come

$$\mathcal{E}_y = \frac{J_x B}{q p} = R_H J_x B = R_H \frac{I B}{w t}$$

avendo definito $R_H = 1/q p$ (coefficiente di Hall). La tensione di Hall misurata può essere espressa in funzione del campo magnetico trasversale B e della corrente continua I secondo la

$$V_H = - \int_0^w \mathcal{E}_y dy = R_H \frac{I B}{t}$$

da cui può essere calcolata la resistività

$$\rho = \frac{1}{q \mu_p p} = \frac{t V_H}{\mu_p I B}$$

Nel caso numerico in esame è $p = 4,69 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ e $\rho = 6,6 \cdot 10^{-2} \Omega \text{ cm}$, con una mobilità pari a $\mu_p = 202 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$.

4.2.6

Su di un substrato intrinseco, è realizzato mediante diffusione un resistore integrato. Si idealizzi il componente come una striscia a concentrazione N_d di drogante uniforme, lunga 1 mm, larga $2 \mu\text{m}$ e profonda $1 \mu\text{m}$. Se $N_d = 5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$, si calcoli il valore di resistenza a 300 K, nel caso che il semiconduttore sia silicio, germanio e arseniuro di gallio.

4.2.7

Si vuole realizzare un resistore integrato in silicio, del valore di 1 k Ω . Supponendo costante la concentrazione di drogante entro la zona diffusa e sapendo che la tecnologia a disposizione consente dimensioni minime delle maschere pari a $2 \mu\text{m}$ e profondità di diffusione di $1 \mu\text{m}$, si progetti e disegni un resistore di ingombro minimo.

4.3 Correnti di diffusione

La corrente di diffusione è proporzionale al gradiente della concentrazione dei portatori attraverso la costante di diffusione; indicando con A l'area della sezione attraversata dalla corrente e con $q = q_p = -q_n$ la carica elettrica elementare, si ha

$$\begin{aligned} I_n &= -q_n A D_n \nabla n = q A D_n \nabla n \\ I_p &= -q_p A D_p \nabla p = -q A D_p \nabla p \end{aligned}$$

dove D_n e D_p sono le costanti di diffusione (o diffusività) di elettroni e lacune, legate, almeno per semiconduttori non degeneri e per bassi campi elettrici, alla mobilità mediante le relazioni di Einstein

$$D_n = \frac{kT}{q} \mu_n \quad ; \quad D_p = \frac{kT}{q} \mu_p$$

In una dimensione, x , si ha

$$\begin{aligned} I_n &= q A D_n \frac{dn}{dx} \\ I_p &= -q A D_p \frac{dp}{dx} \end{aligned}$$

4.3.1

Si consideri un campione di silicio con drogaggio N_d , di lunghezza $50 \mu\text{m}$, al quale a 300 K siano applicati 5 V . Si assuma che vi sia una concentrazione di lacune, differente da quella all'equilibrio termodinamico, con distribuzione lineare $p(x) = p_{n0}(1 + ax)$.

Si determini per le concentrazioni di drogante: a) 10^{14} cm^{-3} ; b) 10^{16} cm^{-3} e c) 10^{18} cm^{-3} , il valore della pendenza a per cui la corrente di diffusione dei portatori minoritari diventa confrontabile con quella di trascinamento dei portatori maggioritari.

La presenza di un gradiente nella concentrazione dei portatori in un semiconduttore genera correnti di *diffusione*

$$\begin{aligned} J_{n,\text{diff}} &= q D_n \frac{\partial n(x)}{\partial x} \\ J_{p,\text{diff}} &= -q D_p \frac{\partial p(x)}{\partial x} \end{aligned}$$

Il valore di a per cui la corrente di trascinamento dei portatori maggioritari eguaglia (in modulo) la corrente di diffusione di lacune deve soddisfare la relazione

$$\begin{aligned} q D_p \frac{\partial p(x)}{\partial x} &= q n(x) \mu_n \mathcal{E} \\ q D_p p_{n0} a &= q N_d \mu_n \mathcal{E} \end{aligned}$$

Da cui applicando la relazione di Einstein si ottiene

$$a = \frac{N_d \mu_n \mathcal{E}}{\mu_p V_T p_{n0}} = \left(\frac{N_d}{n_i} \right)^2 \frac{\mu_n}{\mu_p} \frac{V}{L V_T}$$

Numericamente si ha:

N_d cm^{-3}	μ_n $\text{cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$	μ_p $\text{cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1} \text{cm}^{-1}$	$ a $ cm^{-1}
10^{14}	1375	500	$5,03 \cdot 10^{12}$
10^{16}	1250	400	$5,72 \cdot 10^{16}$
10^{18}	275	100	$5,03 \cdot 10^{20}$

Come si vede dalla tabella, per compensare concentrazioni crescenti di impurità droganti occorrono gradienti di portatori minoritari che crescono in modo proporzionale al quadrato di N_d : infatti la corrente di trascinamento è circa proporzionale a N_d , mentre p_{n0} e quindi la corrente di diffusione sono inversamente proporzionali a N_d .

4.3.2

In un semiconduttore di tipo n (livello di drogaggio $N_d = 5 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$, lunghezza $L = 10 \text{ }\mu\text{m}$), le concentrazioni dei portatori mantengono i seguenti andamenti

$$n(x) = N_d + \frac{N_d}{L}x \quad ; \quad p(x) = \frac{n_i^2}{N_d} + \frac{N_d}{L}x$$

Si calcolino le densità di corrente di diffusione dei portatori maggioritari e minoritari. Supponendo inoltre la presenza di un campo elettrico costante pari a $\mathcal{E} = 12 \text{ V cm}^{-1}$, si calcolino le densità delle correnti di trascinamento e si confrontino tra di loro le 4 componenti di corrente.

Le correnti di diffusione nel semiconduttore risultano costanti in x e sono date da

$$J_{nd} = q D_n \frac{N_d}{L} \quad ; \quad J_{pd} = -q D_p \frac{N_d}{L}$$

Occorre quindi calcolare i valori delle diffusività

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{kT}{q} \mu_n = \frac{kT}{q} 367 = 9,54 \text{ cm}^2 \text{s}^{-1} \\ D_p &= \frac{kT}{q} \mu_p = \frac{kT}{q} 196 = 5,09 \text{ cm}^2 \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

che si suppongono costanti con x . La corrente di diffusione dei portatori maggioritari risulta confrontabile con quella dei portatori minoritari

$$J_{nd} = 763,2 \text{ A cm}^{-2} \quad ; \quad J_{pd} = -407,2 \text{ A cm}^{-2}$$

Le correnti di trascinamento sono invece fortemente sbilanciate, essendo la concentrazione degli elettroni molto maggiore di quella delle lacune

$$\begin{aligned} J_{nt} &= q n \mu_n \mathcal{E} = q 5 \cdot 10^{17} 367 \mathcal{E} = 356 \text{ A cm}^{-2} \\ J_{pt} &= q \frac{n_i^2}{n} \mu_p \mathcal{E} = q 420 196 \mathcal{E} = 1,5 \cdot 10^{-13} \text{ A cm}^{-2} \end{aligned}$$

Si noti come il valore del campo elettrico \mathcal{E} sia stato scelto in modo che la corrente totale di trascinamento sia confrontabile con quella totale di diffusione.

4.4 Equazioni di trasporto

4.4.1

Per il semiconduttore del problema 4.3.1 si calcolino le correnti totali nei tre casi considerati.

In un semiconduttore la corrente totale è costituita da quattro componenti, due di trascinamento e due di diffusione⁸. Le equazioni che forniscono le correnti totali di elettroni e di lacune sono dette di *trasporto*

$$\begin{aligned} J_n &= q\mu_n n \mathcal{E} + qD_n \frac{dn}{dx} \\ J_p &= q\mu_p p \mathcal{E} - qD_p \frac{dp}{dx} \end{aligned}$$

Nel caso in esame danno contributo alla corrente totale la corrente di trascinamento degli elettroni e quella di diffusione delle lacune:

$$\begin{aligned} J_{\text{tot}} &\simeq q\mu_n N_d \mathcal{E} - qD_p \frac{dp}{dx} \\ J_{\text{tot}} &\simeq q\mu_n N_d \mathcal{E} - qD_p a p_{n0} \end{aligned}$$

Numericamente si ottiene:

	N_d cm^{-3}	$J_{n,\text{tr.}}$ A/cm^2	$J_{p,\text{diff.}}$ A/cm^2	J_{tot} A/cm^2
a)	10^{14}	22	22	44
b)	10^{16}	2000	22	4000
c)	10^{18}	44000	22	88000

4.4.2

Nella figura 4.10 viene idealizzato il canale di tipo *n* di un transistor MOSFET (capitolo 11) al silicio avente lunghezza $L=3\text{ }\mu\text{m}$). Tra gli estremi del canale, 1 e 2, è applicata una differenza di potenziale pari a $V_{21} = 5\text{ V}$. Si calcoli il valore di concentrazione di n_1 per il quale la corrente di trascinamento⁹ eguaglia la componente di diffusione, sapendo che $n_2 - n_1 = 4 \cdot 10^{13}\text{ cm}^{-3}$, $\mu_n = 600\text{ cm}^2\text{ V}^{-1}\text{ s}^{-1}$, $D_n = 30\text{ cm}^2\text{ s}^{-1}$. Si calcoli inoltre la corrispondente densità di corrente.

Nota: la situazione in esame descrive la condizione reale per la quale in un MOSFET la corrente, che è prevalentemente di trascinamento, diventa per basse tensioni di gate corrente di diffusione (fenomeno della conduzione sottosoglia).

La corrente di trascinamento è data dalla

$$I_t = A q n_1 \mu_n \frac{V_{21}}{L}$$

mentre la corrente di diffusione è esprimibile come

$$I_d = A q D_n \frac{dn}{dx} \simeq A q D_n \frac{n_2 - n_1}{L}$$

⁸A parte la corrente di spostamento dielettrico che interviene a frequenze elevate.

⁹Per il calcolo della corrente di trascinamento si consideri solamente la concentrazione n_1 costante lungo il canale.

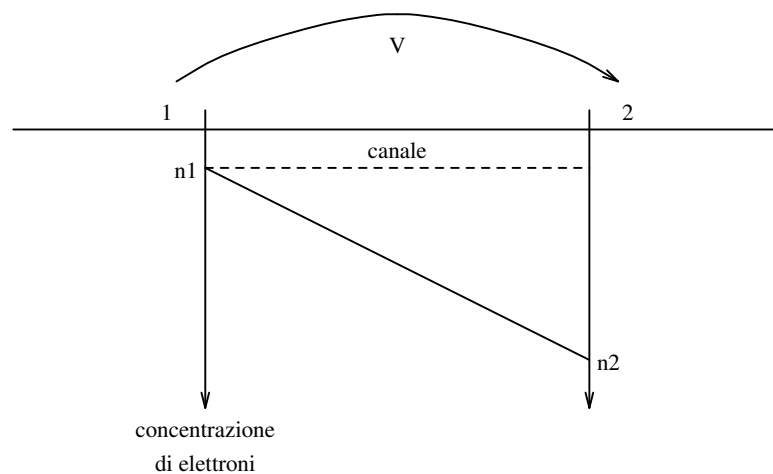


Figura 4.10: Struttura idealizzata relativa alla distribuzione di elettroni nel canale di un MOSFET.

Imponendo l'eguaglianza delle due correnti, si ricava n_1

$$n_1 = \frac{D_n (n_2 - n_1)}{\mu_n V_{21}} = 4 \times 10^{11} \text{ cm}^{-3}$$

La densità di corrente vale quindi

$$J_t = J_d = q D_n \frac{dn}{dx} = q n_1 \mu_n \frac{V_{12}}{L} \simeq 0,064 \text{ A cm}^{-2}$$

Capitolo 5

Modello dei semiconduttori fuori dall'equilibrio

In questo capitolo si prendono in esame i fenomeni di generazione e ricombinazione, di diffusione e di trasporto, che modificano le concentrazioni di elettroni e di lacune in un semiconduttore. L'effetto complessivo è governato dalle equazioni di continuità. Associando a tali relazioni l'equazione di Poisson, si ottiene un modello matematico di base per lo studio dei semiconduttori fuori equilibrio.

Il modello è fortemente non lineare, pertanto non è possibile una soluzione generale esatta, a meno di introdurre ipotesi semplificative e approssimazioni.

Il modello viene applicato a un certo numero di casi di interesse pratico, come quello di un semiconduttore in cui si abbia un eccesso di portatori localizzato. Si definisce un metodo generale di analisi e si chiariscono le ipotesi sotto le quali sia possibile pervenire a soluzioni analitiche.

L'ipotesi di quasi neutralità gioca un ruolo fondamentale nella possibilità di risolvere in forma chiusa il modello, pertanto è necessario valutarne i limiti di validità. A questo proposito si prende in esame il comportamento di un materiale semiconduttore quando subisce piccoli scostamenti, nello spazio e nel tempo, dalla sua condizione di neutralità.

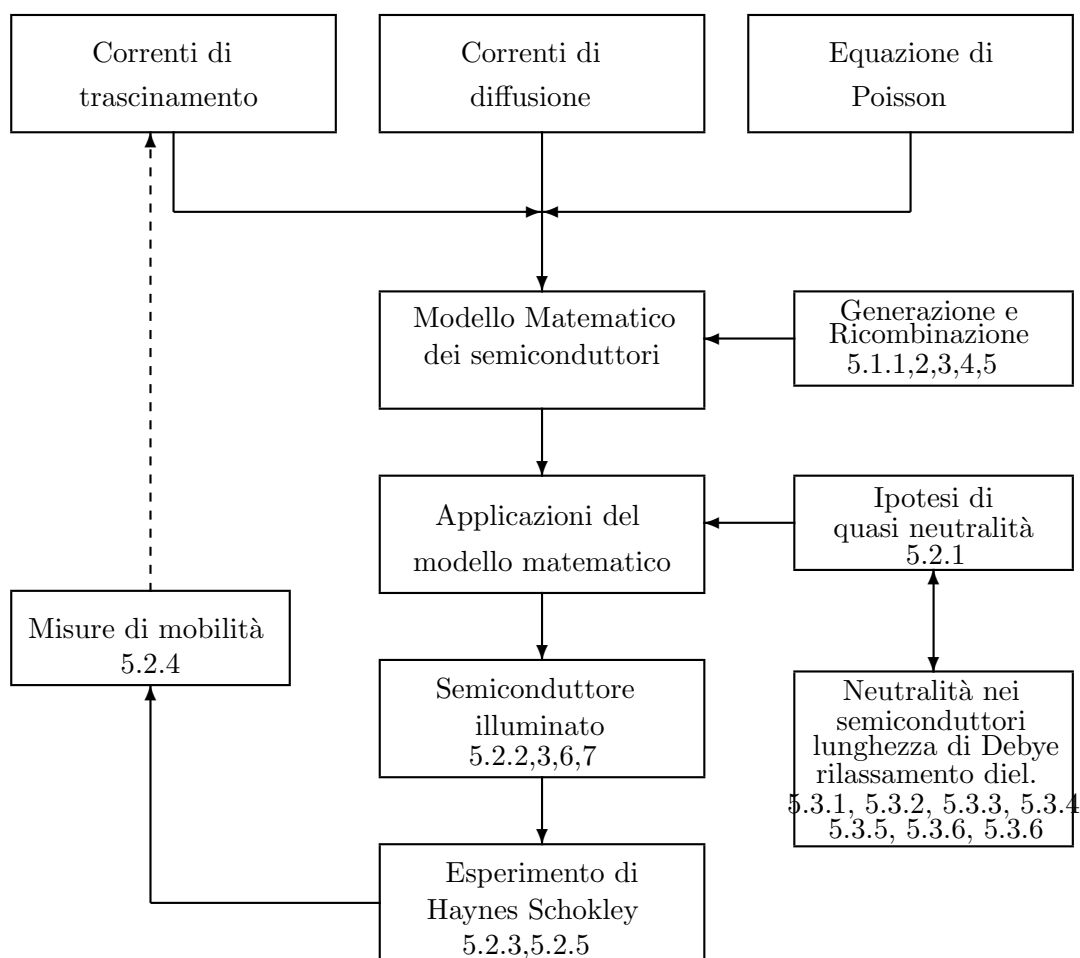


Figura 5.1: Struttura del capitolo 5.

Generazione e ricombinazione

Il numero degli elettroni e delle lacune in un semiconduttore è il risultato dell'equilibrio dei due fenomeni opposti di generazione e di ricombinazione. Tali fenomeni sono definiti mediante le grandezze seguenti:

- *velocità di generazione* G = numero dei portatori generati a coppie nell'unità di tempo e di volume;
- *velocità di ricombinazione* R = numero dei portatori che si ricombinano a coppie nell'unità di tempo e di volume;
- *velocità netta di ricombinazione* $U = R - G$.

La generazione di coppie elettrone-lacuna è conseguenza dell'assorbimento di energia sufficiente a rompere legami covalenti. L'energia può essere termica (dipendente da T), oppure acquisita da fotoni oppure da portatori ad alta energia (generazione per urto).

La ricombinazione è il fenomeno casuale di ricomposizione di legami covalenti per l'incontro elettrone-lacuna; R è proporzionale alle densità dei portatori.

Il *tempo di vita media* degli elettroni (τ_n) o delle lacune (τ_p) è il tempo che trascorre in media prima che un portatore scompaia per ricombinazione.

Transizione diretta banda-banda. L'assorbimento di energia $E > E_g$ da parte di un semiconduttore provoca il passaggio di un elettrone dalla banda di valenza a quella di conduzione. Nascono in coppia un elettrone libero e una lacuna libera. Avvenuta

la generazione, elettroni e lacune, che si trovano a energie superiori, si portano ai minimi delle rispettive bande emettendo *fononi*¹. Elettroni e lacune si muovono quindi liberamente nel cristallo per un tempo medio (vita media τ_n e τ_p) prima di ricombinarsi liberando un'energia pari a E_g , che viene trasferita o a un fotone oppure al cristallo (fonone) o ancora ad altri portatori.

Nel caso di generazione termica ($G = G_{th}$) è²

$$U^{bb} = R - G_{th} = r (pn - n_i^2) \quad (5.1)$$

dove r è il coefficiente di ricombinazione, dipendente dalle sezioni di cattura dei portatori; il tempo di vita dei portatori minoritari si scrive

$$\tau_{min} = \frac{1}{r N} \quad (5.2)$$

dove N è la concentrazione netta di atomi droganti; il tempo di vita dei portatori maggioritari è molto superiore.

Transizione mediante centri di ricombinazione. Il passaggio dalla banda di conduzione alla banda di valenza, e viceversa, avviene con l'aiuto di livelli intermedi, che sempre esistono nel semiconduttore introdotti da impurità o da imperfezioni reticolari (*trappole*). Si hanno livelli poco profondi (*shallow*), se prossimi a una delle due bande, oppure profondi (*deep*), se vicini al centro della banda proibita.

Nel caso di generazione termica la velocità netta di ricombinazione è data dalla formula di Shockley-Read-Hall (SRH)

$$U^t = \frac{p n - n_i^2}{\tau_{n0} \left[p + n_i \exp\left(\frac{E_i - E_t}{kT}\right) \right] + \tau_{p0} \left[n + n_i \exp\left(\frac{E_t - E_i}{kT}\right) \right]} \quad (5.3)$$

dove N_t è la concentrazione delle trappole, E_t è il loro livello energetico. Inoltre

$$\tau_{n0} = (N_t v_{th} \sigma_n)^{-1} ; \quad \tau_{p0} = (N_t v_{th} \sigma_p)^{-1} \quad (5.4)$$

dove σ_n e σ_p sono le aree che i centri di cattura presentano agli elettroni e alle lacune rispettivamente.

Generazione per urto. Per quanto concerne la generazione in cui l'energia viene fornita da altri portatori a grande energia, di notevole interesse è il caso della generazione per urto in cui i portatori cedono l'energia acquisita dal campo elettrico. La velocità di generazione di coppie dovuta a ionizzazione per urto è

$$G_{urto} = \alpha_n n v_n + \alpha_p p v_p = \frac{1}{q} (\alpha_n |J_n| + \alpha_p |J_p|) \quad (5.5)$$

dove α_n (α_p) è la velocità di ionizzazione per l'elettrone (la lacuna), cioè il numero di coppie elettrone-lacuna generato da un elettrone (lacuna) per unità di percorso. Le velocità di ionizzazione dipendono molto dal campo elettrico \mathcal{E} ; è stata proposta la formula empirica

$$\alpha = A \exp[-(b/\mathcal{E})^m] \quad (5.6)$$

dove, esprimendo \mathcal{E} in V/cm e alla temperatura ambiente ($T = 300K$), si ha

¹Fenomeno di rilassamento vibrazionale.

²Si tratta del tipico fenomeno attraverso cui alcuni semiconduttori (*a gap diretto*, quali il GaAs e InP) emettono fotoni; la transizione è detta ottica.

	Silicio		GaAs
	elettrone	lacuna	elettr. e lacune
$A \text{ (cm}^{-1}\text{)}$	$3,8 \cdot 10^6$	$2,25 \cdot 10^7$	$3,5 \cdot 10^5$
$b \text{ (V/cm)}$	$1,75 \cdot 10^6$	$3,26 \cdot 10^6$	$6,85 \cdot 10^5$
m	1	1	2

oppure, definendo il campo di validità, si ottengono maggiori precisioni: per esempio per il GaAs nell'intervallo di campo elettrico $(3,33 \div 5,56) \cdot 10^5 \text{ V/cm}$ è

GaAs	elettroni		lacune
A	$7,76 \cdot 10^4$	A	$6,31 \cdot 10^6$
b	$4,45 \cdot 10^5$	b	$2,31 \cdot 10^6$
m	6,91	m	1

Per il silicio a 300 K, ottima aderenza con i risultati sperimentali si ha con l'espressione

$$\alpha = A' \mathcal{E} \exp \left[- (b/\mathcal{E})^2 \right]$$

dove

Silicio	elettroni	lacune
$A' \text{ [v}^{-1}\text{]}$	0,426	0,243
$b \text{ [V/cm]}$	$4,81 \cdot 10^5$	$6,53 \cdot 10^5$

Per maggiore semplicità di calcolo si usano anche approssimazioni meno corrette del tipo (per il GaAs)

$$\alpha = 0,1465 \cdot 10^4 \left(\frac{\mathcal{E}}{4 \cdot 10^5} \right)^6 \text{ cm}^{-1}$$

Generazione per opera di fotoni. Nel caso di fotoni con energia superiore alla banda proibita la densità dei fotoni (numero di fotoni al secondo e al cm^2) nel semiconduttore varia con la penetrazione x come $\Phi = \Phi_0 \exp(-\alpha x)$, dove α è il coefficiente di assorbimento (funzione della lunghezza d'onda). La velocità di generazione di coppie elettrone-lacuna dovuta a fotoni è

$$G_{\text{ott}} = \Phi_0 \alpha e^{-\alpha x} \quad (5.7)$$

Non equilibrio e basso livello di iniezione

Il sistema è all'equilibrio termodinamico se non ha alcuno scambio energetico con l'esterno. Un qualunque dispositivo elettronico lavora in regime di non equilibrio, in quanto opera trasformazioni di energia.

Ogni causa di non equilibrio fa variare le concentrazioni dei portatori. Si definiscono delle *concentrazioni in eccesso*:

$$n' = \Delta n = n - n_0 \quad (5.8)$$

$$p' = \Delta p = p - p_0 \quad (5.9)$$

Se le concentrazioni in eccesso, che per la condizione di neutralità sono approssimativamente eguali ($n' \simeq p'$), sono positive si ha un fenomeno di *iniezione*, se sono negative si ha un fenomeno di *svuotamento*.

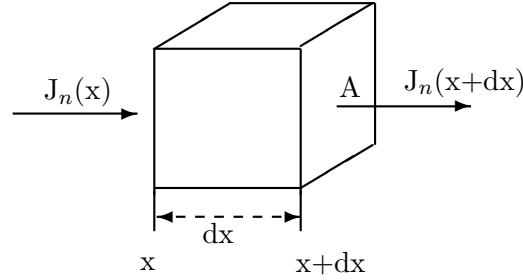


Figura 5.2: Elemento infinitesimo di semiconduttore di volume $A \cdot dx$.

Se le concentrazioni in eccesso, pur essendo grandi rispetto alle concentrazioni dei portatori minoritari, sono però trascurabili rispetto alle concentrazioni dei portatori maggioritari si dice che si è in condizioni di *basso livello di iniezione*.

Pseudo-livelli di Fermi

Se il sistema non è all'equilibrio termodinamico non vale più la statistica di Fermi-Dirac e quindi non è corretto parlare di livello di Fermi. Con popolazioni di elettroni e lacune in equilibrio il livello di Fermi costituisce una specie di “*baricentro*” delle popolazioni, cioè se cresce la popolazione degli elettroni il livello si alza, se cresce quella delle lacune si abbassa.

Fuori equilibrio le popolazioni di entrambi i tipi crescono o diminuiscono simultaneamente, quindi, ove fosse corretto parlarne, il livello di Fermi dovrebbe contemporaneamente alzarsi e abbassarsi. Si può supporre che, spezzato l'equilibrio tra elettroni e lacune, sussista per ciascuna delle due popolazioni, considerate separatamente, una condizione di equilibrio. Si definisce allora uno *pseudo-livello di Fermi* per gli elettroni E_{Fn} e uno per le lacune E_{Fp} , tali che

$$\begin{cases} n = n_i e^{(E_{Fn} - E_{Fi})/kT} \\ p = p_i e^{(E_{Fi} - E_{Fp})/kT} \end{cases}$$

e si dimostra che, se si applica una tensione esterna V_a , si ha

$$E_{Fn} - E_{Fp} = qV_a$$

Dato che il sistema è fuori dell'equilibrio non è più $np = n_i^2$, ma

$$np = n_i^2 e^{(E_{Fn} - E_{Fp})/kT} = n_i^2 e^{V_a/V_T}$$

dove $V_T = kT/q$ è l'equivalente in tensione della temperatura.

Equazione di continuità Le concentrazioni degli elettroni e delle lacune sono funzioni del punto e del tempo, $n(x, y, z, t)$ e $p(x, y, z, t)$, in quanto variano per opera dei fenomeni di generazione e ricombinazione e degli spostamenti di cariche legate ai flussi per diffusione (corrente di diffusione) o per effetto del campo elettrico (corrente di trascinamento)³.

Per ottenere la legge che regola le variazioni spaziali e temporali del numero di portatori, si fa riferimento a un cubetto di semiconduttore di spessore dx e di area della sezione trasversale A (fig. 5.2). La conservazione delle cariche elettriche all'interno del volume infinitesimo $A dx$ permette di ottenere l'equazione di continuità per gli elettroni e le lacune. La variazione del numero di cariche nel tempo è determinata dal bilancio delle cariche entranti, uscenti e legate a fenomeni di generazione e di ricombinazione

³Nel caso di campo variabile si ha anche una corrente di spostamento dielettrico, il cui valore è però trascurabile a bassa frequenza.

all'interno del volume. Se si considera per esempio il caso degli elettroni e si indicano con G_n e R_n il numero di elettroni che nell'unità di tempo e di volume vengono generati e si ricombinano, si ha

$$dx A \frac{\partial n}{\partial t} = \left[\frac{J_n(x)}{-q} - \frac{J_n(x+dx)}{-q} \right] A + (G_n - R_n) A dx$$

Sviluppando in serie la densità di corrente in $x + dx$

$$J_n(x+dx) = J_n(x) + \frac{\partial J_n}{\partial x} dx + \dots$$

arrestato lo sviluppo al termine del 1° ordine e sostituendo nell'equazione di conservazione si ottiene

$$A dx \frac{\partial n}{\partial t} = \left[\frac{J_n(x)}{-q} - \frac{J_n(x)}{-q} - \frac{\partial J_n}{\partial x} \frac{dx}{-q} \right] A + (G_n - R_n) A dx$$

$$A dx \frac{\partial n}{\partial t} = A \frac{1}{q} \frac{\partial J_n}{\partial x} dx + (G_n - R_n) A dx$$

da cui, eliminando $A dx$ da entrambi i membri, si ottiene l'equazione di continuità per gli elettroni:

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{q} \frac{\partial J_n}{\partial x} + (G_n - R_n)}$$

Analogamente per le lacune si ottiene:

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{q} \frac{\partial J_p}{\partial x} + (G_p - R_p)}$$

Modello matematico dei semiconduttori

I tre strumenti analitici sinora introdotti

- le equazioni di trasporto,
- le equazioni di continuità,
- l'equazione di Poisson,

possono costituire un sistema completo di equazioni per lo studio dei semiconduttori; si tratta di un modello matematico detto di trascinamento-diffusione (*drift-diffusion*). L'interdipendenza tra le grandezze è evidenziato nel caso monodimensionale nella figura 5.3. L'applicazione disgiunta di queste equazioni, come si è fatto talora in precedenza, richiede di conoscere a priori alcune grandezze del problema, quali le distribuzioni di carica o l'intensità del campo elettrico.

Le equazioni di continuità insieme con quelle di trasporto legano le concentrazioni n e p con il campo elettrico \mathcal{E} . Quest'ultimo entra anche nella determinazione della mobilità e della diffusività, $\mu(\mathcal{E})$ e $D(\mathcal{E})$, che dipendono dall'intensità del campo elettrico.

L'equazione di Poisson mette in relazione la distribuzione di carica e il potenziale ϕ

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

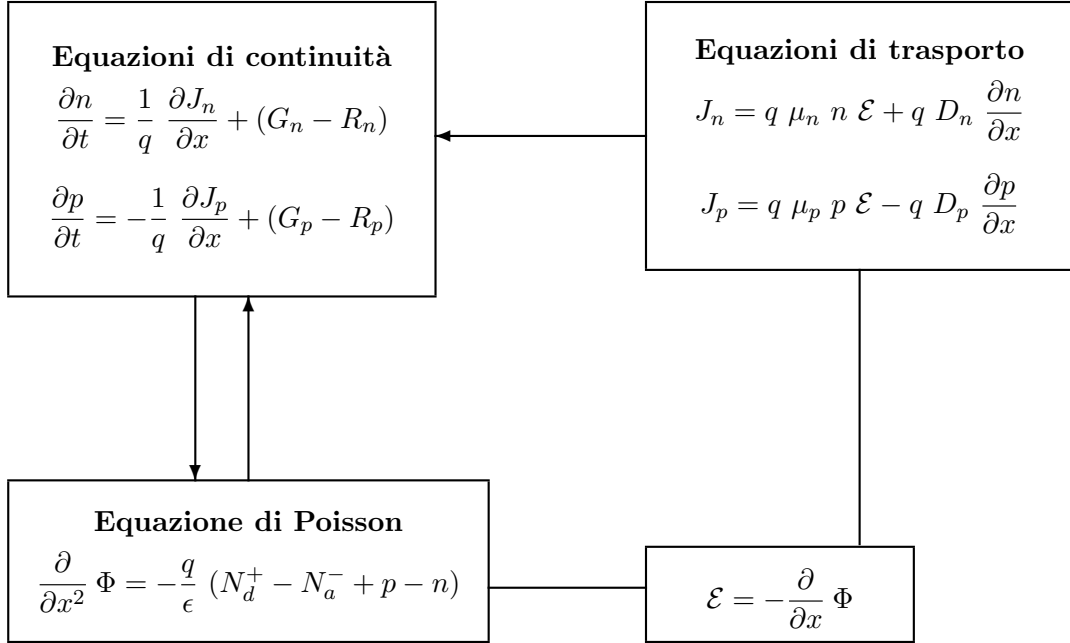


Figura 5.3: Modello matematico dei semiconduttori.

dove ρ è la carica volumica

$$\rho = p - n + N_d^+ - N_a^-$$

L'intensità di campo elettrico ⁴ è

$$\mathcal{E} \equiv -\nabla \phi$$

In definitiva anche l'equazione di Poisson mette in relazione le due concentrazioni di portatori e il campo elettrico. Il sistema completo si presenta dunque con 3 equazioni nelle 3 incognite $p(\mathbf{r}, t)$, $n(\mathbf{r}, t)$ e $\phi(\mathbf{r}, t)$. Il sistema deve essere risolto imponendo condizioni ai limiti (iniziali e al contorno).

La soluzione analitica di questo modello, anche in casi elementari, non è trattabile in forma chiusa, ma soltanto usando metodi numerici di tipo iterativo.

Nei dispositivi a semiconduttore si possono individuare regioni (*regioni neutre*) in cui vale l'approssimazione che l'intensità di campo elettrico sia nulla ($\mathcal{E} \simeq 0$). Si tratta di regioni perfettamente conduttrici, in cui è nulla ogni caduta di potenziale e con $\rho = 0$, cioè con cariche perfettamente bilanciate. L'ipotesi viene detta di *quasi-neutralità* e la sua validità verrà esaminata in seguito. L'equazione di continuità sotto questa ipotesi diventa

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D_n \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - (R_n - G_n) \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D_p \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - (R_p - G_p) \quad (5.11)$$

⁴L'aver definito il campo elettrico come gradiente di un potenziale scalare presuppone che si studino dispositivi le cui dimensioni siano piccole rispetto alla lunghezza d'onda dei fenomeni elettrici coinvolti.

e nel caso in cui la generazione sia solo di tipo termico si ha

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D_n \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - \frac{n - n_0}{\tau_n} \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D_p \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{p - p_0}{\tau_p} \quad (5.13)$$

5.1 Fenomeni di generazione e ricombinazione

5.1.1

Si studino i termini di generazione e ricombinazione G_n e R_n in un semiconduttore di tipo n qualora si abbiano solo transizioni di tipo diretto e l'iniezione di cariche sia di basso livello.

La velocità di ricombinazione ⁵ è proporzionale al prodotto np e vale

$$R = r n p$$

dove r è il coefficiente di ricombinazione e contiene le informazioni riguardanti le sezioni di cattura di lacune ed elettroni. All'equilibrio termodinamico la velocità di ricombinazione è eguale a quella di generazione termica

$$R = G_{th} = r n_{n0} p_{n0}$$

cioè all'equilibrio termodinamico i due fenomeni si bilanciano. In presenza di una situazione di non equilibrio, la velocità netta di ricombinazione risulta:

$$U = R - G_{th} = r(np - n_0 p_0) = r(np - n_i^2)$$

In condizioni di basso livello di iniezione, $n_n = n_{n0}$ per cui

$$U = R - G_{th} = r n_{n0} (p_n - p_{n0}) = \frac{p_n - p_{n0}}{\tau_p}$$

dove, dato che $N_d \simeq n_{n0}$

$$\tau_p = \frac{1}{r N_d}$$

cioè il tempo di vita media è inversamente proporzionale alla concentrazione degli atomi droganti.

5.1.2

Si abbia un pezzo di silicio con drogaggio uniforme di tipo n illuminato da una radiazione di frequenza opportuna, in grado di produrre a coppie lacune ed elettroni in eccesso p' e n' . All'istante $t = 0$ si elimina la radiazione; si vuole determinare

1. la legge temporale con cui le concentrazioni iniettate tornano al valore di equilibrio,

⁵La velocità di ricombinazione è proporzionale alla densità di elettroni e lacune; infatti la ricombinazione si verifica quando elettroni e lacune si incontrano ad una distanza tale da permettere alle lacune di "catturare" l'elettrone (cioè quando l'elettrone intercetta la "sezione di cattura" della lacuna).

2. il tempo di vita medio dei portatori iniettati.

Nel campione di silicio si assuma valida una condizione di quasi neutralità.

a)

Siano n_{n0} e p_{n0} le concentrazioni di elettroni e lacune all'equilibrio termodinamico. Il tasso netto di ricombinazione, che in questo caso è fornito dalla legge ottenuta nel problema 5.1.1, rappresenta per definizione la variazione nell'unità di tempo (diminuzione) della concentrazione di portatori, pertanto

$$U = -\frac{\partial(p_n - p_{n0})}{\partial t} = \frac{p_n - p_{n0}}{\tau_p}$$

Integrando tra l'istante iniziale $t = 0$ e l'istante generico t si ha

$$p_n(t) - p_{n0} = (p_n(0) - p_{n0}) e^{-t/\tau_p}$$

Se vale l'ipotesi di quasi neutralità le due concentrazioni in eccesso sono eguali: $p_n(t) - p_{n0} = n_n(t) - n_{n0}$, quindi la variazione temporale della concentrazione degli elettroni è identica a quella delle lacune

$$n_n(t) - n_{n0} = (p_n(0) - p_{n0}) e^{-t/\tau_p}$$

b)

Il numero di lacune in eccesso che si ricombinano tra t e $t + dt$ è

$$-dp'_n(t) = p'_n(0) \frac{1}{\tau_p} e^{-t/\tau_p} dt$$

poiché ogni lacuna ha vissuto un tempo t , la durata totale del tempo vissuto da queste lacune è $-t dp'_n(t)$. La durata totale della vita di tutte le lacune in eccesso, divisa per il numero totale delle lacune iniettate fornisce il *tempo di vita medio delle lacune in eccesso*

$$\bar{t} = \frac{1}{p'_n(0)} \int_0^\infty t (-dp'_n(t)) = \frac{1}{\tau_p} \int_0^\infty t e^{-t/\tau_p} dt$$

Si può integrare per parti

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \frac{1}{\tau_p} \int_0^\infty t e^{-t/\tau_p} dt = \frac{1}{\tau_p} \left\{ \left[-t\tau_p e^{-t/\tau_p} \right]_0^\infty + \int_0^\infty 0\tau_p e^{-t/\tau_p} dt \right\} = \\ &= \frac{1}{\tau_p} \left\{ 0 + \left[-\tau_p^2 e^{-t/\tau_p} \right]_0^\infty \right\} = \tau_p \end{aligned}$$

Il tempo di vita medio dei portatori in eccesso, siano essi minoritari o maggioritari ⁶, è eguale alla costante di tempo del decadimento esponenziale con cui le cariche iniettate tornano ai propri valori di equilibrio.

⁶Nei limiti di validità dell'ipotesi di quasi neutralità.

5.1.3

Si consideri un campione di GaAs ($E_g = 1,42$ eV a 300 K) illuminato con luce di lunghezza d'onda $\lambda = 0,6135 \mu\text{m}$ e di intensità $0,3 \text{ W m}^{-2}$. Supponendo che la luce venga assorbita in uno strato di spessore $s = 0,3 \mu\text{m}$, si determinino le concentrazioni n e p nello strato in funzione della profondità x . Si calcolino i valori delle concentrazioni in eccesso di elettroni e lacune alla superficie e il loro valore medio nello strato. Si ripeta quest'ultimo calcolo nel caso di lunghezza d'onda $\lambda = 0,85 \mu\text{m}$. Si assuma

$$\begin{aligned} r &= 1,48 \cdot 10^{-16} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} && (\text{coefficiente di ricombinazione}) \\ n_i &= 1 \cdot 10^7 \text{ cm}^{-3} \\ N_d &= 5 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3} \\ \alpha(\lambda = 0,6135 \mu\text{m}) &= 1 \cdot 10^5 \text{ cm}^{-1} && (\text{coefficiente di assorbimento}) \\ \alpha(\lambda = 0,85 \mu\text{m}) &= 1 \cdot 10^4 \text{ cm}^{-1} \end{aligned}$$

L'arseniuro di gallio è un semiconduttore a banda proibita diretta, pertanto si può fare l'ipotesi che il meccanismo di generazione e ricombinazione sia di tipo diretto o banda-banda.

In assenza di stimoli esterni, ma con una situazione iniziale di non equilibrio, la velocità netta di ricombinazione risulta

$$U^{\text{bb}} = R - G_{\text{th}} = r(np - n_0 p_0) = r(np - n_i^2)$$

Se indichiamo con G_{ott} il coefficiente di generazione ottica ⁷, si può esprimere l'andamento temporale delle concentrazioni dei portatori in eccesso come

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= -U^{\text{bb}} + G_{\text{ott}} = -r(pn - n_i^2) + G_{\text{ott}} \\ \frac{dp}{dt} &= -U^{\text{bb}} + G_{\text{ott}} = -r(pn - n_i^2) + G_{\text{ott}} \end{aligned}$$

In regime stazionario è $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, quindi

$$G_{\text{ott}} = r(pn - n_i^2)$$

Il semiconduttore è di tipo n , quindi applicando le relazioni (5.8) e l'ipotesi di basso livello di iniezione ($n' \simeq p' \ll n_0$ e $n'p'$ è trascurabile rispetto alle altre concentrazioni), si scrive

$$\begin{aligned} G_{\text{ott}} &= r[(n_0 + n')(p_0 + p') - n_i^2] \\ &= r[n'p' + n'p_0 + p'n_0] \\ &\simeq r\left[n' \frac{n_i^2}{N_d} + p'N_d\right] \simeq rn'N_d \end{aligned}$$

Definendo il tempo di vita media dei portatori minoritari (5.2) come

$$\tau_p = \frac{1}{rn_0} = \frac{1}{rN_d}$$

⁷Il coefficiente G_{th} tiene conto della generazione termica che si ha all'equilibrio termodinamico. In presenza di cause esterne che, cedendo energia al sistema, stimolano la generazione di coppie, si hanno nuovi termini di generazione. Nel caso in esame, la generazione è stimolata dalla incidenza di fotoni.

si ottiene $G_{\text{ott}} \simeq n'/\tau_p$ da cui

$$\begin{aligned} n' &= G_{\text{ott}}\tau_p \\ p' &= G_{\text{ott}}\tau_p \end{aligned}$$

Si tratta allora di determinare la velocità di generazione ottica G^{ott} , nota l'intensità della radiazione luminosa incidente.

Innanzitutto si verifica se la radiazione è in grado di liberare una coppia elettrone-lacuna, ovvero se la quantità di energia di un fotone è pari almeno all'estensione della banda proibita del GaAs.

$$\begin{aligned} f &= \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{0,6235 \cdot 10^{-6}} = 4,812 \cdot 10^{14} \text{ Hz} \\ E &= hf = 1,866 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 2,99 \text{ eV} \end{aligned}$$

Dato che $E_g = 1,43 \text{ eV}$, si conclude che ogni fotone può generare una coppia elettrone-lacuna ⁸.

Per trovare il legame cercato, si considera uno strato di semiconduttore compreso tra le sezioni x e $x + dx$. Il numero di coppie generate nell'unità di tempo in questo strato è pari al numero di fotoni assorbiti nell'unità di tempo. La densità dei fotoni (numero di fotoni al secondo e al cm^2) nel semiconduttore varia con la penetrazione x come $\Phi = \Phi_0 \exp(-\alpha x)$, dove α è il coefficiente di assorbimento (funzione della lunghezza d'onda) e Φ_0 è la densità in superficie ($x = 0$).

Se I è l'intensità della radiazione incidente, cioè la quantità di energia che arriva per unità di superficie e di tempo, e se la radiazione è monocromatica, è sufficiente dividere per l'energia di un fotone per ottenere il flusso di fotoni in superficie ⁹

$$\Phi_0 = \frac{I}{hf}$$

Il numero di coppie generate per unità di volume e nell'unità di tempo in x : $G_{\text{ott}}(x)$, è pari alla variazione del flusso di fotoni $d\Phi$, cambiata di segno e divisa per lo spessore dx nell'unità di tempo

$$\begin{aligned} G_{\text{ott}}(x) &= -\frac{d\Phi}{dx} = \Phi_0 \alpha e^{-\alpha x} \\ G_{\text{ott}}(x) &= \frac{I}{hf} \alpha e^{-\alpha x} \end{aligned}$$

Ne segue che le concentrazioni in eccesso sono

$$n'(x) = p'(x) = \tau_p \frac{I}{hf} \alpha e^{-\alpha x}$$

Usando i valori numerici

$$\begin{aligned} \tau_p &= \frac{1}{1,48 \cdot 10^{-16} \text{ m}^3 \text{ s} \times 5 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-3}} = 1350 \text{ ns} \\ \tau_p \frac{I}{hf} &= 1350 \cdot 10^{-9} \text{ s} \frac{0,3 \text{ W m}^2}{1,866 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 2,17 \cdot 10^{12} \text{ m}^{-2} \end{aligned}$$

⁸L'energia è molto superiore a E_g . Gli elettroni e le lacune generati hanno energia più elevata del minimo della rispettiva banda. L'energia in più viene in breve tempo ceduta al reticolo sotto forma di fononi (calore) e i portatori si portano al minimo della banda.

⁹Si trascura il fenomeno della riflessione di fotoni alla superficie.

Le concentrazioni in eccesso in superficie valgono

$$n'(0) = p'(0) = \tau_p \frac{I}{hf} \alpha$$

quindi, per le due lunghezze d'onda si ha

$$\begin{aligned} n'(0) &= p'(0) = 2,17 \cdot 10^{12} \text{ m}^{-2} \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} = 2,17 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3} \quad \text{per } \lambda = 0,6135 \mu\text{m} \\ n'(0) &= p'(0) = 2,17 \cdot 10^{12} \text{ m}^{-2} \cdot 10^6 \text{ m}^{-1} = 2,17 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3} \quad \text{per } \lambda = 0,85 \mu\text{m} \end{aligned}$$

Da cui

$$\begin{aligned} n(0) &= n'(0) + n_0 \simeq n_0 = N_d = 5 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3} \\ p(0) &= p'(0) + p_0 \simeq p'(0) = \begin{cases} 2,17 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3} \\ 2,17 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3} \end{cases} \end{aligned}$$

Per calcolare il valore medio del numero di portatori in eccesso generati dalla pioggia di fotoni si integra sull'intero spessore del semiconduttore e si divide per lo spessore

$$\begin{aligned} \bar{n}' &= \bar{p}' = \frac{1}{s} \int_0^s n'(x) dx = \frac{1}{s} \int_0^s \tau_p \frac{I}{hf} \alpha e^{-\alpha x} dx \\ &= \frac{1}{s} \tau_p \frac{I}{hf} \alpha \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \right]_0^s = \frac{1}{s} \tau_p \frac{I}{hf} (1 - e^{-\alpha s}) \end{aligned}$$

Per le due diverse lunghezze d'onda si ha

$$\begin{aligned} \bar{n}' &= \bar{p}' = \frac{1}{0,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}} 2,17 \cdot 10^{12} \text{ m}^{-2} (1 - e^{-10^7 \text{ m}^{-1} 0,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}}) = \\ &= 7,233 \cdot 10^{18} \times (1 - 0,0498) \text{ m}^{-3} = 6,887 \cdot 10^{18} \text{ m}^{-3} \quad \text{per } \lambda = 0,6135 \mu\text{m} \\ \bar{n}' &= \bar{p}' = \\ &= 7,233 \cdot 10^{18} \times (1 - 0,7408) \text{ m}^{-3} = 1,875 \cdot 10^{18} \text{ m}^{-3} \quad \text{per } \lambda = 0,85 \mu\text{m} \end{aligned}$$

Nella figura 5.4, sono riportati gli andamenti di $\Phi(x)$ e $n'(x)$ per i due valori di λ considerati. Si vede che i fotoni di più corta lunghezza d'onda sono assorbiti in misura maggiore degli altri. Dato che $1/\alpha$ è la lunghezza caratteristica con cui i fotoni vengono assorbiti risulta logico che, quando $\alpha = 10^7 \text{ m}^{-1}$ (cioè $1/\alpha = 10^{-7} \text{ m} = 0,1 \mu\text{m}$), in uno spessore pari a tre volte la costante dell'esponenziale quasi tutti i fotoni ($\sim 95\%$) siano assorbiti.

5.1.4

Ricavare l'espressione della velocità netta di ricombinazione nel caso di transizione attraverso trappole nel caso semplificato in cui $\sigma_n \simeq \sigma_p$.

Si determini in questo caso il valore che deve avere il livello della trappola per la massima velocità di ricombinazione.

Se $\sigma_n \simeq \sigma_p$ allora in base alla (5.4) è anche $\tau_{n0} \simeq \tau_{p0} \simeq \tau_0$ e la (5.3) diventa

$$U = \frac{p n - n_i^2}{\tau_0 \left[p + n + 2n_i \cosh \frac{E_t - E_i}{kT} \right]} \quad (5.14)$$

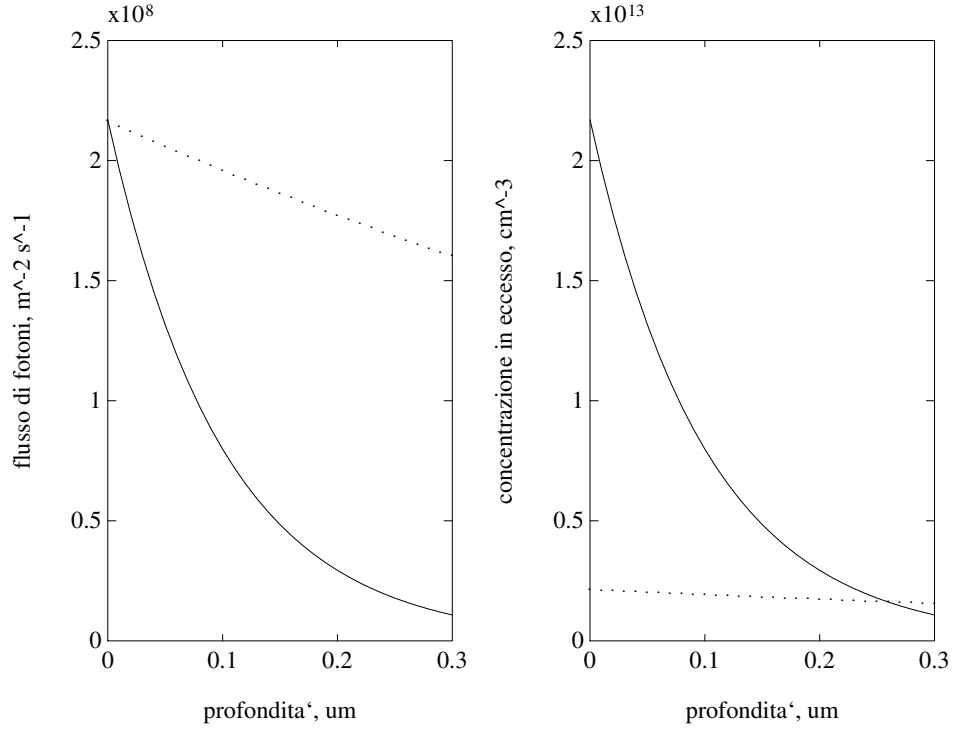


Figura 5.4: Flusso dei fotoni e dell'eccesso di portatori all'interno del campione di semiconduttore: — fotoni con $\lambda = 0,6135 \mu\text{m}$ e $\alpha = 10^5 \text{cm}^{-1}$, \cdots fotoni con $\lambda = 0,85 \mu\text{m}$ e $\alpha = 10^4 \text{cm}^{-1}$.

Il massimo di U si ottiene quando il denominatore è minimo, cioè quando è minima la funzione cosh. Pertanto deve essere

$$E_t - E_i = 0$$

La massima velocità di ricombinazione si ottiene per trappole il cui livello sia pari a quello del livello di Fermi intrinseco, cioè approssimativamente al centro della banda proibita (Au nel Si oppure Cr nel GaAs).

5.1.5

Si scriva l'espressione della velocità netta di ricombinazione nel caso di un semiconduttore di tipo n in cui siano presenti trappole con livello profondo E_t e con concentrazione N_t . Si facciano le semplificazioni tipiche di un semiconduttore drogato in condizioni di basso livello di iniezione. Si valutino i tempi di vita media dei portatori.

La formula di Shockley-Read-Hall (5.3) assume l'aspetto

$$U^t = \frac{p_n n_n - n_i^2}{\tau_{n0} \left[p_n + n_i \exp\left(\frac{E_i - E_t}{kT}\right) \right] + \tau_{p0} \left[n_n + n_i \exp\left(\frac{E_t - E_i}{kT}\right) \right]}$$

dove $n_i^2 = n_{n0}p_{n0}$. Nell'ipotesi di basso livello di iniezione è $n_n \simeq n_{n0}$ inoltre nel denominatore, dato che verosimilmente τ_{n0} e τ_{p0} sono dello stesso ordine di grandezza, è trascurabile l'addendo relativo alle lacune. Si ha

$$U^t \simeq \frac{n_n (p_n - p_{n0})}{\tau_{p0} \left[n_n + n_i \exp\left(\frac{E_t - E_i}{kT}\right) \right]}$$

Dato che si tratta di livelli profondi, è $n_i \exp\left(\frac{E_t - E_i}{kT}\right) < n_i \exp\left(\frac{E_F - E_i}{kT}\right) = n_n$, per cui

$$U^t \simeq \frac{p_n - p_{n0}}{\tau_{p0}}$$

dove

$$\tau_{p0} = (N_t v_{th} \sigma_p)^{-1}$$

assume il significato di tempo di vita media dei portatori minoritari (lacune) ed è inversamente proporzionale alla densità dei livelli trappola.

Nota

Si ha idea del valore anche dei portatori maggioritari scrivendo le due concentrazioni fuori equilibrio nella forma $n_n = n_{n0} + \Delta n$ e $p_n = p_{n0} + \Delta p$. In condizioni di basso livello di iniezione, per le concentrazioni in eccesso si ha $\Delta n, \Delta p \ll n_n$, inoltre il loro quadrato è trascurabile rispetto alle altre concentrazioni.

Si trova, seguendo il precedente schema di approssimazioni,

$$U^t \simeq \frac{p_n - p_{n0}}{\tau_{p0}} + \frac{n_n - n_{n0}}{\frac{n_{n0}}{p_{n0}} \tau_{p0}}$$

da cui si vede che il tempo di vita medio dei portatori di maggioranza è pari a quello dei portatori di minoranza moltiplicato per il rapporto n_{n0}/p_{n0} , che varia, secondo il drogaggio, approssimativamente da 10^8 a 10^{18} .

5.2 Applicazione del modello matematico

5.2.1

Quali sono le condizioni perché si possa dire che in semiconduttore è $\mathcal{E} = 0$?

La legge di Gauss per un mezzo in cui la permittività ϵ sia uniforme fornisce una equazione per il campo elettrico

$$\nabla \cdot \mathcal{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

dove ρ è la carica volumica

$$\rho = p - n + N_d^+ - N_a^-$$

La divergenza dell'intensità di campo elettrico in un punto dello spazio è legata alla densità di carica nello stesso punto. Se la carica è nulla ovunque (condizione di neutralità locale) la divergenza di \mathcal{E} è nulla. Ciò è necessario ma *non sufficiente* perché sia $\mathcal{E} = 0$.

Il campo elettrico in un punto è la forza prodotta da altre cariche su una immaginaria carica unitaria posta in quel punto; anche se non vi sono cariche nel mezzo ove si valuta il campo, esse possono essere altrove, per esempio alle estremità della regione in esame e manifestarsi con una differenza di potenziale.

Figura 5.5: Tempo di vita dei portatori minoritari τ_p in funzione del livello di drogaggio del semiconduttore.

5.2.2

Si abbia un campione di silicio lungo L , drogato di tipo n ($N_d = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$), illuminato costantemente e uniformemente a una estremità. Si suppone che il flusso luminoso generi sulla faccia illuminata una concentrazione di coppie elettrone-lacuna pari a circa 10^{12} cm^{-3} .

Si determinino in funzione della distanza x dalla faccia illuminata le densità dei portatori e le correnti di diversa natura.

Si usi la curva della figura 5.5¹⁰, che riporta i valori misurati sperimentalmente del tempo di vita dei portatori minoritari. Si faccia l'ipotesi di quasi neutralità, ovvero che la costante di tempo di decadimento esponenziale della concentrazione iniettata dei portatori maggioritari coincida con quella dei minoritari. Si considerino per la lunghezza del campione i casi seguenti:

- 1) $L = 10 \mu\text{m}$
- 2) $L = 1 \text{ mm}$
- 3) $L = 1 \mu\text{m}$

Si mettano in evidenza dettagliatamente le ipotesi o le approssimazioni che si devono introdurre. In particolare si verifichi, al termine dell'esercizio, la validità dell'ipotesi $\mathcal{E} \simeq 0$ controllando l'equilibrio delle correnti nel caso di circuito aperto.

Nell'uso del modello matematico per lo studio dei semiconduttori è necessario fare alcune ipotesi semplificative.

- 1^a ipotesi Si suppone che il semiconduttore si trovi in condizioni di quasi neutralità con $\mathcal{E} \simeq 0$ e che le cariche di segno opposto si compensino localmente (problema 5.2.1). Quest'ipotesi, che sicuramente sarebbe verificata in un semiconduttore omogeneo all'equilibrio, potrebbe non esserlo nel caso di semiconduttore illuminato. Al termine si procederà a verificare la validità dell'ipotesi.
- 2^a ipotesi Si considerano solo fenomeni di generazione-ricombinazione diretta di natura termica. I termini di generazione e ricombinazione assumono un aspetto semplice (problema 5.1.1) e, in condizioni di neutralità punto per punto, si ha¹¹

$$G_p - R_p = -\frac{p - p_0}{\tau_p} \simeq G_n - R_n = -\frac{n - n_0}{\tau_p}$$

Se n' e p' sono l'eccesso di elettroni e di lacune rispetto al valore all'equilibrio termodinamico, le equazioni di continuità, inserendo le equazioni di trasporto, diventano

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} &= \frac{1}{q} \frac{\partial J_n}{\partial x} - \frac{n'}{\tau_p} = \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial x} \left(q \mu_n n \mathcal{E} + q D_n \frac{\partial n}{\partial x} \right) - \frac{n'}{\tau_p} \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= -\frac{1}{q} \frac{\partial J_p}{\partial x} - \frac{p'}{\tau_p} = -\frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial x} \left(q \mu_p p \mathcal{E} - q D_p \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \frac{p'}{\tau_p} \end{aligned}$$

¹⁰Da "Modeling and Measurement of Minority-Carrier Lifetime versus Doping in Diffused Layer" N.Arora IEEE Transaction on Electron Devices, febbraio 1982.

¹¹ τ_p è il tempo di rilassamento per le lacune, ovvero la costante di tempo con la quale si ricombina la concentrazione in eccesso di lacune, e coincide con il tempo di rilassamento per gli elettroni, τ_n .

e quindi

$$\begin{aligned}\frac{\partial n}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_n n \mathcal{E} + D_n \frac{\partial n'}{\partial x} \right) - \frac{n'}{\tau_p} \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_p p \mathcal{E} - D_p \frac{\partial p'}{\partial x} \right) - \frac{p'}{\tau_p}\end{aligned}$$

- 3^a ipotesi Si suppone che il semiconduttore sia in condizioni di stazionarietà $\partial/\partial t \simeq 0$ ovvero si fa l'ipotesi che il fascio luminoso che colpisce il semiconduttore abbia intensità costante e che ogni fenomeno di tipo transitorio si sia esaurito.

Le equazioni di continuità diventano

$$\begin{cases} D_n \frac{\partial^2 n'}{\partial x^2} = \frac{n'}{\tau_p} \\ D_p \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = \frac{p'}{\tau_p} \end{cases}$$

con le equazioni caratteristiche

$$\begin{cases} D_n \lambda^2 = \frac{1}{\tau_p} \longrightarrow \lambda^2 = \frac{1}{D_n \tau_p} \\ D_p \lambda^2 = \frac{1}{\tau_p} \longrightarrow \lambda^2 = \frac{1}{D_p \tau_p} \end{cases}$$

Definendo come *lunghezze di diffusione* le grandezze

$$\begin{aligned}L_n &= \sqrt{D_n \tau_p} \\ L_p &= \sqrt{D_p \tau_p}\end{aligned}$$

si ottiene per le concentrazioni di elettroni e lacune in eccesso

$$\begin{aligned}n'(x) &= A e^{-x/L_n} + B e^{x/L_n} \\ p'(x) &= C e^{-x/L_p} + D e^{x/L_p}\end{aligned}$$

Le costanti si determinano imponendo le condizioni al contorno:

- sulla faccia illuminata, in $x = 0$, le concentrazioni in eccesso di portatori dovuto alla generazione ottica sono pari a $n'(0)$ e a $p'(0)$;
- sulla faccia opposta, in $x = L$ si può scrivere che le concentrazioni in eccesso valgono $n'(L)$ e $p'(L)$. Se il dispositivo è lungo, entrambe le concentrazioni in eccesso diventano nulle ($n' \simeq p' \rightarrow 0$), in quanto si può supporre che ogni eccesso di elettroni si sia ricombinato. Quindi $n(L) = N_d$ e $p(L) = n_i^2/N_d$.

Sviluppando il solo caso della concentrazione in eccesso degli elettroni, in $x = 0$ si ha

$$n'(0) = A + B$$

dove $n'(0)$ è proporzionale al flusso luminoso. Per $x = L$ si può scrivere

$$n'(L) = A e^{-L/L_n} + B e^{L/L_n}$$

cioè

$$\begin{aligned} [n'(0) - B] e^{-L/L_n} + B e^{L/L_n} &= 0 \\ n'(0) e^{-L/L_n} &= B \left(e^{-L/L_n} - e^{L/L_n} \right) \end{aligned}$$

Le due costanti sono pertanto

$$\begin{aligned} B &= n'(0) \frac{e^{-L/L_n}}{e^{-L/L_n} - e^{+L/L_n}} \\ A &= n'(0) \left[1 - \frac{e^{-L/L_n}}{e^{-L/L_n} - e^{+L/L_n}} \right] \end{aligned}$$

In definitiva l'espressione della concentrazione in eccesso di elettroni è

$$\begin{aligned} n'(x) &= n'(0) \left\{ \left[1 - \frac{e^{-L/L_n}}{e^{-L/L_n} - e^{+L/L_n}} \right] e^{-x/L_n} + \frac{e^{-L/L_n}}{e^{-L/L_n} - e^{+L/L_n}} e^{x/L_n} \right\} \\ &= n'(0) \left\{ \frac{e^{(-L-x)/L_n} - e^{(-x+L)/L_n} - e^{(-L-x)/L_n} + e^{(-L+x)/L_n}}{e^{-L/L_n} - e^{+L/L_n}} \right\} \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$= n'(0) \left[\frac{(e^{(L-x)/L_n} - e^{-(L-x)/L_n}) / 2}{(e^{L/L_n} - e^{-L/L_n}) / 2} \right] = n'(0) \frac{\sinh\left(\frac{L-x}{L_n}\right)}{\sinh\left(\frac{L}{L_n}\right)} \quad (5.16)$$

In modo analogo si può procedere per le lacune e si trova

$$p'(x) = p'(0) \frac{\sinh\left(\frac{L-x}{L_p}\right)}{\sinh\left(\frac{L}{L_p}\right)} \quad (5.17)$$

Le due espressioni trovate sono valide in generale, anche quando le lunghezze di diffusione sono confrontabili con la lunghezza del campione; in alcuni casi particolari possono essere semplificate.

Passando dal caso generale al caso particolare in esame si hanno per le grandezze caratteristiche i valori seguenti.

- a) *Mobilità*: in base alla concentrazione di impurità presente nel semiconduttore si ha dai grafici

$$\begin{aligned} \mu_n &= 800 \text{ cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1} \\ \mu_p &= 245 \text{ cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}. \end{aligned}$$

- b) *Diffusività*: applicando la relazione di Einstein, si ottengono a partire dalle mobilità

$$\begin{aligned} D_n &= 800 \cdot 0,026 = 20,8 \text{ cm}^2 \text{s}^{-1} \\ D_p &= 245 \cdot 0,026 = 6,37 \text{ cm}^2 \text{s}^{-1}. \end{aligned}$$

- c) *Tempo di vita della concentrazione in eccesso*: dalla curva del tempo di vita dei portatori minoritari in funzione della concentrazione delle impurità si ottiene $\tau_p = 3,4 \cdot 10^{-8} \text{ s}$.

- d) *Lunghezze di diffusione*: dalle due grandezze precedenti si ha

$$L_n = \sqrt{D_n \tau_p} = \sqrt{20,8 \cdot 3,4 \cdot 10^{-8}} = 8,41 \mu\text{m}$$

$$L_p = \sqrt{D_p \tau_p} = \sqrt{6,37 \cdot 3,4 \cdot 10^{-8}} = 4,65 \mu\text{m}.$$

Le lunghezze di diffusione degli elettroni e delle lacune sono i parametri caratteristici dell'andamento esponenziale delle concentrazioni in eccesso: il semiconduttore sarà lungo o corto rispetto a tali lunghezze di confronto. Dato che $L_n = 8,41 \mu\text{m}$ e $L_p = 4,65 \mu\text{m}$, il campione di lunghezza $L = 10 \mu\text{m}$ ha lunghezza confrontabile con le lunghezze di diffusione e valgono le espressioni generali; il campione lungo 1 mm è invece sicuramente lungo, mentre quello lungo $1 \mu\text{m}$ è corto, quindi in questi casi si possono operare semplificazioni.

- $L \gg L_{n,p}$, *campione lungo*

diventano trascurabili i termini e^{-L/L_n} e e^{-L/L_p} , quindi

$$n'(x) = n'(0) \left\{ \frac{(e^{(L-x)/L_n} - e^{-(L-x)/L_n})}{(e^{L/L_n} - e^{-L/L_n})} \right\} \simeq n'(0) e^{-x/L_n} \quad (5.18)$$

$$p'(x) \simeq p'(0) e^{-x/L_p} \quad (5.19)$$

- $L \ll L_{n,p}$, *campione corto*

se il campione risulta molto più corto delle lunghezze di diffusione, si hanno funzioni seno iperbolico, con argomento assai piccolo, che possono essere approssimate con l'argomento ($\sinh_{y \rightarrow 0}(y) \sim y$), pertanto

$$n'(x) = n'(0) \frac{\sinh\left(\frac{L-x}{L_n}\right)}{\sinh\left(\frac{L}{L_n}\right)} \simeq n'(0) \frac{\frac{L-x}{L_n}}{\frac{L}{L_n}} = n'(0) \frac{L-x}{L} \quad (5.20)$$

$$p'(x) \simeq p'(0) \frac{L-x}{L} \frac{L_p}{L} = p'(0) \frac{L-x}{L} \quad (5.21)$$

Nel caso di un semiconduttore di lunghezza trascurabile rispetto alla lunghezza di diffusione, la distribuzione dell'eccesso di portatori diventa approssimabile con una distribuzione lineare.

Calcolo delle correnti

Sotto l'ipotesi di quasi neutralità il campo elettrico è nullo e il calcolo delle correnti si riduce all'esame delle correnti di diffusione

$$J_n \simeq J_{n,\text{diff}} = q D_n \frac{\partial n'}{\partial x}$$

$$J_p \simeq J_{p,\text{diff}} = -q D_p \frac{\partial p'}{\partial x}$$

È necessario analizzare separatamente i casi delle tre diverse lunghezze del campione di silicio, in quanto differenti sono le espressioni che si devono usare per le correnti di diffusione.

1° $L = 10 \mu\text{m} \approx L_{n,p}$

Si usano per le concentrazioni in eccesso le formule generali (5.15) e (5.17) e si ottiene

$$J_{n,\text{diff}} = -\frac{D_n}{L_n} q n'(0) \frac{\cosh\left(\frac{L-x}{L_n}\right)}{\sinh\left(\frac{L}{L_n}\right)} = -\sqrt{\frac{D_n}{\tau_p}} q n'(0) \frac{\cosh\left(\frac{L-x}{L_n}\right)}{\sinh\left(\frac{L}{L_n}\right)}$$

$$J_{p,\text{diff}} = +\frac{D_p}{L_p} q p'(0) \frac{\cosh\left(\frac{L-x}{L_p}\right)}{\sinh\left(\frac{L}{L_p}\right)} = \sqrt{\frac{D_p}{\tau_p}} q p'(0) \frac{\cosh\left(\frac{L-x}{L_p}\right)}{\sinh\left(\frac{L}{L_p}\right)}$$

2° $L = 1 \text{ mm} \gg L_{n,p}$

Per l'eccesso di portatori si usano le espressioni (5.18) e si ha

$$J_{n,\text{diff}} = -\frac{D_n}{L_n} q n'(0) e^{-x/L_n} = -\sqrt{\frac{D_n}{\tau_p}} q n'(0) e^{-x/L_n}$$

$$J_{p,\text{diff}} = +\frac{D_p}{L_p} q p'(0) e^{-x/L_p} = +\sqrt{\frac{D_p}{\tau_p}} q p'(0) e^{-x/L_p}$$

3° $L = 1 \mu\text{m} \ll L_{n,p}$

Le distribuzioni per l'eccesso di portatori sono le (5.20) e le correnti di diffusione assumono l'aspetto

$$J_{n,\text{diff}} = -q \frac{D_n}{L} n'(0)$$

$$J_{p,\text{diff}} = +q \frac{D_p}{L} p'(0)$$

In questo caso le correnti sono costanti, non dipendono più da τ_p , e sono tanto maggiori quanto più corto è il campione di semiconduttore.

Validità dell'ipotesi di quasi-neutralità

Le espressioni usate sono state ricavate nell'ipotesi di quasi-neutralità che, a questo punto, deve essere verificata. In particolare si verificherà se è vero che le correnti sono solo di diffusione e il campo elettrico è nullo. Poichè il semiconduttore è in circuito aperto si ha che $J_{\text{tot}} = 0$ quindi

$$J_{n,\text{diff}} + J_{n,\text{trasc}} + J_{p,\text{diff}} + J_{p,\text{trasc}} = 0$$

La corrente di trascinamento dei portatori minoritari è trascurabile ($J_{p,\text{trasc}} \simeq 0$), infatti $p \simeq n_i^2/N_d$ in un semiconduttore drogato n è trascurabile rispetto alla concentrazione degli elettroni. La corrente di trascinamento degli elettroni non è necessariamente nulla e può essere ricavata come differenza delle due correnti di diffusione

$$J_{n,\text{trasc}} = -J_{n,\text{diff}} - J_{p,\text{diff}}$$

$$q \mu_n n \mathcal{E} = -J_{n,\text{diff}} - J_{p,\text{diff}}$$

Ne consegue un campo elettrico che risulta essere

$$\mathcal{E} = \frac{1}{q \mu_n n} [-J_{n,\text{diff}} - J_{p,\text{diff}}]$$

Per valutare l'intensità del campo elettrico si considerano separatamente i tre casi.

$$1^\circ \quad L = 10 \mu\text{m} \approx L_{n,p}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x) = & \frac{1}{q \mu_n n} \left[\sqrt{\frac{D_n}{\tau_p}} q n'(0) \frac{\cosh\left(\frac{L-x}{L_n}\right)}{\sinh\left(\frac{L}{L_n}\right)} + \right. \\ & \left. - \sqrt{\frac{D_p}{\tau_p}} q p'(0) \frac{\cosh\left(\frac{L-x}{L_p}\right)}{\sinh\left(\frac{L}{L_p}\right)} \right] \end{aligned}$$

Si valutano le intensità di \mathcal{E} in $x = L$ e $x = 0$, si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(L) = & \frac{1}{q \mu_n n} \left[\sqrt{\frac{D_n}{\tau_p}} q n'(0) \frac{1}{\sinh\left(\frac{L}{L_n}\right)} + \right. \\ & \left. - \sqrt{\frac{D_p}{\tau_p}} q p'(0) \frac{1}{\sinh\left(\frac{L}{L_p}\right)} \right] = 1,671 \cdot 10^{-4} \text{ Vcm}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(0) = & \frac{1}{q \mu_n n} \left[\sqrt{\frac{D_n}{\tau_p}} q n'(0) \coth\left(\frac{L}{L_n}\right) + \right. \\ & \left. - \sqrt{\frac{D_p}{\tau_p}} q p'(0) \coth\left(\frac{L}{L_p}\right) \right] = 1,965 \cdot 10^{-4} \text{ Vcm}^{-1} \end{aligned}$$

Si tratta di valori di campo estremamente ridotti che, quindi, non modificano sostanzialmente i risultati ottenuti con l'ipotesi di *quasi-neutralità*.

$$2^\circ \quad L = 1 \text{ mm} \gg L_{n,p}$$

Procedendo nello stesso modo del caso precedente si ottiene

$$\mathcal{E}(x) = \frac{1}{q \mu_n n} \left[\sqrt{\frac{D_n}{\tau_p}} q n'(0) e^{-x/L_n} - \sqrt{\frac{D_p}{\tau_p}} q p'(0) e^{-x/L_p} \right]$$

$$3^\circ \quad L = 1 \mu\text{m} \ll L_{n,p}$$

Si ottiene un campo costante indipendente da x e dato che $n'(0) = p'(0)$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{q \mu_n n} \left[\frac{D_n}{L} q n'(0)n - \frac{D_p}{L} q p'(0) \right] = \frac{1}{q \mu_n n} \left[\frac{D_n}{D_p} - 1 \right] J_{p,\text{diff}}$$

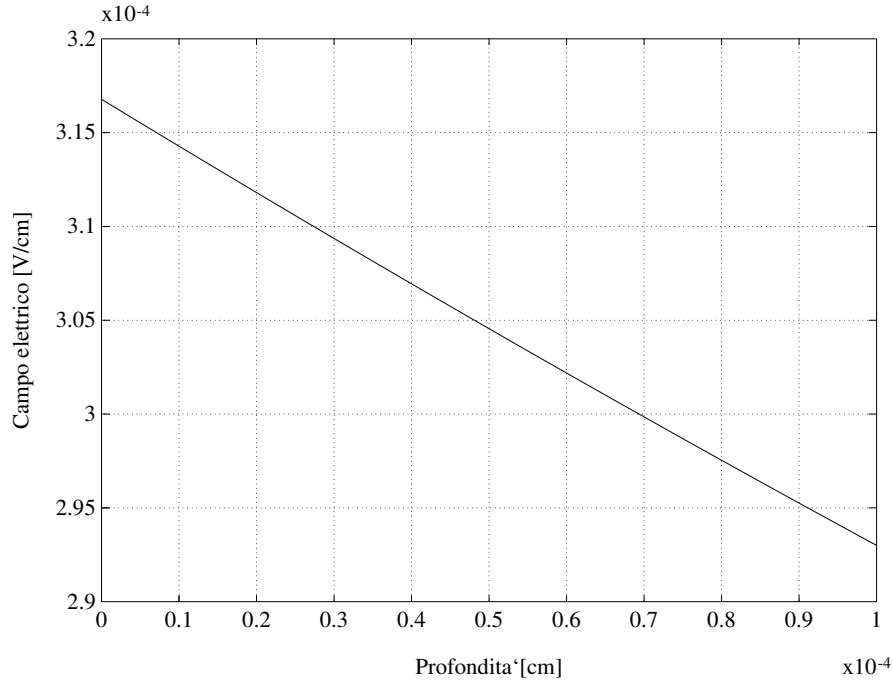


Figura 5.6: Andamento del campo elettrico nel semiconduttore lungo $10 \mu\text{m}$, calcolato nell'ipotesi di *quasi neutralità*.

Risulta evidente dalle tre espressioni trovate che il valore del campo elettrico nel semiconduttore tende a crescere all'allontanarsi del rapporto D_n/D_p dall'unità, pertanto quanto più le costanti di diffusione sono differenti tanto meno è valida l'ipotesi di quasi neutralità.

L'ipotesi di considerare $\mathcal{E} = 0$ ha permesso il calcolo delle concentrazioni $n'(x)$, $p'(x)$ e delle correnti di diffusione, in realtà essa è in accordo con l'equazione di Poisson solo se $D_n = D_p$. Se ci si allontana dalla situazione $D_n = D_p$ non si ha più consistenza tra l'equazione di continuità e l'equazione di Poisson. Queste considerazioni mettono in evidenza come sia scorretto l'impiego di un modello matematico in cui le soluzioni delle equazioni di continuità, di Poisson e di trasporto non vengano soddisfatte simultaneamente.

5.2.3

Si valuti l'andamento delle concentrazioni dei portatori in un semiconduttore drogato di tipo n con $N_d = 5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$, lungo 2 mm, che venga costantemente illuminato nella sua regione centrale (figura 5.8). Si assuma che la concentrazione di coppie elettrone-lacuna generate dalla radiazione sia pari a 10^{13} cm^{-3} .

Si valuti inoltre l'applicabilità dell'ipotesi di quasi neutralità.

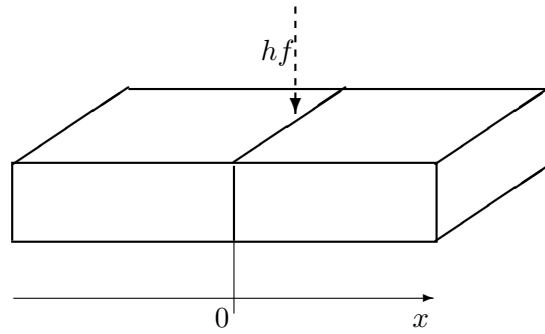


Fig. 5.8 Struttura del semiconduttore illuminato nella sua parte centrale.

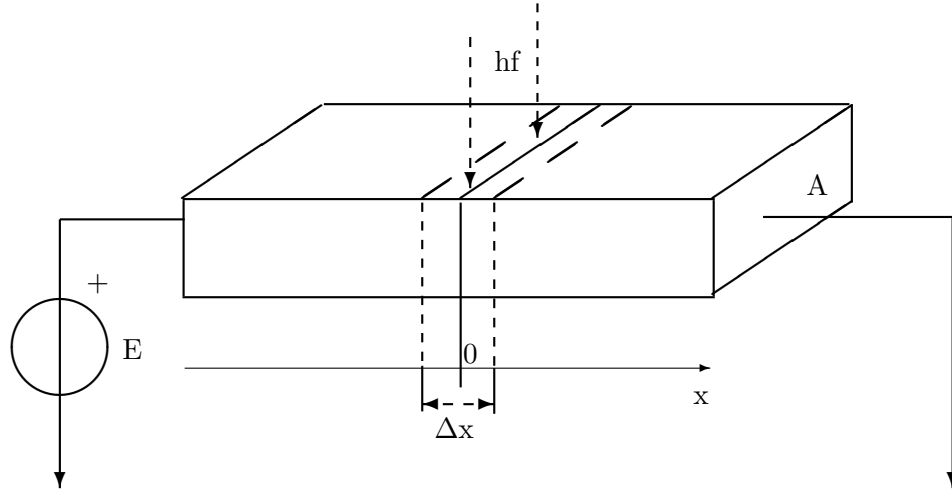


Figura 5.9: Allestimento dell'esperimento di Haynes-Schockley.

5.2.4

Si studi l'esperimento di Haynes-Schockley.

È possibile valutare l'evoluzione temporale di un "pacchetto" di portatori generati in un semiconduttore da un lampo luminoso, utilizzando il modello matematico per lo studio dei semiconduttori. Si supponga di colpire all'istante $t = 0$ una striscia larga Δx di un campione di semiconduttore con un lampo luminoso, come indicato nella figura 5.9, e si valuti l'andamento nel tempo delle concentrazioni di carica prodotte per generazione ottica.

Se G è il numero di coppie generate per unità di tempo e di volume, si può assumere che il numero totale di elettroni e di lacune iniettate: \tilde{N} e \tilde{P} , generati dall'impulso luminoso in $t = 0$, sia valutabile con

$$\tilde{N} = \tilde{P} = G \cdot \Delta x \cdot A \cdot \Delta t$$

dove Δt è il tempo di accensione (durata dell'impulso).

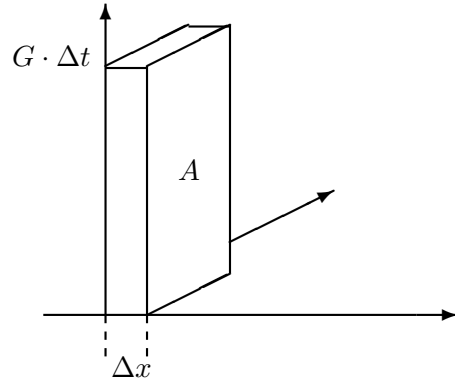


Fig. 5.10 Distribuzione idealizzata dell'eccesso di carica generata dal campo luminoso.

Partendo dal modello matematico dei semiconduttori e facendo l'ipotesi che per $t > 0$ la generazione-ricombinazione sia solo di natura termica e diretta, si ottiene, sostituendo

le equazioni di trasporto nelle equazioni di continuità

$$\begin{aligned}\frac{\partial n}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_n n \mathcal{E} + D_n \frac{\partial n}{\partial x} \right) + \frac{n - n_0}{\tau_n} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_p p \mathcal{E} - D_p \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{p - p_0}{\tau_p} &= 0\end{aligned}$$

le concentrazioni n e p devono contemporaneamente soddisfare l'equazione

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} = \frac{q}{\mathcal{E}_s} \cdot (p - n + N_0^+)$$

Per poter trattare analiticamente il problema si fa l'ipotesi che all'interno del semiconduttore vi sia una situazione di neutralità, $\partial \mathcal{E} / \partial x = 0$, pertanto il campo elettrico è costante e la mobilità non varia con x . Si esprime l'equazione di continuità in funzione dell'eccesso dei portatori

$$\begin{aligned}\frac{\partial n'}{\partial t} - \mu_n \mathcal{E} \frac{\partial n'}{\partial x} - D_n \frac{\partial^2 n'}{\partial x^2} + \frac{n'}{\tau_n} &= 0 \\ \frac{\partial p'}{\partial t} + \mu_p \mathcal{E} \frac{\partial p'}{\partial x} - D_p \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{p'}{\tau_p} &= 0\end{aligned}$$

Concentrando l'attenzione sugli elettroni, si cercano soluzioni della forma ¹²

$$n' = \frac{H}{\sqrt{B} t} \exp \left[-\frac{(x - v t)^2}{C t} - \frac{t}{E} \right]$$

H, B, C, v e E sono costanti da determinare in modo che venga soddisfatta l'equazione di continuità. L'impiego della forma di soluzione prescelta per n' comporta che i singoli termini dell'equazione di continuità diventino

$$\begin{aligned}\frac{\partial n'}{\partial t} &= \frac{H}{(B t)^{\frac{3}{2}}} \left(-\frac{1}{2} B \right) \exp(\eta) + \frac{H}{\sqrt{B} t} \exp(\eta) \cdot \\ &\cdot \left[v \frac{2 (x - v t)}{C t} + \frac{(x - v t)^2}{(C t)^2} C - \frac{1}{E} \right] \\ \frac{\partial n'}{\partial x} &= \frac{H}{\sqrt{B} t} \exp(\eta) \left[-\frac{2 (x - v t)}{C t} \right] \\ \frac{\partial^2 n'}{\partial x^2} &= \frac{H}{\sqrt{B} t} \exp(\eta) \left[+\frac{4 (x - v t)^2}{(C t)^2} - \frac{2}{C t} \right]\end{aligned}$$

¹²È possibile dimostrare che la distribuzione gaussiana per l'eccesso di portatori è una soluzione generale: infatti sostituendo nell'equazione

$$\frac{\partial n'}{\partial t} - \mu_n \mathcal{E} \frac{\partial n'}{\partial x} - D_n \frac{\partial^2 n'}{\partial x^2} + \frac{n'}{\tau_n} = 0$$

la variabile $\xi = x - \mu_n \mathcal{E} t$ e ponendo $n'(x, t) = \exp[-t/\tau_n] P(\xi, t)$ è possibile scrivere l'equazione

$$\frac{\partial P}{\partial t} - D_n \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} = 0$$

di cui esiste la soluzione generale

$$P(\xi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_0(\alpha)}{\sqrt{4\pi D_n t}} \exp \left[-\frac{(\xi - \alpha)^2}{4 D_n t} \right] d\alpha$$

dove

$$\eta = -\frac{(x - v t)^2}{C t} - \frac{t}{E}$$

Sostituendo nell'equazione di continuità

$$\begin{aligned} \frac{H}{\sqrt{B} t} \exp(\eta) \left\{ \frac{1}{B t} \left(-\frac{1}{2} B \right) + \left[v \frac{2 (x - v t)}{C t} + \frac{(x - v t)^2}{(C t)^2} C - \frac{1}{E} \right] + \right. \\ \left. + \mu_n \mathcal{E} \left[\frac{2 (x - v t)}{C t} \right] + D_n \left[-\frac{4 (x - v t)^2}{(C t)^2} + \frac{2}{C t} \right] \right\} = -\frac{n'}{\tau_n} \end{aligned}$$

e raccogliendo si ha

$$\begin{aligned} \frac{H}{\sqrt{B} t} \exp(\eta) \left\{ -\frac{1}{2 t} - \frac{1}{E} + \frac{2 D_n}{C t} + \underbrace{\frac{(x - v t)}{C t} (2 v + 2 \mu_n \mathcal{E})}_{v = -\mu_n \mathcal{E}} + \right. \\ \left. + \frac{(x - v t)^2}{(C t)^2} \underbrace{(C - 4 D_n)}_{C = 4 D_n} \right\} = -\frac{n'}{\tau_n} \end{aligned}$$

Affinché si attui l'eguaglianza tra i due membri dell'equazione, deve scomparire l'addendo che contiene il campo elettrico: $v = -\mu_n \mathcal{E}$; di conseguenza anche l'altro termine che contiene v deve annullarsi: $C = 4 D_n$. Resta

$$\begin{aligned} \frac{H}{\sqrt{B} t} \exp(\eta) \left\{ -\frac{1}{2 t} - \frac{1}{E} + \frac{2 D_n}{4 D_n t} \right\} &= \frac{H}{\sqrt{B} t} \exp(\eta) \left(-\frac{1}{E} \right) = -\frac{n'}{\tau_n} \\ \frac{H}{\sqrt{B} t} \exp(\eta) &= \frac{n' E}{\tau_n} \end{aligned}$$

Per confronto con l'espressione della soluzione cercata si ottiene $E = \tau_n$. Le ultime due costanti si determinano esaminando la distribuzione

$$n' = \frac{H}{\sqrt{B} t} \exp \left[-\frac{(x + \mu_n \mathcal{E} t)^2}{4 D_n t} - \frac{t}{\tau_n} \right]$$

per $t \rightarrow 0$ in assenza di campo elettrico. Si valuta il numero totale di elettroni generati dall'impulso luminoso ¹³

$$A \int_{-\infty}^{+\infty} n' dx = A \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H}{\sqrt{B} t} \exp \left[-\frac{x^2}{4 D_n t} \right] dx = A \frac{\sqrt{D_n t} \sqrt{4 \pi} H}{\sqrt{B} t} = \tilde{N}$$

Da cui si ha $B = D_n$ e $H = \tilde{N}/(A\sqrt{4\pi})$. La distribuzione diventa

$$n' = \frac{\tilde{N}/A}{\sqrt{4 \pi} D_n t} \exp \left[-\frac{(x + \mu_n \mathcal{E} t)^2}{4 D_n t} - \frac{t}{\tau_n} \right]$$

¹³Si usa l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{r}$$

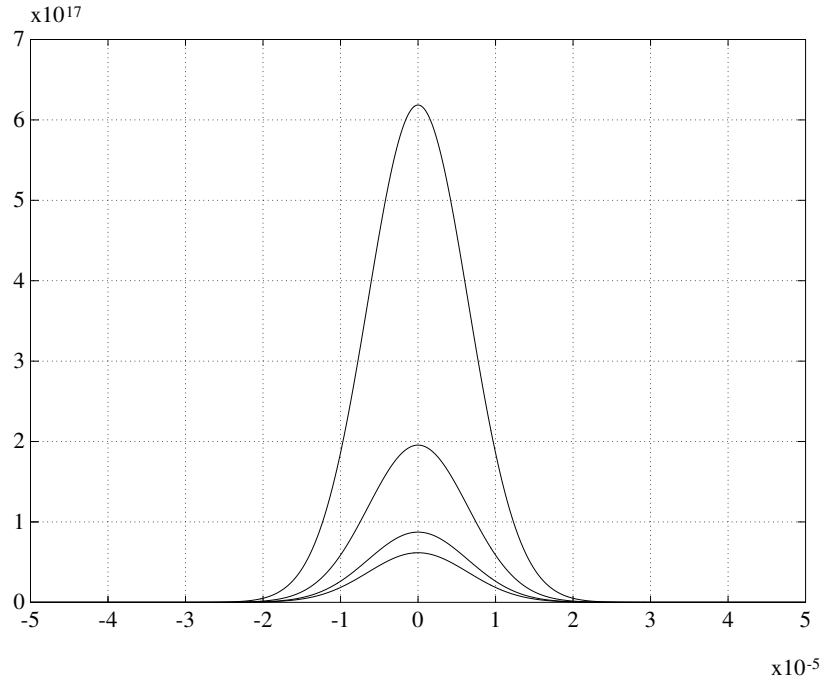


Figura 5.11: Eccesso di elettroni (cm^{-3}) in assenza di campo elettrico esterno nel caso: $G=4 \cdot 10^{19} \text{cm}^{-3}\text{s}^{-1}$, $\Delta t=1\text{ms}$, $D_n=20,8 \text{cm}^2\text{s}^{-1}$, $\mu_n=800 \text{cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$, $\tau_n = 3,4 \cdot 10^{-8}\text{s}$. Le curve sono relative a $t = 0, 10, 50, 100$ ps e in ascissa si ha la distanza in cm dalla sezione centrale del semiconduttore.

Interpretazione fisica

1) Nel caso in cui non si applichi campo elettrico ($\mathcal{E} = 0$)

$$n' = \frac{\tilde{N}/A}{\sqrt{4\pi D_n t}} \exp \left[-\frac{x^2}{4 D_n t} - \frac{t}{\tau_n} \right]$$

L'area totale della gaussiana è proporzionale alle cariche totali in eccesso

$$\int_{-\infty}^{+\infty} n'(x) dx = \frac{\tilde{N}}{A} e^{-\frac{t}{\tau_n}}$$

e al crescere di t diminuisce; l'eccesso di cariche nel tempo tende a essere riassorbito come indicato nella figura 5.12. In particolare si ha che *diminuisce* l'area a causa del termine e^{-t/τ_n} , mentre *aumenta* la dispersione a causa del termine $D_n t$.

2) In presenza di campo elettrico

$$p' = \frac{\tilde{P}/A}{\sqrt{4\pi D_p t}} \exp \left[-\frac{(x - \mu_p \mathcal{E} t)^2}{4 D_p t} - \frac{t}{\tau_p} \right]$$

Anche in questo caso la concentrazione tende a essere riassorbita, infatti l'area diminuisce come e^{-t/τ_n} (allargandosi), ma contemporaneamente la distribuzione degli elettroni in eccesso trasla verso destra per gli elettroni con velocità pari a $\mu_n \mathcal{E}$.

Per le lacune (fig. 5.13) valgono considerazioni analoghe, ma la gaussiana, che rappresenta la distribuzione in eccesso di lacune, trasla verso sinistra con velocità $\mu_p \mathcal{E}$ mentre l'area diminuisce con legge esponenziale.

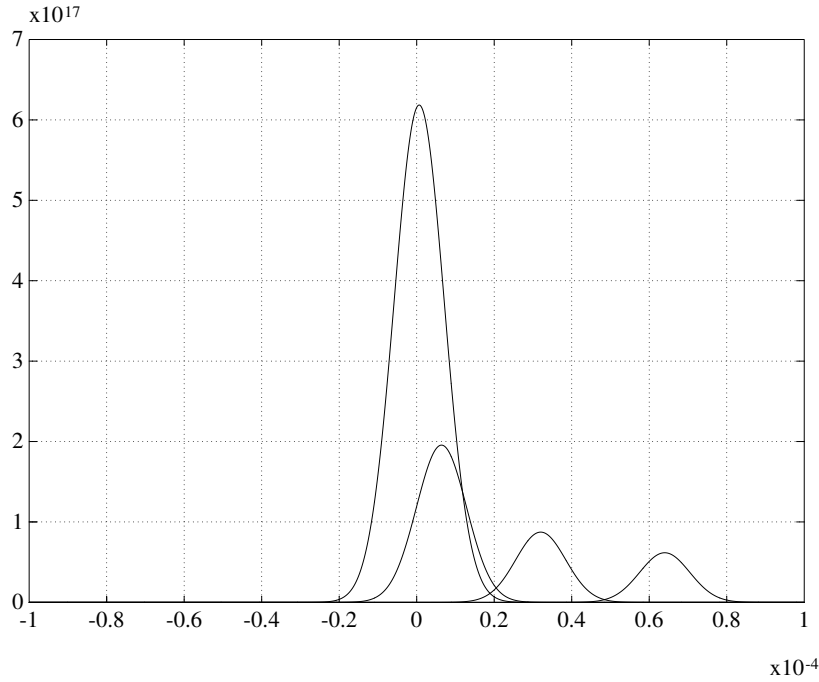


Figura 5.12: Andamento nel tempo dell'eccesso di elettroni (cm^{-3}) in presenza di campo elettrico esterno pari a $\mathcal{E} = -800 \text{ Vcm}^{-1}$ nelle stesse condizioni supposte nella figura 5.11.

5.2.5

L'esperimento di Haynes e Shockley può essere usato per misurare sperimentalmente la mobilità dei portatori nei semiconduttori. Nello schema sperimentale illustrato nella figura 5.14, si ha $\Delta x = 10 \text{ }\mu\text{m}$, $V_0 = 10 \text{ V}$ e $V_C = 5 \text{ V}$. L'impulso di cariche viene generato applicando un impulso di tensione di polarizzazione diretta su un diodo p-n. Il ritardo tra l'impulso generato in AA' e quello rilevato in BB' è $\Delta t = 0,21 \text{ ns}$. Si valuti la mobilità delle lacune.

Le due regioni n^+ poste nella parte inferiore operano come contatti metallici (ohmici) tra il semiconduttore e i connettori esterni. Applicata tra di esse una differenza di potenziale, nella barretta, ove si vuole misurare la mobilità delle lacune, nasce un campo elettrico (longitudinale) uniforme. Le due regioni p poste superiormente formano con il semiconduttore di tipo n due giunzioni. Alla seconda giunzione è applicata una tensione di polarizzazione inversa pari a V_C .

Se si applica un impulso di tensione tra A e A' la prima giunzione $p-n$ inietterà un impulso di lacune nel semiconduttore di tipo n ove il campo elettrico le trascinerà verso la seconda giunzione che le raccoglierà. È possibile rilevare il tempo di propagazione lungo il tratto Δx .

Nel problema 5.2.4 si trova la forma della distribuzione di lacune dovute a una iniezione di cariche di tipo impulsivo

$$p' = \frac{\tilde{p}/A}{\sqrt{4\pi D_p t}} \exp \left[-\frac{(x - \mu_p \mathcal{E} t)^2}{4 D_p t} - \frac{t}{\tau_p} \right]$$

il massimo della curva gaussiana trasla con velocità pari a $\mu_p \mathcal{E}$. Quindi nel caso in

¹⁴Regioni molto drogate di tipo n.

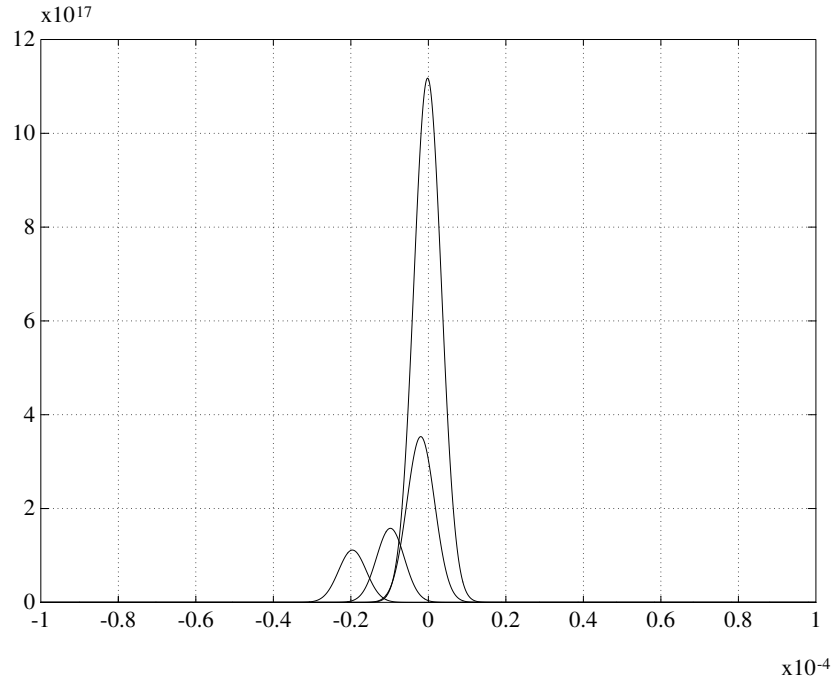


Figura 5.13: Andamento nel tempo dell'eccesso di lacune (cm^{-3}) in presenza di campo elettrico esterno pari a $\mathcal{E} = -800 \text{ Vcm}^{-1}$ nelle stesse condizioni supposte nella figura 5.11.

esame si può scrivere

$$\mu_p \mathcal{E} \Delta t = \Delta x \longrightarrow \mu_p = \frac{1}{\mathcal{E}} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Sostituendo i valori si ottiene $\mu_p = 476 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$.

5.2.6

Si consideri una giunzione n^+p in cui il lato p , con drogaggio $N_a = 5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ ($\tau_n = 50 \text{ ns}$), sia lungo $W_p = 300 \text{ }\mu\text{m}$. Supponendo che nella regione p il campo \mathcal{E} sia nullo, si determinino:

- a) l'andamento dell'eccesso di portatori $n'_p(x)$ nel lato p e il suo valore al bordo della regione di carica spaziale con una polarizzazione diretta pari a $0,65 \text{ V}$.

Rimuovendo l'ipotesi di campo elettrico nullo e supponendo che nel lato p sia presente un campo elettrico costante e pari a 3 V cm^{-1} si determinino:

- b) l'espressione di n'_p al bordo delle regione di carica spaziale in funzione del campo elettrico e il corrispondente valore per una tensione applicata di $0,65 \text{ V}$;
c) l'andamento di $n'_p(x)$ assumendo come parametro il valore del campo elettrico. Si discuta il senso fisico del risultato.

a)
Le grandezze che determinano il comportamento degli elettroni nel lato p sono ¹⁵

¹⁵La mobilità è ottenuta dal grafico riportato in appendice per la concentrazione $N_a = 5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$.

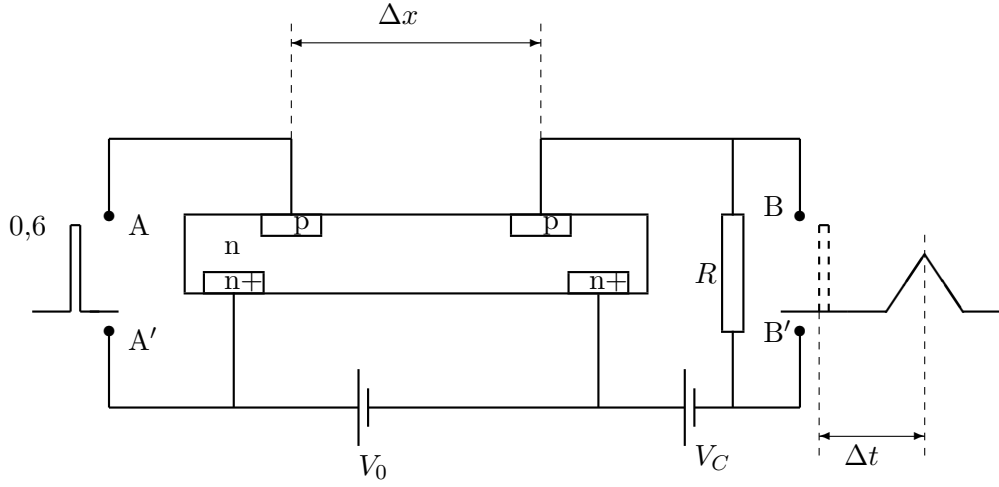


Figura 5.14: Allestimento sperimentale per la misura della mobilità in un semiconduttore.

$$\mu_n = 975 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}\text{V}^{-1}$$

$$D_n = kT/q \mu_n = 25,35 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$$

$$\tau_n = 50 \text{ ns}$$

$$L_n = \sqrt{D_n \tau_n} = 11,2 \text{ }\mu\text{m}$$

Dato che $W_p \gg L_n$ è possibile lavorare con l'ipotesi di diodo lungo. L'eccesso di elettroni iniettato nel lato p si ricombina seguendo una legge esponenziale, che, fissata l'origine dell'asse x in corrispondenza dell'inizio della regione p, si scrive

$$n'_p(x) = n'_p(0)e^{-x/L_n}$$

L'entità dell'iniezione degli elettroni si calcola mediante la legge della giunzione¹⁶

$$n'_p(0) = n_{p0}(e^{V/V_T} - 1)$$

dove 300 K è $n_{p0} = n_i^2/N_a = 4205 \text{ cm}^{-3}$. Si ottiene

$$n'_p(0) = 4205 \cdot (e^{0,65/0,026} - 1) = 3 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$$

L'andamento della distribuzione degli elettroni in eccesso nel lato p vale

$$n'_p(x) = 3 \cdot 10^{14} \cdot e^{-x/11,2 \cdot 10^{-4}}$$

ed è tracciato nella figura 5.15.

b)

Se si rimuove l'ipotesi di campo elettrico nullo nella *regione quasi-neutra* e supponendo che questo sia costante e pari a 3 Vcm^{-1} , si hanno conseguenze sull'entità della iniezione degli elettroni e quindi sull'andamento della concentrazione degli elettroni nel lato p.

¹⁶Tale espressione, che in questo caso permette solamente di valutare il livello di iniezione, sarà studiata a fondo nei capitoli 9 e 10.

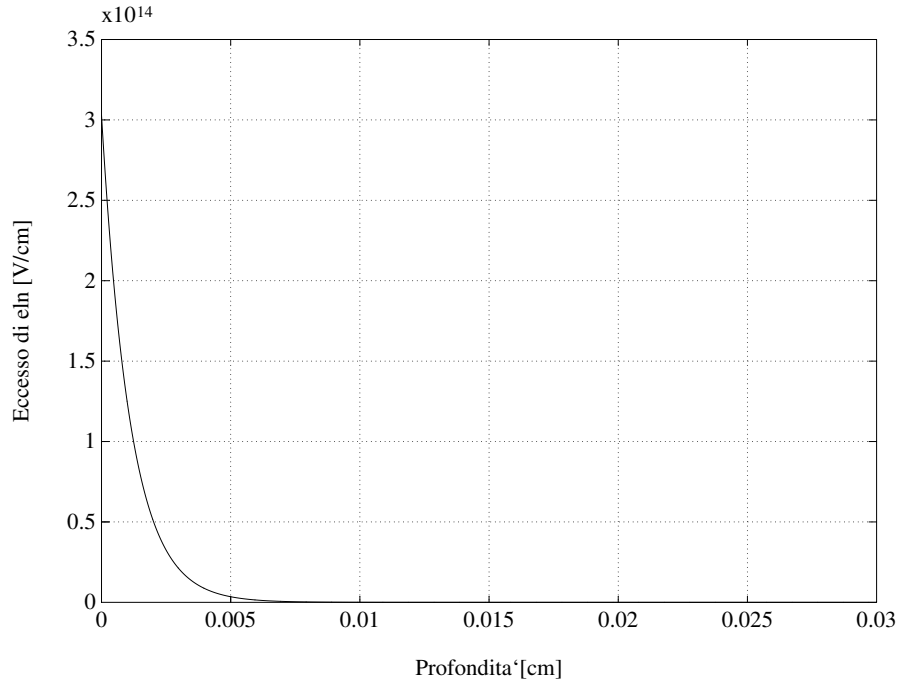


Figura 5.15: Andamento degli elettroni iniettati nel lato p con una polarizzazione diretta di 0,65 V.

La presenza di un campo elettrico costante indica che esiste una caduta resistiva nel lato p che riduce la tensione effettiva sulla giunzione al valore

$$V_J = V - \Delta V_p = V - \mathcal{E}W_p$$

di conseguenza il valore della concentrazione di portatori iniettati diventa

$$n'_p(0) = n_{p0} \left(e^{\frac{V - \mathcal{E}W_p}{V_T}} - 1 \right) = 9,5 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$$

Si nota come la presenza di un campo relativamente debole porta a una riduzione dell'eccesso di elettroni di quasi due ordini di grandezza.

c)

Per quanto riguarda l'effetto sull'andamento della concentrazione, la presenza di un campo elettrico modifica la forma dell'equazione di continuità. Infatti sostituendo nell'equazione

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{q} \frac{\partial J_n}{\partial x} - \frac{n'}{\tau_n}$$

la corrente di elettroni

$$J_n = q\mu_n n \mathcal{E} + qD_n \frac{dn}{dx}$$

si trova per l'equazione di continuità, dato che il campo è costante, la seguente espressione

$$\mu_n \mathcal{E} \frac{dn'}{dx} + D_n \frac{d^2 n'}{dx^2} - \frac{n'}{\tau_n} = 0$$

Si tratta di un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti. La corrispondente equazione caratteristica è

$$D_n \lambda^2 + \mu_n \mathcal{E} \lambda - 1/\tau_n = 0$$

da cui si ottengono le radici

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\mu_n \mathcal{E} \pm \sqrt{(\mu_n \mathcal{E})^2 + 4(D_n/\tau_n)}}{2D_n}$$

Pertanto la forma generale della soluzione per $n'(x)$ è

$$n'(x) = A e^{\lambda_1 x} + B e^{\lambda_2 x}$$

Nella presente situazione in cui $W_p \gg L_n$, la concentrazione in eccesso deve annullarsi per $x \rightarrow \infty$ e, dato che la radice λ_1 è positiva e λ_2 negativa, dovrà essere $A = 0$ e $B = n'_p(0)$.

La costante di *decadimento* risulta funzione del campo elettrico; per $\mathcal{E} = 0$, $\lambda = -1/\sqrt{D_n \tau_n} = -1/L_n$, mentre al crescere di \mathcal{E} anche λ cresce in modulo. La distribuzione $n'(x)$ diventa

$$n'_p(x) = n_{p0} \left(e^{\frac{V - \mathcal{E} W_p}{V_T}} - 1 \right) e^{\frac{-\mu_n \mathcal{E} - \sqrt{(\mu_n \mathcal{E})^2 + 4(D_n/\tau_n)}}{2D_n} x}$$

e presenta l'andamento tracciato nella figura 5.16; le diverse curve sono caratterizzate da diversi valori del campo elettrico esterno: al crescere del campo le curve degli elettroni iniettati presentano valori inferiori.

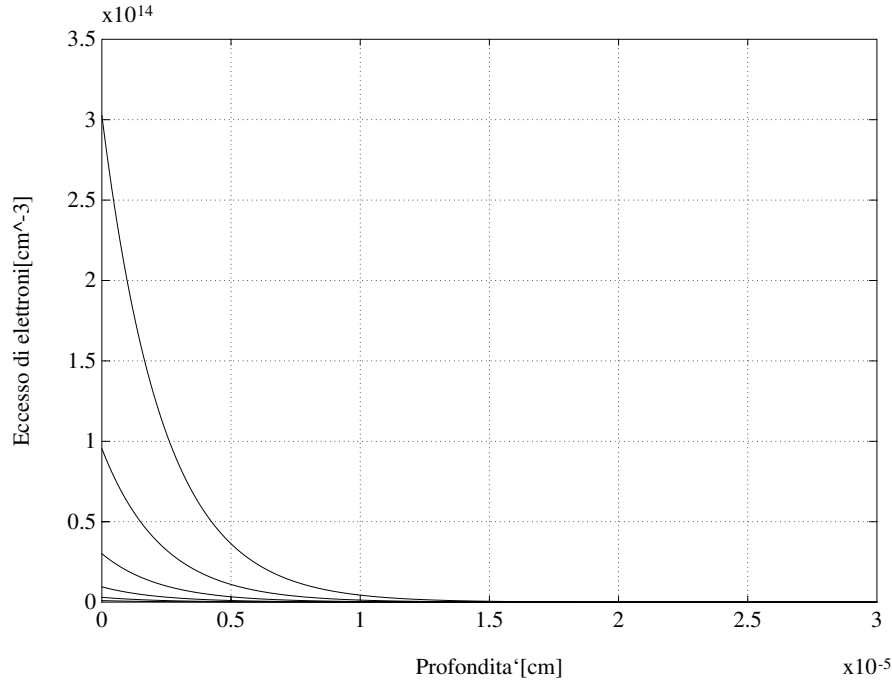


Figura 5.16: Andamento di $n'_p(x)$ per valori di campo elettrico (curve a partire dall'alto) rispettivamente di 0, 1, 2, 3, 4, 5 V cm⁻¹.

5.2.7

Si consideri un campione di silicio di lunghezza $L = 50 \mu\text{m}$ e di sezione $S = 100 \mu\text{m}^2$, drogato con una concentrazione di impurità variabile lungo il semiconduttore, $N_d(x) = N_{d0} (1 + x/L)$. Supponendo la completa ionizzazione delle impurità, si ricavi un'espressione differenziale per il calcolo della corrente di diffusione e del campo elettrico nel materiale. Supponendo di poter approssimare la distribuzione dei portatori con quella del drogante (quasi neutralità), si calcoli il valore numerico della corrente di diffusione e si ricavi l'andamento del campo elettrico.

La corrente totale attraverso il materiale deve essere nulla ed è somma di una componente di diffusione, proporzionale al gradiente della concentrazione di elettroni n , e di una di trascinamento, proporzionale al campo elettrico e alla densità di carica ρ ; poiché ogni elettrone che si allontana per diffusione lascia scoperta una carica positiva, si ha (trascurando le lacune)

$$\rho = q [N_d(x) - n(x)]$$

La corrente totale vale allora

$$I_{\text{tot}} = S q D_n \frac{dn}{dx} + S q \mu_n n \mathcal{E} = 0$$

ovvero, applicando la relazione di Einstein

$$\frac{k T}{q} \frac{dn}{dx} = -n \mathcal{E}$$

Derivando entrambi i membri rispetto a x , si ottiene

$$\frac{k T}{q} \frac{d^2 n}{dx^2} = -\frac{dn}{dx} \mathcal{E} - n \frac{d\mathcal{E}}{dx}$$

Si applica ora l'equazione di Poisson per scrivere

$$\frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{\rho}{\epsilon} = \frac{q}{\epsilon} (N_d - n)$$

e dunque, sostituendo

$$\frac{k T}{q} \frac{d^2 n}{dx^2} - \frac{k T}{n q} \left(\frac{dn}{dx}\right)^2 + \frac{q}{\epsilon} (N_d - n) n = 0$$

Risolvendo l'equazione differenziale, si ottiene la concentrazione dei portatori $n(x)$, dalla quale si determinano la corrente di diffusione e il campo elettrico.

Nell'ipotesi di quasi neutralità, $n(x) \simeq N_d(x)$ e uguagliando le correnti di diffusione e trascinamento si ha

$$\mathcal{E} = -\frac{k T}{q} \frac{1}{N_d} \frac{dN_d}{dx} = -\frac{k T}{q} \frac{1}{L + x}$$

La corrente di diffusione vale

$$I_{\text{diff}} = S q D_n \frac{dN_d}{dx} = S q D_n \frac{N_d}{L}$$

Posto $D_n = 34,6 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$, si ha $I_{\text{diff}} = 0,5536 \text{ A}$.

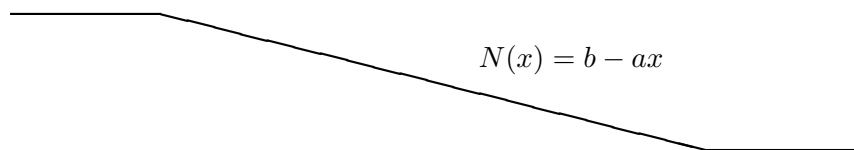


Figura 5.17: Drogaggio di tipo n con variazione lineare.

5.3 Neutralità elettrica

5.3.1

Perché in un semiconduttore omogeneo si può pensare che si verifichi una situazione di neutralità con una perfetta compensazione delle cariche elettriche punto per punto?

In ogni volume del semiconduttore gli atomi donatori, ionizzandosi, producono in egual numero elettroni liberi nella banda di conduzione e ioni positivi (N_d^+) immobili nel reticolo cristallino; gli atomi accettori, ionizzandosi, forniscono in egual numero lacune libere nella banda di valenza e ioni negativi (N_a^-) nel reticolo. Inoltre elettroni e lacune generati termicamente nascono e scompaiono a coppie, pertanto in condizioni di equilibrio termodinamico il fenomeno è intrinsecamente bilanciato.

Il numero totale delle cariche positive è pari a quello delle cariche negative

$$N_d^+ + p - N_a^- - n = 0$$

Pertanto

$$\rho(P) = e (N_d^+ + p - N_a^- - n) = 0$$

Se il drogaggio è omogeneo la concentrazione delle cariche libere n e p è costante all'interno del semiconduttore e non si verificano fenomeni di diffusione che provocherebbero spostamenti di portatori mobili e quindi genererebbero zone di non neutralità.

5.3.2

Si consideri un semiconduttore drogato di tipo n con profilo di drogaggio a variazione lineare come indicato nella figura 5.17.

1. *È accettabile all'equilibrio termodinamico una situazione in cui punto per punto sia verificata una condizione di neutralità di cariche?*
2. *In assenza di corrente totale (il campione di semiconduttore è in condizioni di circuito aperto) quali sono le relazioni di equilibrio tra le varie componenti delle correnti?*
3. *Quali considerazioni giustificano il principio dell'equilibrio dettagliato, cioè il fatto che la situazione di equilibrio tra le correnti vale singolarmente per lacune ed elettroni? (Si usi un ragionamento per assurdo.)*

a)

Se la temperatura è sufficientemente alta perché tutte le impurità siano ionizzate, si ha nel semiconduttore una variazione graduale di cariche immobili (ioni positivi) di densità volumica qN , che si riduce linearmente da sinistra verso destra. All'equilibrio

termodinamico è una nube di elettroni, che punto per punto neutralizza le cariche positive

$$n(x) = N(x) = b - ax$$

In questo caso però si ha un gradiente della concentrazione di elettroni liberi il cui numero diminuisce da sinistra verso destra e si produce una corrente di diffusione

$$J_{n,\text{diff}} = q D_n \frac{\partial n}{\partial x} = -q D_n a$$

Il moto di elettroni produce cariche positive non neutralizzate sulla destra e un addensamento di cariche mobili negative sulla sinistra. *La zona a drogaggio non uniforme presenta una densità di carica $\rho(x)$ diversa da zero*, cioè è una zona non neutra. La carica spaziale $\rho(x) \neq 0$ genera un campo elettrico $\mathcal{E}(x)$ che tende a opporsi al flusso di diffusione. L'equilibrio si ottiene dal bilanciamento di questi due fenomeni.

b)

In assenza di corrente totale (il campione di semiconduttore è in condizioni di circuito aperto) la somma totale delle correnti deve essere nulla.

Come si è visto gli elettroni si muovono per opera della diffusione ($J_{n,\text{diff}}$) e del campo elettrico ($J_{n,\text{trasc}}$), ma anche le lacune presentano un gradiente di concentrazione [$p_n(x) \simeq n_i^2/N(x)$] e subiscono un processo di diffusione ($J_{p,\text{diff}}$). Il campo elettrico inoltre muove le lacune in verso opposto ($J_{p,\text{trasc}}$).

La relazione di equilibrio tra le varie componenti delle correnti è

$$J_{n,\text{diff}} + J_{n,\text{trasc}} + J_{p,\text{diff}} + J_{p,\text{trasc}} = 0$$

c)

La situazione di equilibrio tra le correnti vale singolarmente per lacune ed elettroni, cioè devono essere separatamente nulle la corrente totale di elettroni e quella di lacune. Se così non fosse vorrebbe dire che, in condizioni di circuito aperto, la corrente totale di elettroni che fluisce in un verso dovrebbe essere bilanciata dalla corrente totale di lacune in direzione opposta. Elettroni e lacune sono cariche di segno opposto, quindi per dare luogo a correnti di segno opposto devono muoversi nello stesso verso. La compensazione delle due correnti comporta il moto sia di elettroni sia di lacune verso lo stesso estremo del pezzo di semiconduttore. A un estremo dovrebbero crearsi coppie di portatori (fenomeno che assorbe energia) che trasmigrano all'altro estremo. Si avrebbe un trasferimento di energia da un estremità all'altra e ciò in condizioni di equilibrio termodinamico è in contrasto con la seconda legge della termodinamica.

In conclusione le correnti totali di elettroni e di lacune devono annullarsi separatamente (principio dell'equilibrio dettagliato).

5.3.3

Si supponga che in un pezzo di silicio a $T = 300\text{ K}$ si abbia una distribuzione di elettroni liberi, come illustrato nella figura 5.17, con $n_1 = 5 \cdot 10^{17}\text{ cm}^{-3}$, $\mu_n = 1417\text{ cm}^2\text{ V}^{-1}\text{ s}^{-1}$ e $w = 1\text{ }\mu\text{m}$, e che non vi sia alcuna carica che li neutralizza.

1. *Al fine di valutare se la configurazione di carica illustrata è accettabile, si calcolino il campo elettrico, nell'ipotesi che sia nullo in $x = w$, e la corrente per $x = 0$ necessari per sostenere la distribuzione di carica libera.*

Si tenga presente che la densità di corrente massima, prima che la dissipazione di potenza possa causare un danno irreversibile, vale 10^5 A cm^{-2} .

2. Si assume ora che siano presenti cariche positive di compensazione, la cui concentrazione abbia lo stesso andamento di quella degli elettroni liberi, ma con valore massimo N_{d0} . Si calcoli il valore di N_{d0} corrispondente al massimo della densità di corrente (punto a).

Si esprima lo scostamento tra cariche di segno opposto come frazione della concentrazione degli elettroni liberi, per verificare, anche in questa condizione limite, il grado di neutralità elettrica del pezzo di silicio.

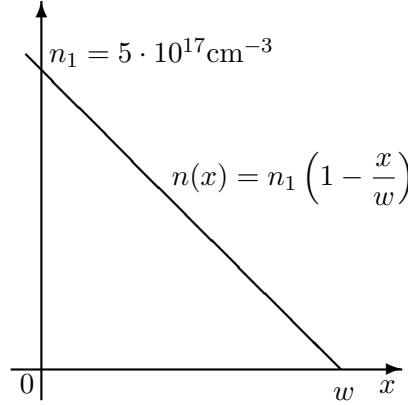


Fig. 5.17 Andamento spaziale della distribuzione dei portatori.

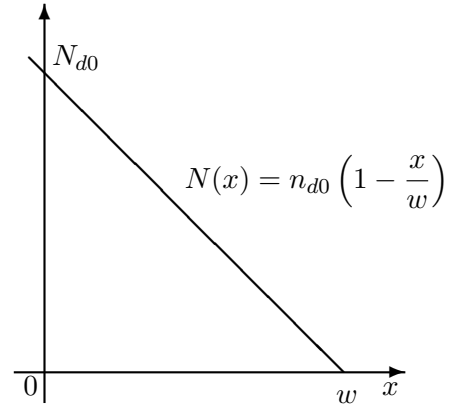


Fig. 5.18 Andamento spaziale della carica neutralizzante.

a)

Il campo elettrico si trova integrando la legge di Gauss

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} &= \frac{\rho}{\epsilon_s} = -\frac{qn(x)}{\epsilon_s} = -\frac{qn_1}{\epsilon_s} \left(1 - \frac{x}{w}\right) \\ \mathcal{E}(x) &= -\frac{qn_1}{\epsilon_s} \left(x - \frac{x^2}{2w}\right) + C\end{aligned}$$

e si usa la condizione al contorno $\mathcal{E}(w) = 0$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(w) &= -\frac{qn_1}{\epsilon_s} \left(w - \frac{w}{2}\right) + C = 0 \rightarrow C = \frac{qn_1}{\epsilon_s} \frac{w}{2} \\ \mathcal{E}(x) &= \frac{qn_1}{\epsilon_s} \left(\frac{x^2}{2w} - x + \frac{w}{2}\right) \\ \mathcal{E}(0) &= \frac{qn_1 w}{2\epsilon_s} = 3,866 \cdot 10^6 \text{ V cm}^{-1}\end{aligned}$$

Il campo massimo è superiore di quasi un ordine di grandezza ai valori per cui si ha il fenomeno del breakdown¹⁷. La distribuzione di cariche libere proposta non è plausibile. Dato che $D_n = kT/q\mu_n = 0,026 \times 1417 = 36,84 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ e che $dn(x)/dx = -n_1/w$, la

¹⁷Campo di breakdown $\simeq 3 \cdot 10^5 \text{ V cm}^{-1}$.

corrente di elettroni all'interno del semiconduttore vale

$$\begin{aligned} J_n(x) &= q\mu_n n(x) \mathcal{E}(x) + qD_n \frac{dn(x)}{dx} = q\mu_n n_1 \left(1 - \frac{x}{w}\right) \mathcal{E}(x) - qD_n \frac{n_1}{w} \\ J_n(0) &= q\mu_n n_1 \mathcal{E}(0) - \frac{qD_n n_1}{w} = q\mu_n n_1 \frac{qn_1 w}{2\epsilon_s} - \frac{qD_n n_1}{w} = \\ &= \frac{(1,602 \cdot 10^{-19})^2 \times 1417 \times (5 \cdot 10^{18})^2 \times 10^{-4}}{2 \times 11,7 \times 8,8544 \cdot 10^{-12}} - \\ &= \frac{1,602 \cdot 10^{-19} \times 36,84 \times 5 \cdot 10^{18}}{10^{-4}} = 4,386 \cdot 10^8 \text{ A/cm}^2 \end{aligned}$$

Anche la densità di corrente risulta troppo elevata, infatti nei dispositivi reali si hanno normalmente densità di corrente di 5 o più ordini di grandezza inferiori. Il massimo valore sopportabile nel caso in esame è 10^5 A cm^{-2} . La distribuzione di carica libera presentata non è realizzabile.

b)

La distribuzione di carica libera assegnata risulta realizzabile in presenza di una distribuzione di cariche positive (fisse) che tendano a compensare la carica degli elettroni liberi; tale distribuzione ha lo stesso andamento degli elettroni, ma con valore massimo N_{d0} . Nell'equazione di Poisson la densità di carica è

$$\rho(x) = -q(n_1 - N_{d0}) \left(1 - \frac{x}{w}\right)$$

Di conseguenza valgono le formule dei punti precedenti, pur di sostituire n_1 con $n_1 - N_{d0}$; pertanto si ha ¹⁸

$$\mathcal{E}(x) = \frac{q(n_1 - N_{d0})}{\epsilon_s} \left(\frac{x^2}{w} - x + \frac{w}{2}\right) \rightarrow \mathcal{E}(0) = \frac{q(n_1 - N_{d0})}{2\epsilon_s}$$

Imponendo il valore limite $J_n(0) = 10^5 \text{ A/cm}^2$

$$\begin{aligned} J_n(0) &= \overbrace{q^2 \mu_n n_1}^{\text{carica mobile}} \overbrace{\frac{(n_1 - N_{d0})}{2\epsilon_s}}^{\text{campo}} - \frac{qD_n n_1}{w} = 10^5 \text{ A/cm}^2 \\ N_{d0} &= -\left(10^5 + \frac{qD_n n_1}{w}\right) \left(\frac{2\epsilon_s}{q^2 \mu_n n_1}\right) + n_1 \\ &= 5 \cdot 10^{17} - 1,47 \cdot 10^{10} \simeq 10^{18} \text{ cm}^{-3} \end{aligned}$$

Lo scostamento relativo dalla neutralità vale $1,47 \cdot 10^{10} / 5 \cdot 10^{18} = 2,94 \cdot 10^{-9}$.

5.3.4

In un semiconduttore di tipo p, drogato uniformemente con una concentrazione di atomi accettori $N_a = 5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$, viene effettuata una impiantazione ionica. Si produce il profilo di drogaggio

$$N_a - N_d = \frac{N'}{\sqrt{2\pi}\Delta R_p} \exp - \frac{(x - R_p)^2}{2\Delta R_p^2}$$

¹⁸Si faccia attenzione a un uso corretto di unità di misura coerenti.

dove

$$\begin{aligned} N' &= 2,5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-2} \\ \Delta R_p &= 70 \text{ nm} \\ R_p &= 290 \text{ nm} \end{aligned}$$

Si calcoli, in condizioni di equilibrio termodinamico, il campo elettrico nella regione quasi neutra del lato n.

5.3.5

Si consideri un pezzo di semiconduttore drogato di tipo n in modo sostanzialmente uniforme:

$$n \simeq N_d \simeq n_{n0} = n_0$$

Supponendo che per piccole disomogeneità di drogaggio si abbia un leggero scostamento dalla neutralità elettrica, per cui

$$\rho(x) = -q (n - n_0) \neq 0$$

si chiede quale sia l'evoluzione nel tempo della carica volumica, cioè se il semiconduttore tenda a esaltarla o ad annullarla.

Dato che si desidera determinare un'evoluzione nel tempo, occorre usare l'equazione di continuità, in cui si possono introdurre le seguenti approssimazioni:

- il drogaggio è sostanzialmente omogeneo,

$$\nabla n \simeq 0 \quad \longrightarrow \quad J_{\text{diff}} \simeq 0$$

- il termine di generazione e ricombinazione è trascurabile, perché non si hanno cause esterne di generazione e perché si considerano portatori di maggioranza.

$$\frac{n - n_0}{\tau_n} \simeq 0$$

L'equazione di continuità assume l'aspetto

$$\frac{\partial n}{\partial t} \simeq \frac{1}{q} \frac{\partial J_n}{\partial x}$$

e dato che l'unica corrente è la corrente di trascinamento

$$J \simeq J_{\text{trasc}} = \sigma \mathcal{E} = -qnv$$

l'equazione di continuità diventa

$$\frac{\partial n}{\partial t} \simeq -n \frac{\partial v}{\partial x}$$

Il legame tra v e x si attua attraverso il campo elettrico \mathcal{E}

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \mathcal{E}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} = -\mu_n \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x}$$

Nella espressione si è introdotta la mobilità differenziale, $\mu_n = -\partial v / \partial \mathcal{E}$. Il termine $\partial \mathcal{E} / \partial x$ è espresso dalla legge di Gauss

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} = \frac{\rho}{\epsilon_s}$$

Sostituendo si ottiene l'equazione che regola l'evoluzione nel tempo della carica spaziale nel semiconduttore ($n \simeq n_0$)

$$\frac{d\rho}{dt} = - (q\mu n_0) \frac{\rho}{\epsilon_s}$$

Integrando ¹⁹ si ha l'evoluzione nel tempo della carica volumica:

$$\boxed{\rho(t) = \rho(0) e^{-\frac{qn_0}{\epsilon_s} \int_0^t \mu dt}}$$

Se vale l'approssimazione $\mu(\mathcal{E}[t]) \simeq \text{cost.}$, l'integrale a esponente si risolve semplicemente e si ha

$$\boxed{\rho(t) = \rho(0) e^{-\frac{qn_0\mu}{\epsilon_s} t}}$$

dove

$$\tau_d = \frac{\epsilon_s}{qn_0\mu} = \frac{\epsilon_s}{\sigma}$$

è il tempo di rilassamento dielettrico.

L'evoluzione nel tempo della carica spaziale $\rho \neq 0$ dipende dal segno dell'esponente. Se l'esponente è negativo ($\mu > 0$) la carica spaziale si spegne esponenzialmente nel tempo con costante di tempo τ_d . Nel semiconduttore si ripristina la condizione di neutralità ($\rho = 0$) tanto più rapidamente quanto più piccolo è il tempo di rilassamento, cioè quanto più elevata è la conducibilità (il drogaggio). Se però l'esponente è positivo, cioè se la mobilità differenziale è negativa (come si verifica nel GaAs), la carica spaziale cresce esponenzialmente nel tempo.

5.3.6

Si consideri un campione di semiconduttore di tipo n, con un drogaggio pari a N_d . Supponendo che esista uno scostamento, rispetto al valore che garantisce la neutralità, della concentrazione dei portatori

1. nello spazio

$$n(x) = N_d + \delta n(x)$$

2. nel tempo

$$n(t) = N_d + \delta n(t)$$

¹⁹L'equazione differenziale $\frac{dy}{dx} = a(x) y$ ha soluzione generale del tipo $y(x) = y(0) \exp(\int_0^x a(x) dx)$.

si analizzi quantitativamente il fenomeno usando le formule del modello matematico per ottenere espressioni per l'andamento nello spazio $\delta n(x)$ e nel tempo $\delta n(t)$ degli scostamenti dalla neutralità. Si consideri un caso monodimensionale e si assuma che lo scostamento δn sia piccolo rispetto alla concentrazione dei portatori maggioritari.

Basandosi sui risultati ottenuti si suggeriscano considerazioni di carattere generale sul concetto di quasi neutralità.

La densità di carica, trascurando la concentrazione p delle lacune, risulta

$$\rho = q (N_d - n) = -q \delta n$$

L'equazione di Poisson e l'equazione di continuità assumono l'aspetto

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi = \frac{q}{\epsilon_s} (n - N_d) \\ \frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{q} \nabla (n q \mu_n \mathcal{E} + q D_n \nabla n) \end{cases}$$

Esprimendo il campo elettrico \mathcal{E} in funzione del potenziale ψ ($\mathcal{E} = -\nabla \psi$), si ottiene per l'equazione di continuità l'espressione

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \nabla (-n \mu_n \nabla \psi + D_n \nabla n)$$

a)

Si considera uno spostamento di tipo spaziale dalla neutralità

$$n(x) = N_d + \delta n(x)$$

Le equazioni del modello nel caso monodimensionale, osservando che la concentrazione non varia nel tempo e ponendo il potenziale nella forma $\psi(x) = \psi_0 + \delta \psi(x)$, diventano

$$\begin{cases} \frac{d^2 \delta \psi}{dx^2} = \frac{q}{\epsilon_s} (\delta n(x)) \\ \frac{d}{dx} \left[-\mu_n (N_d + \delta n(x)) \frac{d \delta \psi}{dx} + D_n \frac{d}{dx} (N_d + \delta n(x)) \right] = 0 \end{cases}$$

Il termine $\delta n(x)$ è sicuramente trascurabile rispetto a N_d , da cui

$$\begin{cases} \frac{d^2 \delta \psi}{dx^2} = \frac{q}{\epsilon_s} \delta n(x) \\ -\mu_n N_d \frac{d^2 \delta \psi}{dx^2} + D_n \frac{d^2 \delta n(x)}{dx^2} = 0 \end{cases}$$

Sostituendo nella seconda equazione il termine $d^2 \psi / dx^2$ che si ha dalla prima, si ottiene

$$-\mu_n N_d \frac{q}{\epsilon_s} \delta n(x) + D_n \frac{d^2 \delta n(x)}{dx^2} = 0$$

e usando la relazione di Einstein

$$\frac{d^2 \delta n(x)}{dx^2} = \frac{\mu_n N_d q}{\epsilon_s D_n} \delta n(x) = \frac{N_d q^2}{\kappa T \epsilon_s} \delta n(x)$$

La quantità

$$L_D \equiv \sqrt{\frac{\kappa T \epsilon_s}{N_d q^2}}$$

ha le dimensioni di una lunghezza e si definisce *lunghezza di Debye*. La soluzione generale assume la forma

$$\delta n(x) = A e^{-x/L_D} + B e^{x/L_D}$$

Le costanti si determinano imponendo che per $x = 0$ l'eccesso di portatori sia pari a $\delta n(0)$ e che per $x \rightarrow +\infty$, $\delta n(x) \rightarrow 0$: si ha

$$\delta n(x) = \delta n(0) e^{-x/L_D}$$

b)

Per esaminare lo scostamento dalla neutralità di tipo temporale

$$n(t) = N_d + \delta n(t)$$

si può ripetere il ragionamento seguito nel caso precedente, sostituendo alla quantità $n(x)$ la quantità $n(t)$. Osservando inoltre che

$$\frac{d\delta n(t)}{dt} = 0$$

le equazioni del modello diventano

$$\begin{cases} \frac{d^2 \delta \psi}{dx^2} = \frac{q}{\epsilon_s} (\delta n(t)) \\ \frac{d}{dx} \left[-\mu_n (N_d + \delta n(t)) \frac{d\delta \psi}{dx} \right] = \frac{d(N_d + \delta n(t))}{dt} \end{cases}$$

Si giunge all'equazione

$$-\mu_n N_d \frac{q}{\epsilon_s} \delta n(t) = \frac{\partial \delta n(t)}{\partial t}$$

ovvero

$$\frac{\partial \delta n(t)}{\partial t} + \mu_n N_d \frac{q}{\epsilon_s} \delta n(t) = 0$$

Il coefficiente moltiplicativo $\mu_n N_d q / \epsilon_s$ può essere riscritto in funzione della lunghezza di Debye e della diffusività D_n , infatti moltiplicando il numeratore e il denominatore per $\kappa T q$ e ricordando l'equazione di Einstein

$$\mu_n N_d \frac{q}{\epsilon_s} \frac{\kappa T q}{\kappa T q} = \frac{D_n}{L_D^2}$$

l'equazione diventa

$$\frac{\partial \delta n(t)}{\partial t} = -\frac{D_n}{L_D^2} \delta n(t)$$

La quantità

$$\boxed{\tau_d \equiv \frac{L_D^2}{D_n}}$$

ha le dimensioni di un tempo e si definisce *tempo di rilassamento dielettrico*; si ha la soluzione generale

$$\delta n(t) = A e^{-t/\tau_d}$$

Imponendo ora che per $t = 0$ l'eccesso di portatori sia pari a $\delta n(0)$, si ottiene

$$\delta n(t) = \delta n(0) e^{-t/\tau_d}$$

Si può allora concludere che, in un semiconduttore omogeneo, piccole variazioni di campo elettrico, ovvero scostamenti locali dalla condizione di neutralità, sono riassorbiti esponenzialmente con una costante spaziale pari alla lunghezza di Debye e con una costante di tempo pari al tempo di rilassamento dielettrico. Quindi la lunghezza di Debye è una misura della distanza entro cui si può ritenere localizzata una *non neutralità*, mentre il tempo di rilassamento dielettrico è una misura di quanto a lungo possa essere mantenuta una condizione di non neutralità all'interno del semiconduttore uniforme.

5.3.7

Si studi lo scostamento dalla neutralità che si verifica all'equilibrio termodinamico in un semiconduttore drogato in modo non omogeneo, con impurità completamente ionizzate. Si scriva l'equazione differenziale che, noto il profilo di drogaggio $N(x)$, consente di trovare l'andamento del potenziale $\psi(x)$.

In caso di disomogeneità di drogaggio, si verifica uno scostamento dalla neutralità elettrica (problema 5.3.2); l'equazione di Poisson, sotto l'ipotesi che le impurità siano totalmente ionizzate, lega il potenziale ψ alla carica volumica

$$\nabla^2 \psi = - \frac{q}{\epsilon_s} (N + p - n)$$

Il potenziale ψ nel semiconduttore si può desumere dall'energia potenziale (andamento delle bande di energia). Assumendo come livello di riferimento E_F (costante all'equilibrio termodinamico) e come andamento delle bande quello di E_i , le equazioni di Shockley diventano

$$\begin{cases} n_0 = n_i e^{-\psi/V_T} \\ p_0 = p_i e^{+\psi/V_T} \end{cases}$$

In un materiale uniforme la carica volumica dell'equazione di Poisson è nulla e $\psi = \psi_0 = \text{cost}$; in particolare nel semiconduttore intrinseco, $\psi = 0$ per la scelta del riferimento.

In regioni a drogaggio non omogeneo il secondo membro dipende da x , dato che $N = N_d - N_a = N(x)$, pertanto $\psi = \psi(x) \neq \psi_0$; ponendo $u = \psi/V_T$ (potenziale in unità di "tensione termica"), si ha

$$\nabla^2 u = - \frac{2qn_i}{V_T \epsilon_s} \left[\sinh u - \frac{N}{2n_i} \right]$$

noto $N(x)$ si trova $u(x)$ cioè $\psi(x)$.

5.3.8

Si esamini che cosa succede in un semiconduttore ai margini di una regione in cui il drogaggio non è uniforme e il potenziale $\psi \neq \psi_0$ (problema 5.3.7). Nella regione adiacente, a drogaggio uniforme, il potenziale tende a ritornare al valore ψ_0 caratteristico di una regione neutra. Si esamini una zona in cui lo scostamento sia piccolo, cioè in cui sia già $|\psi - \psi_0| \ll 1$ e si determini con quale legge si ristabilisce spazialmente la situazione $\psi = \psi_0$. Si consideri per esempio un semiconduttore di tipo n sufficientemente drogato ($N > 0$ e $N \gg n_i$). Il problema può essere studiato lungo un'unica dimensione.

Come si modificherebbe il risultato ottenuto per scostamenti dalla neutralità elevati?

Si usa come nel problema 5.3.7 la grandezza normalizzata $u = \psi/V_T$. In un materiale omogeneo, $\nabla^2\psi = 0$ pertanto all'equilibrio $u = u_0 = \text{cost}$

$$\sinh u_0 \equiv \frac{N}{2n_i}$$

L'equazione di Poisson diventa

$$\begin{aligned}\nabla^2 u &= -\frac{2qn_i}{V_T\epsilon_s} [\sinh u - \sinh u_0] \\ &= -\frac{4qn_i}{V_T\epsilon_s} \cosh\left(\frac{u+u_0}{2}\right) \sinh\left(\frac{u-u_0}{2}\right)\end{aligned}$$

Dato che $|\psi - \psi_0| \ll 1$, nel semiconduttore di tipo n è $u \rightarrow u_0 > 0$. Pertanto

$$\begin{aligned}\sinh\left(\frac{u-u_0}{2}\right) &\simeq \left(\frac{u-u_0}{2}\right) \\ \cosh\left(\frac{u+u_0}{2}\right) &\simeq \cosh u_0 = \sqrt{1 + \sinh^2 u_0} \simeq \frac{N}{2n_i} > 0\end{aligned}$$

L'equazione differenziale si può approssimare nel modo seguente (il semiconduttore nella zona in esame è uniforme: u_0 non dipende da x)

$$\frac{d^2(u-u_0)}{dx^2} = \frac{qN}{V_T\epsilon_s} (u-u_0)$$

Unica soluzione accettabile per lo scostamento di potenziale $u-u_0$ è quella che si spegne asintoticamente con $x \rightarrow +\infty$

$$u - u_0 \propto \psi - \psi_0 \propto e^{-x/L_D}$$

$$L_D \equiv \sqrt{\frac{\kappa T \epsilon_s}{q^2 N}}$$

L_D , *lunghezza di Debye* (5.22), è una misura della distanza su cui si smorzano, entro il materiale uniforme, piccoli scostamenti del potenziale dal valore in neutralità.

Si può anche scrivere ²⁰

$$L_D = \sqrt{\frac{\kappa T \mu}{q} \frac{\epsilon_s}{q \mu N}} \simeq \sqrt{D_n \frac{\epsilon_s}{\sigma}} = \sqrt{D_n \tau_d}$$

dove $\tau_d \equiv \epsilon_s/\sigma$ è il *tempo di rilassamento dielettrico*.

Nota

In situazioni in cui lo scostamento dalla neutralità non sia piccolo, il secondo membro della (5.22), per opera del fattore $\sinh([u-u_0]/2)$, varia con $[u-u_0]$ quasi esponenzialmente. Pertanto il termine $\nabla^2 u$, che misura la rapidità spaziale con cui varia la pendenza del potenziale, diventa molto elevato. Per questa ragione ogni scostamento dalla neutralità (di u rispetto a u_0) inizialmente elevato si smorza entro una distanza inferiore a L_D . Dato che lo smorzamento è superiore, la lunghezza di Debye, ottenuta nel caso di piccoli scostamenti, rappresenta un limite superiore. In un semiconduttore uniformemente drogato, all'equilibrio termodinamico non si possono trovare scostamenti significativi dalla neutralità elettrica per distanze superiori a circa $(4 \div 5) L_D$.

²⁰Si è usata la relazione di Einstein $(kT/q)\mu = D$ tra la mobilità μ e la diffusività D .

5.3.9

Si calcoli il valore del tempo di rilassamento dielettrico nel caso di un metallo tipico e di semiconduttori (Ge, Si e GaAs) in condizioni di drogaggio solite o limite (inferiore e superiore). Nel caso dei semiconduttori si calcolino anche le lunghezze di Debye.

Capitolo 6

Processi tecnologici di base

In questo capitolo sono affrontati i principali aspetti della tecnologia planare per la realizzazione di dispositivi integrati.

Si parte dalle tecniche di crescita dei monocristalli e si prosegue con l'esame dell'ossidazione termica del silicio. In particolare viene considerata la crescita di ossidi di campo e di ossidi sottili, sia mantenendo costanti le condizioni di ossidazione, sia variandole in più fasi.

Sull'ossidazione termica, come su tutti gli altri processi tecnologici studiati in questo capitolo, vengono risolti numerosi esercizi utilizzando il simulatore di processo SUPREM (di cui viene data in appendice una breve sintesi dei comandi), soprattutto per verificare di volta in volta l'accuratezza dei modelli analitici mediante il confronto con i risultati della simulazione.

Il processo dell'introduzione controllata di impurità rappresenta la fase più delicata nella realizzazione dei dispositivi elettronici integrati, perciò viene dedicata particolare attenzione allo studio della diffusione da fase gassosa e dell'impiantazione ionica. Vengono poi affrontati anche i fenomeni della ridiffusione termica e del rinvenimento ("annealing"), che sono conseguenze dei successivi cicli termici subiti dal semiconduttore. Tra i problemi particolari trattati si esamina l'impiego di uno strato di ossido come maschera per l'introduzione di impurità, data la notevole importanza che tale situazione riveste nelle tecnologie di fabbricazione dei circuiti integrati monolitici.

Il capitolo si chiude con lo studio delle tecniche di realizzazione dei resistori integrati diffusi e con alcuni esercizi sui circuiti ibridi che completano lo scenario delle principali tecnologie elettroniche.

6.1 Crescita del monocristallo

Durante la crescita del monocristallo anche gli atomi di drogaggio passano dal fuso al cristallo che si sta formando; il fenomeno è descritto mediante il coefficiente di segregazione del drogante nel cristallo solidificato, definito come

$$k_s = \frac{C_{\text{solido}}}{C_{\text{liquido}}}$$

Le concentrazioni sono concentrazioni volumiche e possono indifferentemente essere espresse in peso (peso del drogante/volume), o in numero di atomi (num. at. drogante/volume) ¹. Si hanno i valori:

Si		GaAs	
As	0,3	Se	0,1
P	0,35	Te	0,064
B	0,8	Si	2
Sb	0,023	Sn	0,08
C	0,07	C	1
O	0,5	S	0,5
Au	$2,5 \cdot 10^{-5}$	Cr	$5,7 \cdot 10^{-4}$

Talora le concentrazioni vengono riferite al peso (peso del drogante/peso totale), oppure sono date come numero di atomi (num. at. drogante/num. at. totali) ². La differenza rispetto alle precedenti definizioni è dovuta ai diversi valori di densità del fuso e del solido.

6.1.1 Metodo di Czochralsky

Si usa la tecnica Czochralski per far crescere un cristallo di silicio. Prima di avviare il processo viene aggiunto a 10 kg di silicio fuso nel crogiuolo un peso pari a 10 mg di fosforo. Il coefficiente di segregazione $k_s = C_s/C_l$ per il fosforo nel silicio vale $k_s = 0,35$.

1. *Quanto è la concentrazione iniziale del drogante nel solido all'inizio della crescita del cristallo?*
2. *Quanto è la concentrazione del drogante alla superficie del cristallo di silicio dopo che si sono solidificati 5 kg di materiale fuso?*

a)

Si usano i dati

- peso atomico fosforo: $A_P = 30,97$ g/mole
- densità silicio (fuso): $d_l = 2,53$ g cm⁻³

¹La differenza tra i due numeri è un fattore rappresentato dal peso atomico; nel rapporto che esprime k_s questo fattore scompare.

²In questo ultimo caso si usano come unità di misura ppma (parti per milioni di atomi) oppure ppba (parti per miliardi di atomi).

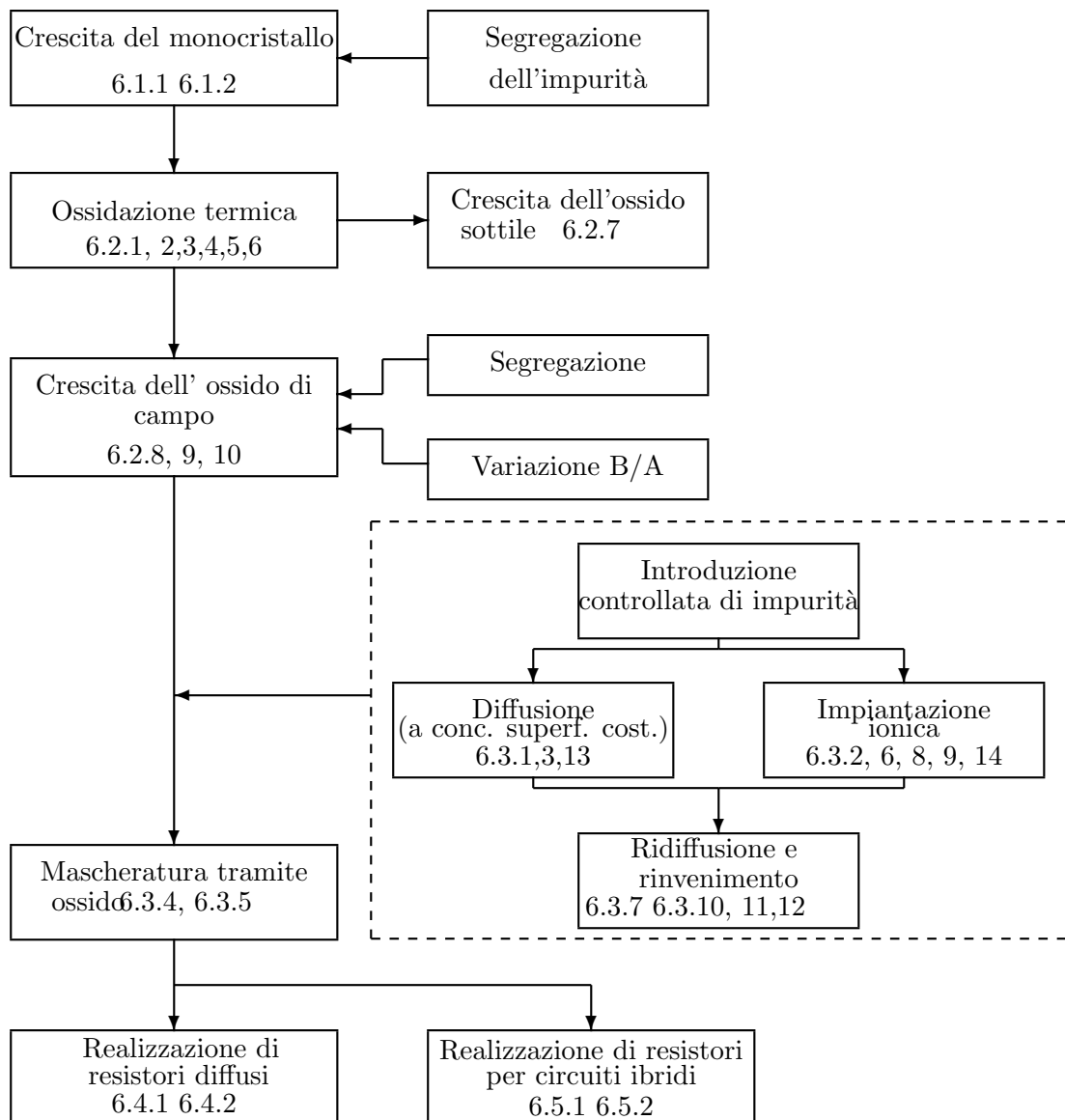


Figura 6.1: Struttura del capitolo 6.

- densità silicio (solido): $d_s = 2,328 \text{ g cm}^{-3}$
- numero di Avogadro: $N_{AV} = 6,023 \cdot 10^{23}$

Per calcolare la concentrazione iniziale del drogante nel silicio solido, si calcola la concentrazione nel fuso C_l

$$C_l = \frac{\text{peso fosforo}}{\text{volume}} = \frac{P_P}{V}$$

$$V = \frac{\text{peso silicio}}{\text{densità silicio}} = \frac{10^4}{2,53} = 3952,6 \text{ cm}^{-3}$$

$$C_l = \frac{10^{-2}}{3952,6} = 0,253 \cdot 10^{-5} \text{ g cm}^{-3}$$

Si noti che la concentrazione del drogante è così piccola che il volume della miscela fusa si può calcolare dal peso del solo silicio. Si ha poi

$$C_s = 0,35 \cdot C_l = 0,35 \times 2,53 \cdot 10^{-6} \text{ g cm}^{-3} = 8,855 \cdot 10^{-7} \text{ g cm}^{-3}$$

Operando invece in termini di numeri di atomi si ha

$$C_l = \frac{\text{num. atomi fosforo}}{\text{volume}} = \frac{N_P}{V}$$

$$V = \frac{\text{peso silicio}}{\text{densità silicio}} = \frac{10^4}{2,53} = 3952,6 \text{ cm}^{-3}$$

Si calcola il numero di atomi di fosforo in 10 mg

$$N_P = N_{AV} \frac{\text{peso totale fosforo}}{\text{peso atomico P}} \times \frac{\text{atomi}}{\text{molecola}} =$$

$$= 6,023 \cdot 10^{23} \frac{\text{molecole}}{\text{mole}} \times 1 \frac{\text{atomi}}{\text{molecola}} \times \frac{10^{-2}}{30,97} \text{ moli}$$

$$= 1,945 \cdot 10^{20} \text{ atomi}$$

$$C_l = \frac{1,945 \cdot 10^{20}}{3952,6} = 4,921 \cdot 10^{16} \text{ at. cm}^{-3}$$

$$C_s = 0,35 \times 4,921 \cdot 10^{16} \text{ at. cm}^{-3} = 1,72 \cdot 10^{16} \text{ at. cm}^{-3}$$

b)

Per valutare la concentrazione del drogante alla superficie del cristallo di silicio dopo che si sono solidificati 5 kg di materiale fuso, si osserva che, nel solidificarsi di un volume dV di Si, il numero di atomi di fosforo nel silicio fuso varia. Dato che il coefficiente di segregazione $C_s/C_l = 0,35$ è minore dell'unità, il drogante tende ad essere rifiutato dal silicio solido e la concentrazione nel fuso, $C_l(t) = P_P/V$, cresce.

Usando le concentrazioni in peso, se si solidifica un peso $dP_{Si} = d_s dV$ di fuso, si ha una perdita peso di drogante nel silicio fuso

$$-dP_P = C_s(t) dV = C_s(t) \times \frac{1}{d_s} \cdot dP_{Si} = k_s \times C_l(t) \frac{1}{d_s} dP_{Si}$$

All'istante t se P_0 è il peso iniziale del silicio nel crogiolo, il volume complessivo di silicio fuso è dato da

$$V(t) = \frac{P_0 - P_{Si}(t)}{d_l}$$

e la concentrazione di fosforo nel fuso si valuta come

$$C_l(t) = \frac{P_P(t)}{V(t)} = \frac{P_P(t)}{(P_0 - P_{Si}(t))/d_l}$$

da cui

$$\frac{dP_P}{P_P} = -k_s \frac{d_l}{d_s} \frac{dP_{Si}}{P_0 - P_{Si}(t)}$$

Si integra: mentre il peso del silicio solidificato varia tra 0 e P_{Si} , il peso del fosforo nel fuso varia dal valore iniziale $P_P(0) = C_l(0) V(0) = C_l(0) P_0/d_l$ sino al valore P_P ,

$$\int_{C_l(0) \frac{P_0}{d_l}}^{P_P} \frac{dP_P}{P_P} = -k_s \frac{d_l}{d_s} \int_0^{P_{Si}} \frac{dP_{Si}}{P_0 - P_{Si}(t)}$$

Si ottiene che il peso del fosforo nel fuso P_P e la concentrazione C_s di fosforo alla superficie del monocristallo sono

$$\begin{aligned} P_P &= C_0 \cdot \frac{P_0}{d_l} \cdot \left(1 - \frac{P_{Si}}{P_0}\right)^{k_s \frac{d_l}{d_s}} \\ C_s &= k_s C_l = k_s \frac{P_P}{(P_0 - P_{Si})/d_l} \\ &= k_s \frac{C_0 \cdot \frac{P_0}{d_l} \cdot \left(1 - \frac{P_{Si}}{P_0}\right)^{k_s \frac{d_l}{d_s}}}{(P_0 - P_{Si})/d_l} = k_s \cdot C_0 \cdot \left(1 - \frac{P_{Si}}{P_0}\right)^{k_s \frac{d_l}{d_s} - 1} \end{aligned}$$

Nel caso in esame $P_{Si} = 5 \text{ kg}$, $P_0 = 10 \text{ kg}$, $k_s = 0,35$, $C_0 = 2,53 \cdot 10^{-6} \text{ g cm}^{-3}$, $d_l/d_s = 1,0868$

$$C_s = 0,35 \cdot 2,53 \cdot 10^{-6} \cdot \left(1 - \frac{5 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^3}\right)^{0,35 \cdot 1,0868 - 1} \text{ g cm}^{-3} = 1,3607 \cdot 10^{-3} \text{ mg cm}^{-3}$$

corrispondente a $2,646 \cdot 10^{16} \text{ atomi/cm}^3$ mentre all'istante iniziale era $1,72 \cdot 10^{16} \text{ atomi/cm}^3$, cioè $0,886 \text{ mg cm}^{-3}$.

6.1.2

Si desidera far crescere un lingotto di silicio con drogaggio di tipo p mediante atomi di boro con una data concentrazione. Supponendo che la concentrazione nel monocristallo resti costante al valore che si instaura inizialmente, quale concentrazione di atomi di boro si deve introdurre nella fusione per avere una concentrazione di $5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$? Il peso iniziale del silicio è 70 kg.

Il peso atomico del boro è 10,8, il fattore di segregazione $k_s = 0,8$. La concentrazione di partenza degli atomi di boro nel fuso è

$$\frac{5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}}{0,8} = 6,25 \cdot 10^{16} \text{ atomi cm}^{-3}$$

La densità del silicio fuso è $d_l = 2,53 \text{ g cm}^{-3}$, pertanto il volume totale del fuso (pari approssimativamente al volume del silicio) vale

$$\frac{70 \cdot 10^3 \text{ g}}{2,53 \text{ g cm}^{-3}} = 27,67 \cdot 10^3 \text{ cm}^3$$

Il numero degli atomi di drogante nel fuso dovrà essere

$$6,25 \cdot 10^{16} \text{ atomi cm}^{-3} \times 27,67 \cdot 10^3 \text{ cm}^3 = 1,713 \cdot 10^{21} \text{ atomi}$$

Il peso di boro da introdurre nel silicio fuso dovrà essere

$$\frac{1,713 \cdot 10^{21} \text{ atomi} \times 10,8 \text{ g/mole}}{6,023 \cdot 10^{23} \text{ molecole/mole}} = 31 \text{ mg}$$

6.2 Ossidazione

La cinetica della crescita dell'ossido durante un processo di ossidazione termica definisce lo spessore x_{ox} dell'ossido mediante l'equazione:

$$x^2 + Ax = B(t + \tau)$$

dove

$$A = 2 \cdot D \cdot \left[\frac{1}{k} + \frac{1}{h} \right]; \quad B = \frac{2 \cdot D \cdot C^*}{N_{\text{ox}}}$$

- N_{ox} densità molecole ossidanti per unità di volume
- D diffusività
- C^* concentrazione di equilibrio con l'ossidante in fase gassosa
- k velocità di reazione all'interfaccia
- h velocità di trasferimento di massa in fase gassosa alla superficie dell'ossido ($h \gg 1$)

Pertanto

$$x_{\text{ox}} = \frac{A}{2} \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{t + \tau}{A^2/4 \cdot B}} - 1 \right] = \frac{A}{2} \cdot \left[\sqrt{1 + 4 \frac{B}{A} \frac{t + \tau}{A}} - 1 \right]$$

con le approssimazioni

$$\begin{cases} \frac{B}{A} \cdot (t + \tau) & \rightarrow t \text{ piccolo (ossidi sottili)} \\ \sqrt{B \cdot t} & \rightarrow t \text{ grande (ossidi spessi)} \end{cases}$$

B/A è il tasso di crescita lineare e dipende dalla velocità di reazione all'interfaccia, mentre B è il tasso di crescita parabolico e dipende essenzialmente dal coefficiente di diffusione nel biossido di silicio.

Crescita di ossidi sottili

Il modello non è valido per l'ossidazione per via secca per spessori dell'ossido approssimativamente minori di 200 Å (nei circuiti VLSI si devono crescere ossidi di gate sottili: 100 Å ÷ 300 Å)

Per ossidi sottili il valore di D/k può essere sufficientemente piccolo da rendere trascurabile il termine Ax

$$x^2 - d_0^2 = Bt$$

ove $d_0 = \sqrt{2DC_0\tau/C_1}$ è lo spessore iniziale dell'ossido quando si estrapola a zero il tempo.

Per la crescita di un ossido sopra un substrato comunque drogato, si può scrivere in generale la legge:

$$x_{\text{ox}} = x_{\text{ox,old}} + \left(\frac{B}{2 \cdot x_{\text{ox,old}} + A} + r_{\text{thin}} \right) \Delta t$$

dove $x_{\text{ox,old}}$ indica lo spessore dell'ossido all'inizio del processo, e r_{thin} è il coefficiente di ionizzazione nel caso di ossidi sottili e dipende dalla pressione parziale delle specie ossidanti.

6.2.1

Si calcoli la percentuale di silicio consumato durante un'ossidazione termica che genera uno strato di biossido di silicio. Quale spessore di silicio viene consumato per ottenere 700 Å di ossido?

Una mole di silicio si converte in una mole di biossido, pertanto si devono calcolare i volumi delle due moli. Dal loro rapporto si ha la percentuale desiderata.

$$V_{\text{mole Si}} = \frac{\text{Peso molecolare Si}}{\text{Densità Si}} = \frac{28,09 \text{ g/mole}}{2,328 \text{ g/cm}^{-3}} = 12,066 \text{ cm}^3/\text{mole}$$
$$V_{\text{mole SiO}_2} = \frac{\text{Peso molecolare SiO}_2}{\text{Densità SiO}_2} = \frac{60,08 \text{ g/mole}}{2,19 \text{ g/cm}^{-3}} = 27,43 \text{ cm}^3/\text{mole}$$
$$\frac{V_{\text{mole Si}}}{V_{\text{mole SiO}_2}} = \frac{12,066 \text{ cm}^3/\text{mole}}{27,43 \text{ cm}^3/\text{mole}} = 0,44$$

Il rapporto tra i volumi, a parità di area, è anche il rapporto tra gli spessori.

$$d_{\text{Si}} = d_{\text{SiO}_2} \frac{d_{\text{Si}}}{d_{\text{SiO}_2}} = d_{\text{SiO}_2} \frac{V_{\text{mole Si}}}{V_{\text{mole SiO}_2}} = 700 \text{ Å} \times 0,44 = 308 \text{ Å}$$

6.2.2

Durante la costruzione di un circuito integrato una fetta di silicio subisce varie ossidazioni. Si determinino gli spessori totali del biossido di silicio dopo ciascuno dei seguenti passi in sequenza.

1. 50 minuti a 1100°C in ossigeno secco;
2. 2 h a 920°C in vapore pirogeno (a 1 atm);
3. 8 h a 1000°C in ossigeno secco.

a) Dal grafico della figura ?? in appendice D si ha in ossigeno secco per 50 min a 1100°C uno spessore $d_1 \simeq 0,12 \mu\text{m}$.

b) Dalla figura ?? in appendice D si ha che d_1 nelle nuove condizioni di ossidazione corrisponde a $\tau \simeq 0,34 \text{ h}$, da cui $t + \tau = 2,34 \text{ h}$ e $d_2 \simeq 0,35 \mu\text{m}$.

c) d_2 nelle nuove condizioni di ossidazione (ossigeno secco) corrisponde a $\tau \simeq 12 \text{ h}$, da cui $t + \tau = 20 \text{ h}$ e $d_3 \simeq 0,48 \mu\text{m}$.

6.2.3

Una fetta di silicio è ricoperta con uno strato di biossido di silicio spesso 200 nm. Quanto tempo occorre per far crescere uno strato addizionale di biossido di silicio di spessore 100 nm in ossigeno secco a 1200°C?

6.2.4

In un substrato di silicio si ottiene per attacco chimico una profonda scanalatura verticale larga 1 μm e profonda alcuni micron. La superficie della scanalatura è silicio, ma il piano superficiale del silicio è ricoperto con un sottile strato di nitrato di silicio che serve come maschera per l'ossidazione. La fetta viene ossidata in ambiente di vapore acqueo a 1 atm e a 1100°C per riempire la scanalatura con ossido. Si chiede

1. quanto è larga la striscia di biossido di silicio che si ha quando la scanalatura è completamente riempita?
2. Quanto tempo è necessario per riempire la scanalatura con biossido di silicio?

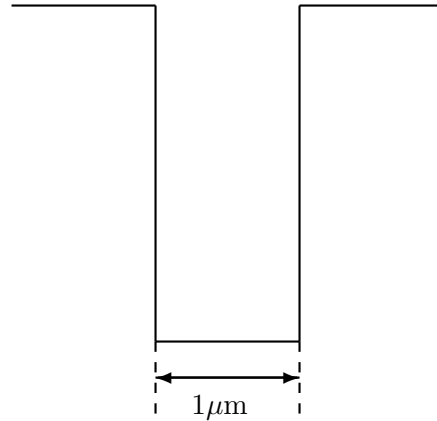


Fig. 6.2 Trincea nel silicio.

Suggerimento: per la parte a) si noti che se l è la larghezza della scanalatura, dato che il biossido termico si forma a spese del silicio delle pareti della scanalatura, la larghezza del biossido sarà maggiore: per formare una striscia larga d unità sono necessarie $d - l$ unità di silicio. Per eseguire la parte b) si applichi l'equazione con $\tau = 0$ e i dati per silicio con orientamento cristallografico $\langle 100 \rangle$ delle figure ?? e ?? in appendice D.

Il nitrato Si_3N_4 ossida molto più lentamente del Si e viene impiegato per discriminare regioni di ossido spesso da regioni di ossido sottile e per isolare i dispositivi.

a)

Il rapporto tra il volume del Si consumato dall'ossido e il volume dell'ossido formatosi è (problema 6.2.1) il 44%. Pertanto

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot (d - l)}{\frac{1}{2} \cdot d} = 0,44; \quad \rightarrow \quad d - l = 0,44 \cdot d$$

$$0,56 \cdot d = l; \quad \rightarrow \quad d = \frac{l}{0,56} = 1,78 \mu\text{m}$$

b)

$$t = \frac{A^2}{4B} \left[\left(\frac{2x_{\text{ox}}}{A} + 1 \right)^2 - 1 \right] = \frac{A^2}{4B} \left(\frac{4x_{\text{ox}}^2}{A^2} + \frac{4x_{\text{ox}}}{A} \right)$$

$$t = \frac{x_{\text{ox}}^2}{B} + \frac{x_{\text{ox}}}{B/A}$$

dalle figure ?? e ?? in appendice D con $P = 1 \text{ atm}$, $T = 1100^\circ\text{C}$ si trova

$$B = 0,5 \frac{\mu\text{m}^2}{\text{h}} \quad \frac{B}{A} = 3 \frac{\mu\text{m}}{\text{h}}$$

da cui $t = 6,93 \text{ h}$

6.2.5 Simulazione della crescita di ossidi con SUPREM

Si usi il simulatore di processi tecnologici SUPREM3 per la valutazione dell'accuratezza a) del modello di crescita lineare, b) del modello di crescita parabolico e infine c) per effettuare un confronto. Per i punti a) e b) si determini se per la variazione dei parametri in funzione della temperatura vale una legge approssimata.

a) Crescita lineare

La semplificazione della formula generale, valida per ossidi sottili (frazioni di μm), è

$$x_{\text{ox}} = B/A \cdot (t + \tau)$$

dove t è la durata del processo, τ è il tempo impiegato a far crescere l'ossido già presente sul substrato, immaginando che la crescita sia avvenuta nelle condizioni di ossidazione attuali. Nel caso $\tau \simeq 0$ si determina lo spessore dell'ossido in funzione del tempo impiegato a far crescere l'ossido e da questi si calcola il coefficiente B/A

$$B/A = x_{\text{ox}}/t$$

```

TITLE variazione di B/A con pressione e temperatura
INITIALIZE < 111 > SILICON THICKNES=6
+ PHOSPHOR=1E16
EXTRACT PREFIX=Visualizzazione dei valori B/A
+ FILE=ossidazione/crelin.out
COMMENT Variazione della temperatura
LOOP STEPS=3
ASSIGN NAME=PRES N.VALUE=(1,5,20)
EXTRACT PREFIX=
EXTRACT VALUE=@PRES PREFIX=PRESSIONE (atm)
EXTRACT PREFIX=
LOOP STEPS=7
ASSIGN NAME=TEMP N.VALUE=(800,850,900,950
+ ,1000,1050,1100)
COMMENT Inizializzazione del substrato
ETCH OXIDE
ASSIGN NAME=TI N.VALUE=.1
DIFFUSION TIME=@TI TEMPERAT=@TEMP STEAM
+ PRESSURE=@PRES
EXTRACT THICKNES LAYER=2 NAME=TH
ASSIGN NAME=BA N.VALUE=(60*@TH/@TI)
EXTRACT VALUE=@TEMP PREFIX= TEMPERATURA=
EXTRACT VALUE=@BA PREFIX= B/A =
L.END
L.END
EXTRACT CLOSE
    
```

Il programma fornisce i coefficienti B/A nel caso di ossidi fatti crescere su un substrato di silicio drogato con fosforo (concentrazione 10^{16} cm^{-3}) al variare della temperatura e della pressione a cui viene realizzato il processo.

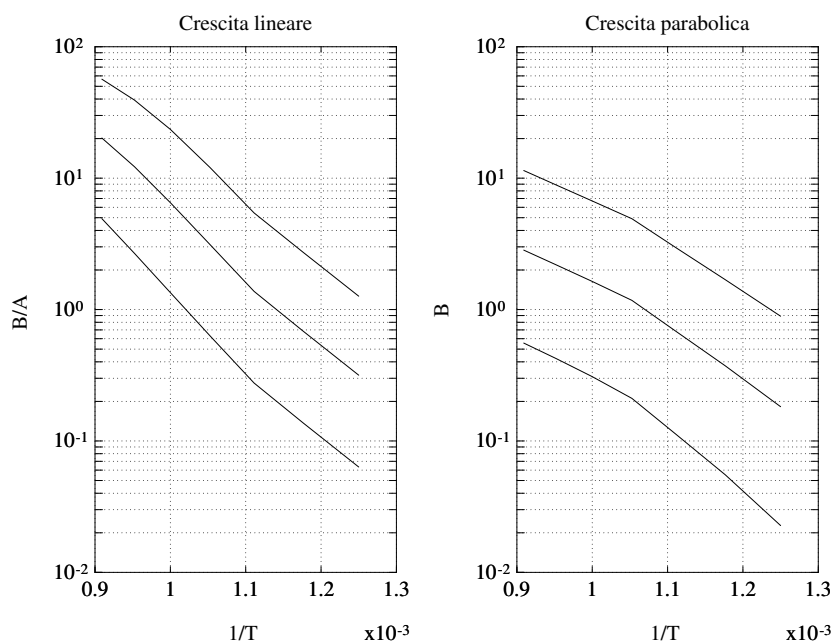


Figura 6.3: a) Coefficiente di crescita lineare B/A e b) coefficiente di crescita parabolica B in funzione della temperatura. Dal basso il alto si hanno le curve per 1 atm, 5 atm e 20 atm.

Commento dei risultati. I valori ottenuti sperimentalmente coincidono con quelli riportati nelle tabelle in modo tanto più accurato quanto più piccolo viene scelto il tempo di ossidazione e di conseguenza lo spessore dell'ossido.

Si verifica sperimentalmente che, per spessori inferiori a $0,1 \mu\text{m}$ lo scostamento del coefficiente B/A dal valore nominale è minimo, quindi il modello di crescita lineare è accurato.

L'andamento in scale semilogaritmiche $B/A = f(1/T)$ è lineare con pendenza negativa, pertanto la dipendenza del coefficiente di crescita lineare in funzione della temperatura può essere descritta da una legge del tipo $\exp(-E_a/kT)$. Valutando la pendenza delle curve si ottiene per l'energia di attivazione E_a un valore approssimato di $\sim 4,5 \text{ eV}$.

b) Crescita parabolica

Per spessori di ossidi non piccoli, dell'ordine dei micron, è possibile introdurre un modello di tipo parabolico

$$x_{\text{ox}} = \sqrt{B \cdot t}$$

```
TITLE Variazione del coefficiente B con pressione e temperatura
INITIALIZE < 111 > SILICON THICKNES=8
+ PHOSPHOR=1E16
EXTRACT PREFIX=Visualizzazione dei valori B
+ FILE=ossidazione/crepar.out
COMMENT Variazione della temperatura
LOOP STEPS=3
ASSIGN NAME=PRES N.VALUE=(1,5,20)
EXTRACT PREFIX=
EXTRACT VALUE=@PRES PREFIX=PRESSIONE (atm)
EXTRACT PREFIX=
LOOP STEPS=7
ASSIGN NAME=TEMP N.VALUE=(800,850,900,950
+ ,1000,1050,1100)
```

```

COMMENT Inizializzazione del substrato
INITIALIZE < 111 > SILICON THICKNES=8
+ PHOSPHOR=1E16
ASSIGN NAME=TI N.VALUE=1000
DIFFUSION TIME=@TI TEMPERAT=@TEMP STEAM
+ PRESSURE=@PRES
EXTRACT THICKNES LAYER=2 NAME=TH
ASSIGN NAME=B N.VALUE=(60*(@TH*@TH)/@TI)
EXTRACT VALUE=@TEMP PREFIX=TEMPERATURA=
EXTRACT VALUE=@BPREFIX= B =
L.END
L.END
EXTRACT CLOSE

```

Il valore del coefficiente B viene calcolato in base allo spessore dell'ossido e alla durata del processo

$$B = x_{\text{ox}}^2/t$$

Il programma ne fornisce il valore in funzione della pressione e della temperatura a cui avviene il processo.

Commento dei risultati. Scopo della simulazione era verificare la validità del modello parabolico e quindi controllare se B , oltre un certo spessore dell'ossido, si stabilizza a un valore costante. Ciò non avviene anche se la crescita di B , dopo qualche micron di spessore, è molto lenta. Il valore di B riportato in funzione della temperatura è relativo a una durata elevata.

L'andamento in scale semilogaritmiche $B = f(1/T)$ si può approssimare con una retta, pertanto la dipendenza del coefficiente di crescita parabolico in funzione della temperatura può essere descritta da una legge del tipo $\exp(-E_a/kT)$. Valutando la pendenza delle curve si ottiene per l'energia di attivazione E_a un valore approssimato di ~ 3 eV.

c) Scelta del modello

Fatte simulazioni indipendenti per il modello lineare e quello parabolico, si individuano i valori dello spessore dell'ossido entro i quali è valido ciascuno dei due modelli. Si riportano i valori stimati di B/A e di B in funzione del x_{ox} e si osserva dove essi sono costanti e quindi dove ogni particolare modello è corretto.

```

TITLE Variazione del coefficiente B/A
+ con il tempo di ossidazione
INITIALIZE < 111 > SILICON THICKNES=6
+ PHOSPHOR=1E16
EXTRACT PREFIX=VARIAZIONE DI B/A
+ FILE=ossidazione/linpar.out
COMMENT Deposizione successive
LOOP STEPS=14
ASSIGN NAME=TI N.VALUE=(.1,.2,.3,.5,1,2,10,20
+ ,50,100,200,1000,2000,10000)
COMMENT Inizializzazione del substrato
INITIALIZE < 111 > SILICON THICKNES=6
+ PHOSPHOR=1E16
DIFFUSION TIME=@TI TEMPERAT=900 STEAM
+ PRESSURE=5
EXTRACT THICKNES LAYER=2 NAME=TH
ASSIGN NAME=BA N.VALUE=(60*@TH/@TI)
ASSIGN NAME=B N.VALUE=((@TH*@TH)/(@TI/60))
EXTRACT PREFIX=
EXTRACT VALUE=@TI
+ PREFIX=TEMPO DI ESPOSIZIONE =
EXTRACT VALUE=@TH
+ PREFIX=SPESSORE DELL'OSSIDO =
EXTRACT VALUE=@BA
+ PREFIX=COEFF. LINARE B/A =

```

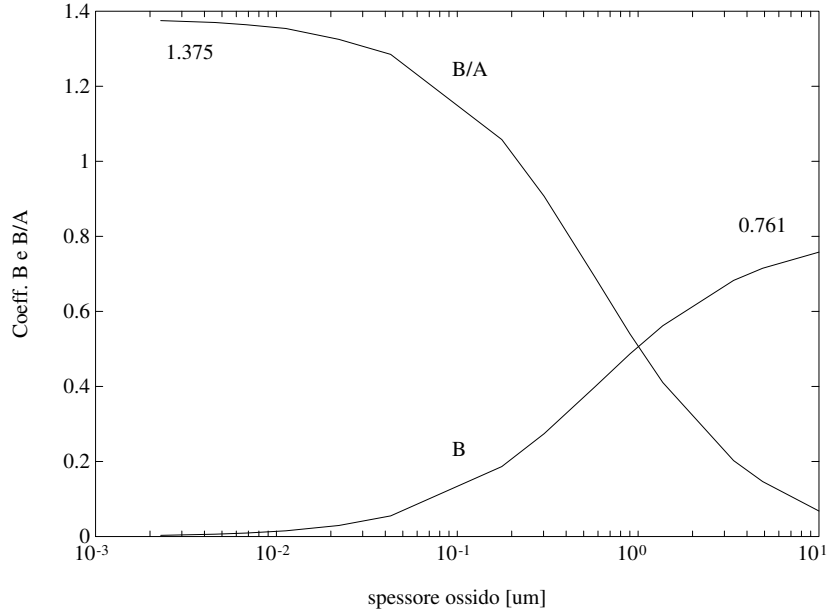



Figura 6.4: Confronto modelli di crescita di ossidi.

```
EXTRACT VALUE=@B
+ PREFIX=COEFF. PARABOLICO B =
L.END
EXTRACT CLOSE
```

Il grafico ottenuto interpolando i dati ottenuti è nella figura 6.4.

Commento dei risultati: esiste un campo di valori degli spessori dell'ossido per cui nessuno dei modelli semplificati va bene e occorre usare la formula completa.

ossidi con spessore < 0,1 μm ⇒ modello lineare
ossidi con spessore > 2 μm ⇒ modello parabolico

6.2.6 Crescita di ossidi su substrato ossidato

Si usi il simulatore SUPREM per una valutazione del parametro τ nella formula

$$x_{\text{ox}} = \sqrt{B \cdot (t + \tau)}$$

relativa alla crescita di ossidi su di un substrato già ossidato.

A volte occorre valutare lo spessore dell'ossido su di un substrato che presenta già uno strato di ossido cresciuto in condizioni ambientali differenti. Nel caso di ossidi sufficientemente spessi si usa la formula

$$x_{\text{ox},2} = \sqrt{B_2 \cdot (t_2 + \tau)}$$

dove B_2 è relativo alle condizioni in cui si realizza l'ossido, t_2 la durata del processo e τ è il tempo impiegato per far crescere lo strato di ossido già presente sul substrato

$$x_{\text{ox},1} = \sqrt{B_1 \cdot t_1} \leftarrow \text{prima ossidazione}$$

nelle condizioni di crescita attuali, cioè con B_2 invece che con B_1 . Lo spessore $x_{\text{ox},1}$ può essere ottenuto nelle condizioni corrispondenti a B_2 nel tempo di ossidazione τ

$$\tau = x_{\text{ox},1}^2 / B_2$$

```

TITLE Crescita di ossido in condizioni differenti
INITIALIZE < 111 > SILICON THICKNES=6
+ PHOSPHOR 1E16
EXTRACT PREFIX=Doppia ossidazione
+ FILE=ossidazione/multidif.out
ASSIGN NAME=TEMPA1 N.VALUE=(1200)
ASSIGN NAME=TIA1 N.VALUE=(10)
ASSIGN NAME=P1 N.VALUE=(1)
ASSIGN NAME=TEMPA2 N.VALUE=(800)
ASSIGN NAME=TIA2 N.VALUE=(1000)
ASSIGN NAME=P2 N.VALUE=(10)
COMMENT Valutazione del coefficiente parabolico B
DIFFUSION TIME=@TIA2 TEMPERAT=@TEMPA2
+ WETO2 PRESSURE=@P2
EXTRACT THICKNES LAYER=2 NAME=THA2
ASSIGN NAME=B.VALUE=((@THA2*@THA2)/(@TIA2))
INITIALIZE < 111 > SILICON THICKNES=6
+ PHOSPHOR=1E16
DIFFUSION TIME=@TIA1 TEMPERAT=@TEMPA1
+ STEAM PRESSURE=@P1
EXTRACT THICKNES LAYER=2 NAME=THA1
DIFFUSION TIME=@TIA2 TEMPERAT=@TEMPA2
+ WETO2 PRESSURE=@P2
EXTRACT THICKNES LAYER=2 NAME=THA
ASSIGN NAME=THA2 N.VALUE(@THA-THA1)
ASSIGN NAME=TIBin N.VALUE=((@THA1*@THA1)/@B)
ASSIGN NAME=TIB N.VALUE=(@TIBin+@TIA2)
INITIALIZE < 111 > SILICON THICKNES=6
+ PHOSPHOR=1E16
DIFFUSION TIME=@TIB TEMPERAT=@TEMPA2
+ WETO2 PRESSURE=@P2
EXTRACT THICKNES LAYER=2 NAME=THB
EXTRACT VALUE=@THA
+ PREFIX=SPESSORE DEL PRIMO PROCESSO =
EXTRACT VALUE=@THA1 PREFIX=PRIMO STRATO =
EXTRACT VALUE=@TIA1
+ PREFIX=TEMPO DI OSSIDAZIONE =
EXTRACT VALUE=@THA2
+ PREFIX=SECONDO STRATO =
EXTRACT VALUE=@TIA2
+ PREFIX=TEMPO DI OSSIDAZIONE =
EXTRACT VALUE=@THB
+ PREFIX=SPESSORE DEL SECONDO PROCESSO =
EXTRACT VALUE=@TIB
+ PREFIX=TEMPO DI OSSIDAZIONE =
EXTRACT CLOSE

```

Il programma valuta il coefficiente B_2 della seconda ossidazione e da questo si ricava il parametro τ .

Nel caso di due processi di ossidazione distinti, si ha

$$\left\{ \begin{array}{llll} 1^\circ \text{strato} & t = 10 & x_{\text{ox},1} = 0,3621 & \text{condizioni } B_1 \\ 2^\circ \text{strato} & t = 1000 & x_{\text{ox},2} = 2,203 & \text{condizioni } B_2 \\ \text{totale} & & x_{\text{ox}} = 2,565 & \end{array} \right.$$

mentre con un unico processo ($\tau = 21$), si ottiene

$$1^\circ \text{strato} \quad t + \tau = 1021 \quad x_{\text{ox}} = 2,521 \quad \text{condizioni } B_2$$

Commento dei risultati. L'operazione è lecita dato che l'errore relativo

$$\Delta x_{\text{ox}} = (2,565 - 2,521)/2,565 = 1,7\%$$

è piccolo ed è dovuto principalmente al fatto che per B_2 si è usata una stima e non il valore corretto.

6.2.7 Crescita di ossidi sottili

Nella realizzazione delle strutture MOS in circuiti integrati su ampia scala le dimensioni dei componenti richiedono ossidi sottili (in genere centinaia di Å) e puri per evitare fenomeni di perforazione. Si usi il simulatore SUPREM per studiare il processo di crescita di ossidi sottili, valutando i tempi di crescita e il tipo di ambiente in cui il processo deve avvenire.

```
TITLE Crescita di ossidi sottili (~200Å)
INITIALIZE < 111 > SILICON THICKNES=6
+ PHOSPHOR=1E16
ASSIGN NAME=PRES N.VALUE=(.005)
ASSIGN NAME=TEMP N.VALUE=(800)
ASSIGN NAME=TI N.VALUE=.02
EXTRACT PREFIX=Tabella dati ossidi sottili
+ FILE=ossidazione/sottili.out
EXTRACT VALUE=@PRES PREFIX=PRESSIONE (atm)
DIFFUSION TIME=@TI TEMPERAT=@TEMP
+ DRYO2 PRESSURE=@PRES
EXTRACT THICKNES LAYER=2 NAME=TH
EXTRACT VALUE=@TEMP PREFIX TEMPERATURA=
EXTRACT VALUE=(@TI*60)
+ PREFIX=TEMPO DI OSSIDAZIONE (sec.):
EXTRACT VALUE=@TH PREFIX=SPESSORE OSSIDO :
EXTRACT CLOSE
```

Il programma esegue un processo di ossidazione a bassa temperatura in ambiente rarefatto (pressione ridotta a 0,02 atm), perché altrimenti lo spessore di ossido desiderato crescerebbe in pochi centesimi di secondo.

Condizioni ambientali	Pressione	0,02 atm
	Temperatura	800°C
	Tempo di ossidazione	$1,2 \cdot 10^{-2}$
Spessore ossido	233,27Å	

Commento dei risultati. Nella pratica gli ossidi assai sottili non vengono ottenuti diminuendo la pressione ambientale, come in questa simulazione, ma diminuendo la percentuale di ossigeno nella miscela di gas che partecipa alla reazione.

6.2.8 Dipendenza del coefficiente B/A dal drogaggio del substrato

Si usi SUPREM per esaminare la variazione delle velocità di crescita dell'ossido in funzione del drogaggio del substrato.

```
TITLE Variazione del coefficiente B/A
+ con il drogaggio del substrato
INITIALIZE < 111 > SILICON THICKNES=6
+ PHOSPHOR=1E16
EXTRACT PREFIX=B/A (MICRON/MINUTO)
COMMENT Variazione del drogaggio
LOOP STEPS=13
ASSIGN NAME=DROG N.VALUE=(1E16,5E16,1E17,5E17
+ ,1E18,5E18,1E19,5E19,1E20,5E20,1E21,5E21,1E22)
COMMENT Inizializzazione del substrato
INITIALIZE < 111 > SILICON THICKNES=6
+ PHOSPHOR=@DROG
ASSIGN NAME=TI N.VALUE=.1
DIFFUSION TIME=@TI TEMPERAT=1000
```

```
+ STEAM PRESSURE=1
EXTRACT VALUE=@DROG PREFIX=...DROGAGGIO=
EXTRACT VALUE=@BA PREFIX=..... B/A =
L.END
EXTRACT CLOSE
```

Il programma valuta il coefficiente B/A al variare del drogaggio del substrato ($N = 10^{16} \div 10^{22} \text{ cm}^{-3}$). Con i dati ottenuti dalla simulazione si ottiene il grafico della figura ??.

Commento dei risultati. I risultati rispecchiano con buona approssimazione i valori del coefficiente di variazione lineare che si trovano nei grafici o tabelle riportate sui testi scientifici.

6.2.9 Consumo del substrato durante la crescita dell'ossido

L'ossido cresciuto termicamente non si forma fisicamente "sopra" la fetta di silicio, ma affonda per una certa percentuale nel substrato, per il fatto che è proprio il silicio del substrato che reagisce con l'ossigeno per generare l'ossido. Si valuti con l'uso di SUPREM3 lo spessore di silicio consumato durante la crescita dell'ossido.

```
TITLE Consumo del silicio durante il processo
+ di ossidazione
INITIALIZE <111> SILICON THICKNES=6
+ PHOSPHOR=1E16
EXTRACT PREFIX=Dati numerici del consumo di
+ FILE=ossidazione/consum.out
EXTRACT PREFIX=silicio durante la crescita
EXTRACT PREFIX=_____
EXTRACT THICKNES LAYER=1 NAME=THSI
EXTRACT VALUE=@THSI
+ PREFIX=SPESSORE SUBSTRATO:
ASSIGN NAME=TEMPO N.VALUE=(0)
LOOP STEPS=30
ASSIGN NAME=TI N.VALUE=(10)
ASSIGN NAME=TEMPO N.VALUE=(@TEMPO+10)
DIFFUSION TIME=@TI TEMPERAT=1100
+ WETO2 PRESSURE=2
EXTRACT PREFIX=_____
EXTRACT THICKNES LAYER=2 NAME=THOX
EXTRACT THICKNES LAYER=1 NAME=THSI
EXTRACT VALUE=@TEMPO
+ PREFIX=TEMPO DI OSSIDAZIONE:
EXTRACT VALUE=@THOX
+ PREFIX=SPESSORE OSSIDO:
EXTRACT VALUE=@THSI
+ PREFIX=SPESSORE SUBSTRATO:
L.END
EXTRACT PREFIX=_____
EXTRACT CLOSE
```

Il programma simula 15 processi della durata di 20 minuti ciascuno nelle medesime condizioni e calcola lo spessore dell'ossido in superficie e all'interno del substrato.

In ascissa (fig. ??) è riportato il tempo di ossidazione, mentre in ordinata si leggono gli spessori dell'ossido e del substrato consumato; si nota come, con il trascorrere del tempo, il rapporto tra le due grandezze riportate nel grafico si mantenga pressoché costante al valore $1/2, 25 = 0,44$

6.2.10 Segregazione di impurità nell'ossido

Durante la crescita dell'ossido le impurità droganti vengono assorbite in parte dall'ossido che sta crescendo. La percentuale di impurità inglobata nell'ossido aumenta con lo

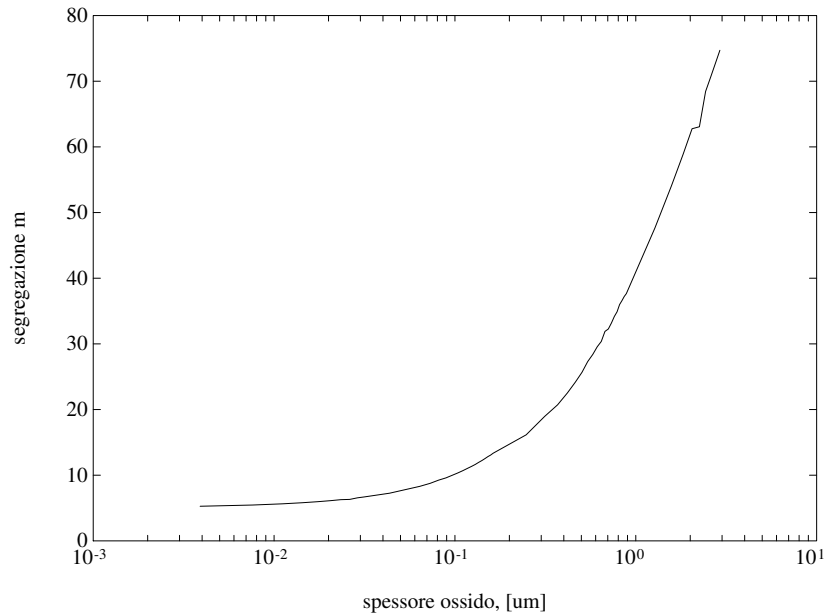


Figura 6.5: Fattore di segregazione in funzione di x_{ox} .

spessore dell'ossido fino a spessori dell'ordine del decimo di micron, per poi decrescere con spessori superiori. Contemporaneamente nel silicio, in prossimità dell'interfaccia con l'ossido, si accumula drogante e quindi il coefficiente di segregazione

$$m = \frac{C_{Si}}{C_{SiO_2}}$$

è una funzione crescente dello spessore dell'ossido. Si esamini con SUPREM3 il fenomeno.

```

TITLE Cattura impurità e consumo del silicio
INITIALIZE < 111 > SILICON MIN.DX=.00005
+ DX=.0001 THICKNES=0.04 PHOSPHOR=1E16
PLOT CHEMICAL PHOSPHOR COLOR=1
ASSIGN NAME=CC N.VALUE=(2)
ASSIGN NAME=TI N.VALUE=(0)
LOOP STEPS=10
ASSIGN NAME=TI N.VALUE=(@TI+.05)
INITIALIZE < 111 > SILICON MIN.DX=.00005
+ DX=.0001 THICKNES=.04 PHOSPHOR=1E16
DIFFUSION TIME=@TI TEMPERAT=1100 WETO2 PRESSURE=1
EXTRACT THICKNES LAYER=2 NAME=THOX
PLOT CHEMICAL ADD PHOSPHOR COLOR=(@CC)
ASSIGN NAME=CC N.VALUE=@CC+1
ASSIGN NAME=POSMIN N.VALUE=(@THOX-2*5E-4)
ASSIGN NAME=POSMAX N.VALUE=(@THOX+2*5E-4)
PRINT CONCENTR CHEMICAL PHOSPHOR
+ X.MIN=@POSMIN X.MAX=@POSMAX TERMINAL
L.END

```

Il programma fornisce i valori di concentrazione all'interfaccia dai quali si può calcolare l'andamento di m in funzione dello spessore dell'ossido. Si riporta in grafico il profilo del drogante inglobato dall'ossido e il valore di m in funzione dello spessore dell'ossido (fig. 6.5).

6.3 Impiantazione ionica e diffusione

Impiantazione ionica.

La distribuzione delle impurità droganti in funzione della profondità, nell'ipotesi che il materiale impiantato si presenti quasi amorfo agli ioni incidenti e quindi non si abbiano fenomeni di incanalamento, è circa *gaussiana*:

$$C(x) = C_p \cdot e^{-\frac{(x - R_p)^2}{L^2}} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} L = 2 \cdot \Delta R_p^2 \\ C_p = \frac{N'}{\sqrt{\pi} \cdot L} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{r} \end{cases}$$

dove C_p è la concentrazione massima, R_p la profondità media di penetrazione, $(\Delta R_p)^2$ la varianza della distribuzione e N' la dose impiantata, cioè il numero totale di atomi droganti per unità di area.

Diffusione.

Se $C(x)$ è la concentrazione di drogante e $\underline{F}(x)$ il flusso di drogante

$$\left. \begin{aligned} \underline{F} &= -D \text{ grad } C && \text{diffusione} \\ \frac{\partial C}{\partial t} &= -\text{div } \underline{F} && \text{continuità} \end{aligned} \right\} \quad \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C}{\partial x} \right) = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

Legge di Fick. Il coefficiente di diffusione o “diffusività” D può essere considerato indipendente dalla concentrazione del drogante se questa è bassa, cioè inferiore alla concentrazione dei portatori intrinseci (*diffusione intrinseca*).

Diffusione del drogante attraverso deposizione gassosa

Concentrazione superficiale di drogante fissa $C(x=0, t) = C_S$

$$C(x, t) = C_S \text{erfc}\left(\frac{x}{L}\right) = C_S \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{L}}^{\infty} e^{-v^2} dv$$

dove $L = 2\sqrt{Dt}$ e la funzione erfc è la funzione d'errore complementare che accetta le espressioni approssimate

$$\begin{cases} \text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} & \text{per } x \ll 1 \\ \text{erfc}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-x^2}}{x} & \text{per } x \gg 1 \end{cases}$$

Il numero totale di atomi diffusi al tempo t per unità di area è

$$N'(t) = \int_0^{\infty} C(x, t) dx = 2 \sqrt{\frac{Dt}{\pi}} C_S \propto \sqrt{t}$$

Ridistribuzione del drogante attraverso diffusione

Dopo un'impiantazione ionica la distribuzione è gaussiana; riscaldando il semiconduttore gli atomi droganti diffondono mantenendo una distribuzione gaussiana:

$$C(x, t) = \frac{N'}{L' \sqrt{\pi}} \exp \left[- \left(\frac{x - R_p}{L'} \right)^2 \right]$$

$$L' = \sqrt{2 \Delta R_p^2 + 4 Dt}$$

Dopo una deposizione gassosa

La distribuzione iniziale dei droganti è una erfc, approssimabile con una gaussiana a valor medio nullo:

$$C(x, t) = \frac{2 N'}{\sqrt{\pi} L} e^{-\frac{x^2}{L^2}}$$

dove $L = \sqrt{4Dt}$, N' è il numero totale di atomi diffusi al tempo t per unità di area e t è tempo caratteristico della deposizione gassosa.

Riscaldando il semiconduttore per un tempo Δt gli atomi droganti diffondono e si ha una distribuzione gaussiana:

$$C(x, t) = \frac{2N'}{\sqrt{\pi} L'} \cdot e^{-\frac{x^2}{L'^2}}$$

dove $L' = \sqrt{4Dt + 4D'\Delta t}$ e D' è la diffusività del drogante valutata nelle condizioni del processo di ridistribuzione.

6.3.1

Si effettua una diffusione di fosforo della durata di 4 ore alla temperatura di 1000°C entro un substrato di tipo p, drogato con boro con densità $2 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$. La concentrazione superficiale è mantenuta al valore di $3 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$. Determinare la forma del profilo di drogaggio ottenuto e la profondità della giunzione. Inoltre, approssimando il profilo del drogaggio con una gaussiana, calcolare il corrispondente valore della profondità di giunzione e l'errore percentuale commesso.

Se la concentrazione di drogante è minore della concentrazione intrinseca dei portatori n_i alla temperatura di diffusione, il coefficiente di diffusione si può ritenere costante. Alla temperatura di 1000°C è $n_i \sim 3,5 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3} > \text{concentrazione superficiale} = 3 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$, perciò il processo si dice di diffusione intrinseco e vale il profilo:

$$C(x, t) = C_S \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) = C_S \frac{2}{\pi} \int_{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty} e^{-v^2} dv$$

$$\sqrt{Dt} = \sqrt{1,63 \cdot 10^{-13} \times 4 \times 3600} = 0,484 \mu\text{m}$$

$$C(x) = 3 \cdot 10^{18} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{0,969}\right)$$

La giunzione è alla profondità x_j , dove i drogaggi di tipo opposto hanno concentrazioni eguali

$$2 \cdot 10^{15} = 3 \cdot 10^{18} \operatorname{erfc}\left(\frac{x_j}{0,969}\right)$$

$$6,67 \cdot 10^{-4} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x_j}{0,969}\right)$$

L'argomento della funzione complementare d'errore vale 2,406, per cui

$$2,406 = \frac{x_j}{0,969} \rightarrow x_j = 2,332 \mu\text{m}$$

Il profilo di drogaggio a funzione complementare di errore si può approssimare con una gaussiana a valor medio nullo:

$$C'(x) \simeq \frac{2 N'}{\sqrt{\pi} L} e^{-\frac{x^2}{L^2}}$$

Si determinano i parametri L e N' della gaussiana

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{4Dt} \\ N' &= \int_0^\infty C(x, t) \, dx = 2 \sqrt{\frac{Dt}{\pi}} C_S \end{aligned}$$

e si calcola la nuova profondità di giunzione x'_j

$$\begin{aligned} 2 \cdot 10^{15} &= \frac{2N'}{\sqrt{\pi}L} e^{-(x'_j/L)^2} \\ \frac{\sqrt{\pi}L}{2N'} 2 \cdot 10^{15} &= \frac{\pi N_d}{2C_S} = e^{-(x'_j/L)^2} \\ x'_j &= L \sqrt{\ln \left(\frac{2C_S}{\pi N_d} \right)} = 2,536 \, \mu\text{m} \end{aligned}$$

con un errore percentuale pari a

$$\frac{2,537 - 2,332}{2,332} \simeq 8,7\%$$

6.3.2

Entro una fetta di silicio di tipo n con resistività di $5 \, \Omega \, \text{cm}$ viene impiantata una dose di boro di $10^{12} \, \text{cm}^{-2}$ con un'energia di 100 keV, quindi si provoca un processo di ridiffusione per 2 ore a 1000°C ($D = 2 \cdot 10^{-14} \, \text{cm}^2 \, \text{s}^{-1}$). a) Quanto vale la concentrazione di picco del boro e quanto ampia è la regione di tipo p immediatamente dopo l'impiantazione? b) Quanto vale la concentrazione di picco del boro dopo la successiva diffusione e a quale profondità si sposta la giunzione?

Se si trascurano i cammini preferenziali all'interno del semiconduttore, la distribuzione del drogante è gaussiana:

$$C(x) = C_p \cdot e^{-\frac{(x-R_p)^2}{2 \cdot \Delta R_p^2}} \quad \text{dove} \quad C_p = \frac{N'}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{2} \cdot \Delta R_p}$$

Con un'impiantazione di boro con un'energia di 100 keV, la profondità media di penetrazione è $R_p = 290 \, \text{nm}$ e la varianza della distribuzione $\Delta R_p = 70 \, \text{nm}$.

a) Impiantazione

La dose impiantata di boro è $N' = 10^{12} \, \text{cm}^{-2}$.

$$L = \sqrt{2} \Delta R_p = 9,9 \cdot 10^{-6} \, \text{cm}; \quad C_p = \frac{N'}{\sqrt{\pi} \cdot L} = 5,7 \cdot 10^{16} \, \text{cm}^{-3}$$

Dalla resistività, si ricava la concentrazione del drogante nel silicio di tipo n

$$N_d = 9,2 \times 10^{14} \, \text{cm}^{-3}$$

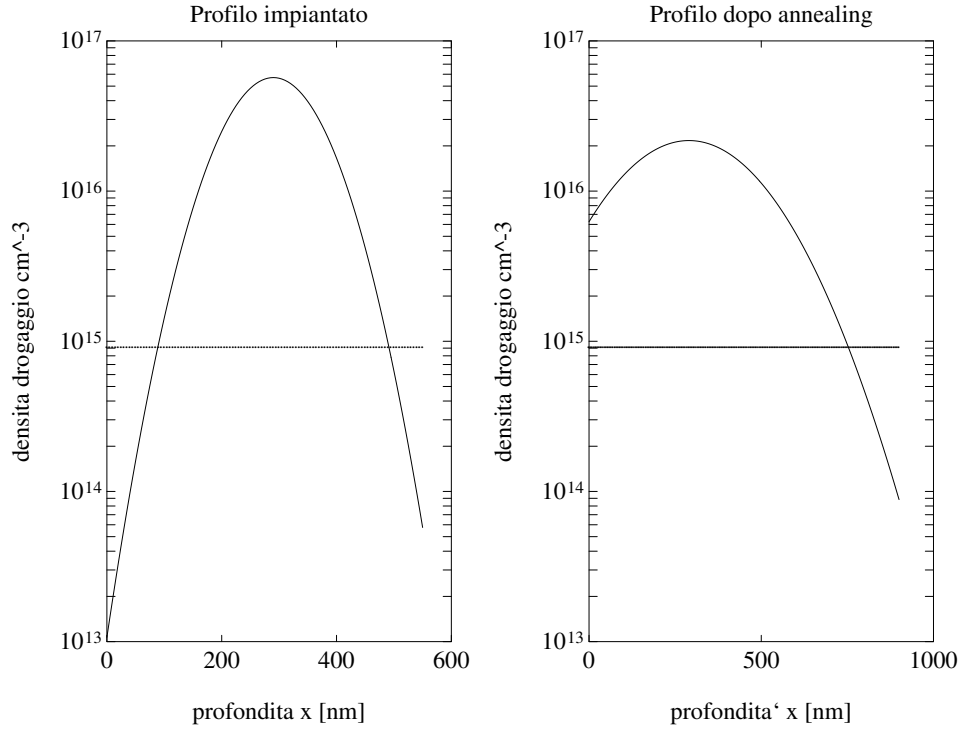


Figura 6.6: Profilo di drogaggio dopo a) impiantazione e b) rinvenimento.

Le giunzioni si formano alla profondità a cui la concentrazione di boro eguaglia quella uniforme del silicio di tipo n

$$C(x_j) = C_p \cdot e^{-\frac{(x_j - R_p)^2}{2 \Delta R_p^2}} = N_d$$

$$\frac{(x_j - R_p)^2}{2 \cdot \Delta R_p^2} = \ln \frac{C_p}{N_d}$$

$$x_j = R_p \mp \sqrt{2} \cdot \Delta R_p \cdot \sqrt{\ln \frac{C_p}{N_d}} = \begin{cases} 491 \text{ nm} \\ 88,9 \text{ nm} \end{cases}$$

La regione di tipo p immediatamente dopo l'impiantazione è ampia $\Delta x = 402 \text{ nm}$

b) Ridiffusione

La concentrazione iniziale per $t = t_0 = 0$ è gaussiana

$$C(x) |_{t=t_0} = \frac{N'}{\sqrt{\pi} \cdot L} \cdot e^{-\frac{(x-R_p)^2}{L^2}}; \quad \text{con } L = \sqrt{2} \Delta R_p$$

Dopo un tempo t di diffusione, la distribuzione è ancora gaussiana con lo stesso valore medio e con deviazione standard

$$L' = \sqrt{2 \Delta R_p^2 + 4 D \cdot t} = 2,6 \times 10^{-5} \text{ cm}$$

dove la diffusività $D = 2 \cdot 10^{-14} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ è la costante di proporzionalità fra il flusso di

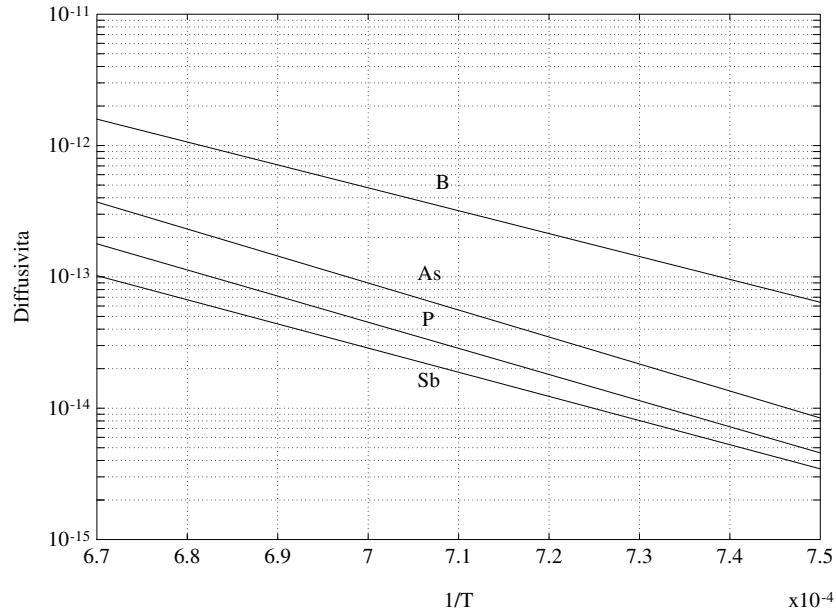


Figura 6.7: Diffusività (cm²/s) in funzione dell'inverso della temperatura assoluta (K⁻¹).

drogante e il gradiente della concentrazione

$$C(x) |_{t>t_0} = \frac{N'}{\sqrt{\pi} \cdot L'} \cdot e^{-\frac{(x-R_p)^2}{(L')^2}}$$

$$C'_p = \frac{N'}{\sqrt{\pi} \cdot L'} = 2,17 \times 10^{16} \text{ cm}^{-3}$$

La seconda giunzione si sposta alla profondità $x_j = 752 \text{ nm}$, mentre la prima scompare, come indicato nella figura 6.6.

6.3.3

Si esaminino le curve di diffusività in silicio in funzione della temperatura della figura 6.7 e si scriva una relazione funzionale che le rappresenti. Si determinino i valori dei parametri di tali modelli matematici per boro, fosforo arsenico e antimonio.

Le curve di diffusività in funzione di $1/T$ in scala semilogaritmica sono delle rette, quindi il legame funzionale è del tipo

$$D = D_0 e^{-\frac{E_a}{kT}}$$

dove E_a assume il significato di energia di attivazione e D_0 di diffusività a temperatura infinita.

Sono sufficienti due punti per determinare E_a e D_0 ,

$$E_a = -k \left(\frac{\ln D_2 - \ln D_1}{1/T_2 - 1/T_1} \right)$$

$$D_0 = D_1 e^{-\frac{E_a}{kT_1}}$$

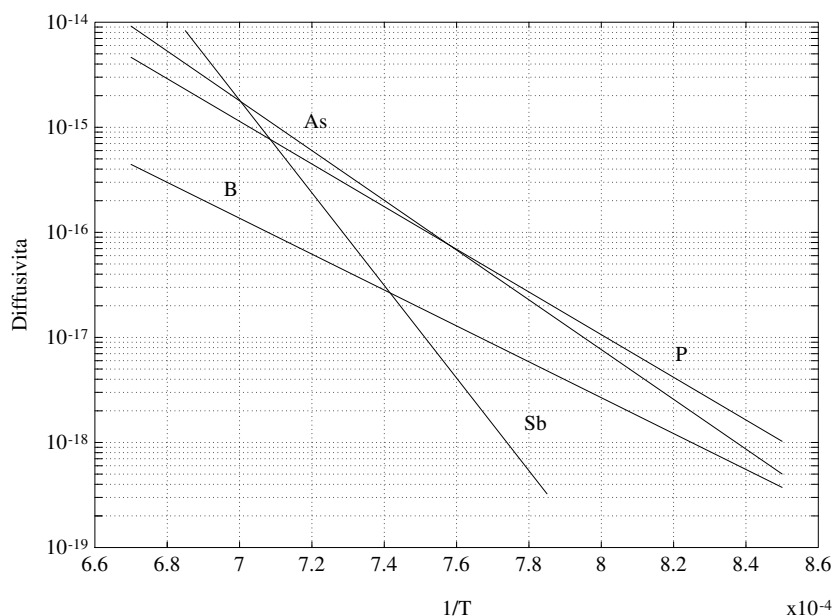


Figura 6.8: Diffusività (cm^2/s) nel biossido di silicio in funzione dell'inverso della temperatura assoluta (K^{-1}).

Nel caso dell'arsenico si considerano i due punti estremi sul grafico della figura 6.7: $D_1 = 10^{-11}$; $1/T_1 = 6 \cdot 10^{-4}$ e $D_2 = 10^{-14}$; $1/T_2 = 7,46 \cdot 10^{-4}$,

$$E_a = -8,62 \cdot 10^{-5} \frac{\ln 10(-11 + 14)}{10^{-4}(6 - 7,46)} = 4,08 \text{ eV}$$

$$D_0 = 10^{-11} e^{\frac{4,08}{8,62 \cdot 10^{-5}}} \times 6 \cdot 10^{-4} = 22 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$$

Procedendo in modo analogo per gli altri tre casi si trova

	Unità	Boro	Fosforo	Arsenico	Antimonio
E_a	eV	3,46	3,95	4,08	3,65
D_0	$\text{cm}^2 \text{ s}^{-1}$	0,76	3,85	22	0,214

6.3.4

Le diffusività dei droganti nel biossido di silicio variano con la temperatura secondo la legge $D = D_0 e^{-E_a/kT}$. I parametri sono riportati nella tabella. Determinare lo spessore minimo del biossido necessario per mascherare in modo adeguato a 1100°C una diffusione di t min.

	Unità	Boro	Fosforo	Arsenico	Antimonio
E_a	eV	3,39	4,03	4,7	8,75
D_0	$\text{cm}^2 \text{ s}^{-1}$	$1,23 \cdot 10^{-4}$	$1,86 \cdot 10^{-1}$	67,25	$1,31 \cdot 10^{16}$

Si considera il caso di diffusione con concentrazione superficiale costante. Per arrestare il 99,99% degli atomi droganti presenti in superficie occorre che lo spessore x_{ox} dell'ossido

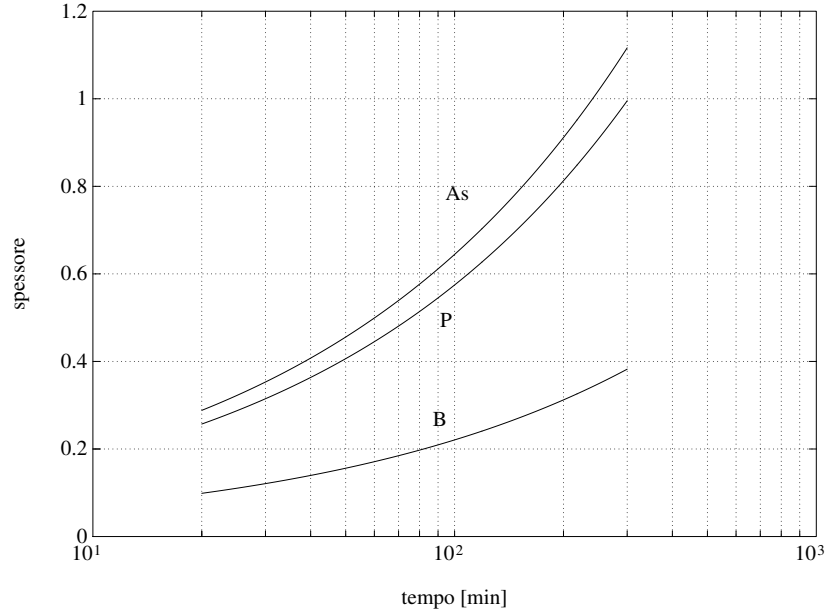


Figura 6.9: Spessore minimo dell'ossido per mascherare diffusioni di boro, fosforo e arsenico a 900°C.

sia tale da soddisfare la relazione

$$\begin{aligned}\frac{C(x_{\text{ox}}, t)}{C_s} &= \operatorname{erfc}\left(\frac{x_{\text{ox}}}{2\sqrt{Dt}}\right) \leq 1 \cdot 10^{-4} \\ \frac{x_{\text{ox}}}{2\sqrt{Dt}} &\geq 2,7512 \\ x_{\text{ox}} &\geq 5,5024 \times \sqrt{Dt}\end{aligned}$$

Alla temperatura di 1100°C si ha per il boro $D = 4,47 \cdot 10^{-17} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$, per il fosforo $D = 3,08 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ e per l'arsenico $D = 3,8 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$. Si ottengono i grafici in funzione del tempo di diffusione della figura 6.9.

6.3.5

Si vuole usare uno strato di biossido di silicio per proteggere regioni di una fetta di silicio dall'introduzione di ioni durante un'impiantazione. a) Trovare una relazione approssimata per lo spessore d dell'ossido che blocca il 99,99% degli ioni impiantati. b) Determinare lo spessore dell'ossido che consente una adeguata mascheratura per impiantazione di ioni di boro accelerati a un'energia di 80 keV.

Suggerimento: si usi l'approssimazione della funzione complementare errore

$$\operatorname{erfc}(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-x^2}}{x} \quad \text{per } x \gg 1$$

a)

Il biossido di silicio si presenta quasi amorfo agli ioni incidenti, non si hanno fenomeni di cammini preferenziali e la distribuzione del drogante in profondità è *gaussiana*:

$$C(x) = \frac{N'}{\sqrt{\pi} (\sqrt{2} \Delta R_p)} e^{-\frac{(x - R_p)^2}{2\Delta R_p^2}}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} R_p & \text{profondità media di penetrazione nel SiO}_2 \\ \Delta R_p & \text{varianza della distribuzione nel SiO}_2 \\ N' & \text{"dose" impiantata (atomi/cm}^2\text{)} \end{array} \right.$$

La dose (concentrazione areica) N_d degli ioni che penetrano durante l'impiantazione a profondità superiori a d si ottiene integrando il profilo per $x \geq d$

$$N_d = \int_d^\infty C(x) dx = \frac{N'}{\sqrt{\pi} (\sqrt{2} \Delta R_p)} \int_d^\infty e^{-\left(\frac{x - R_p}{\sqrt{2} \Delta R_p}\right)^2} dx$$

Dato che per definizione è

$$\int_x^\infty e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc}(x)$$

la frazione della dose impiantata che riesce ad attraversare lo strato di ossido spesso d è espresso dal coefficiente di attraversamento $T(d)$

$$T(d) \equiv \frac{N_d}{N'} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\alpha) \longrightarrow \alpha = \frac{d - R_p}{\sqrt{2} \Delta R_p}$$

Usando l'espressione asintotica della funzione complementare di errore, si ha

$$T(d) \simeq \frac{1}{2\sqrt{\pi} \alpha} e^{-\alpha^2}$$

Se $T = 1 \cdot 10^{-4}$, risolvendo l'equazione non lineare, si trova $\alpha = 2,6$ e quindi

$$\begin{aligned} \frac{d_{\min} - R_p}{\sqrt{2} \Delta R_p} &= 2,6 \rightarrow \frac{d_{\min} - R_p}{\Delta R_p} = 3,67 \\ d_{\min} &= R_p + 3,67 \cdot \Delta R_p \end{aligned}$$

b)

Per impiantazione di boro nel silicio a 80 keV si ha $R_p = 2300 \text{ \AA}$ e $\Delta R_p = 620 \text{ \AA}$, per cui

$$d_{\min} = (0,23 + 3,67 \cdot 0,062) \mu\text{m} = 0,458 \mu\text{m}$$

6.3.6

Si ha un substrato di tipo n con $N_d = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ e si vuole realizzare una giunzione $p-n$ con una impiantazione ionica di boro attraverso una finestra praticata nell'ossido. L'energia di impiantazione è 80 keV e la dose $2 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-2}$.

1. A quale profondità si verifica la giunzione metallurgica?
2. Supponendo che dai grafici si possa commettere un errore dello stesso segno sia su R_p che su ΔR_p di $\pm 5 \%$, quale errore percentuale si avrà su x_j ?
3. Se l'impiantazione è uniforme su tutta la fetta di diametro 12,5 cm quanto vale il numero totale di ioni impiantati e la corrente del fascio di ioni se l'impiantazione dura 1 ora?

a)

Dalla figura ?? si trova: $R_p = 0,2400 \mu\text{m}$, $\Delta R_p = 0,064 \mu\text{m}$,

La concentrazione di picco vale (lunghezze in cm)

$$C_p = \frac{N'}{\sqrt{2\pi}\Delta R_p} = \frac{2 \cdot 10^{15}}{\sqrt{2\pi}0,064 \cdot 10^{-4}} = 1,242 \cdot 10^{20} \text{ cm}^{-3}$$

La giunzione si forma nella sezione $x = x_j$ in cui i drogaggi di tipo opposto sono eguali

$$C_p \exp\left(-\frac{(x - R_p)^2}{2\Delta R_p^2}\right) = N_d \longrightarrow 1,242 \cdot 10^{20} \exp\left(-\frac{(x_j - 0,24)^2}{2 \cdot (0,064)^2}\right) = 10^{15}$$

$$(x_j - 0,24)^2 = -2 \cdot (0,064)^2 \ln \frac{10^{15}}{1,242 \cdot 10^{20}}$$

$$x_j = 0,24 + \sqrt{2 \cdot (0,064)^2 \ln \frac{1,242 \cdot 10^{20}}{10^{15}}}$$

$$x_j = 0,24 + \sqrt{2 \cdot (0,064)^2 11,7296} = 0,24 + \sqrt{0,0961} = 0,55 \mu\text{m}$$

b)

L'errore percentuale su x_j viene valutato in base alla relazione:

$$\frac{\delta x_j}{x_j} = \frac{2 \ln \frac{C_p}{N_d} - 1}{\sqrt{2 \ln \frac{C_p}{N_d}}} \frac{\Delta R_p}{x_j} \frac{\delta \Delta R_p}{\Delta R_p} + \frac{R_p}{x_j} \frac{\delta R_p}{R_p}$$

ottenendo $\sim 4,9 \%$.

c)

Il numero totale degli ioni di boro impiantati è

$$n_{\text{boro}} = N' \times \text{area impiantata} = 2 \cdot 10^{15} \frac{\text{ioni}}{\text{cm}^2} \times (\pi \cdot 6,25^2 \text{ cm}^2) = 2,45 \cdot 10^{17} \text{ ioni}$$

La corrente del fascio di ioni è il rapporto tra la carica totale degli ioni di boro $Q_{\text{boro}} = q n_{\text{boro}}$ e il tempo di impiantazione:

$$I_{\text{fascio ioni}} = \frac{1,602 \cdot 10^{-19} \times 2,45 \cdot 10^{17} \text{ C}}{60 \times 60 \text{ s}} = 10,9 \mu\text{A}$$

6.3.7 Evoluzione del profilo di drogaggio

Si usi il simulatore SUPREM3 per esaminare la variazione del profilo di drogaggio quando si provocano processi di ridiffusione dopo un'impiantazione.

```
TITLE Modifica profilo di impiantazione per ridiffusione
INITIALIZE < 111> SILICON THICKNES=0.7
IMPLANT ARSENIC DOSE=1E16 ENERGY=150
+ TEMPERAT=800
PLOT CHEMICAL DONOR COLOR=1 TOP=1E22
LOOP STEPS=5
ASSIGN NAME=CO N.VALUE=(2,3,4,5,6)
DIFFUSION INERT TIME=15 TEMPERAT=1000
PLOT ADD CHEMICAL DONOR COLOR=@CO
+ TOP=1E22 LINE.TYP=@CO
L.END
```

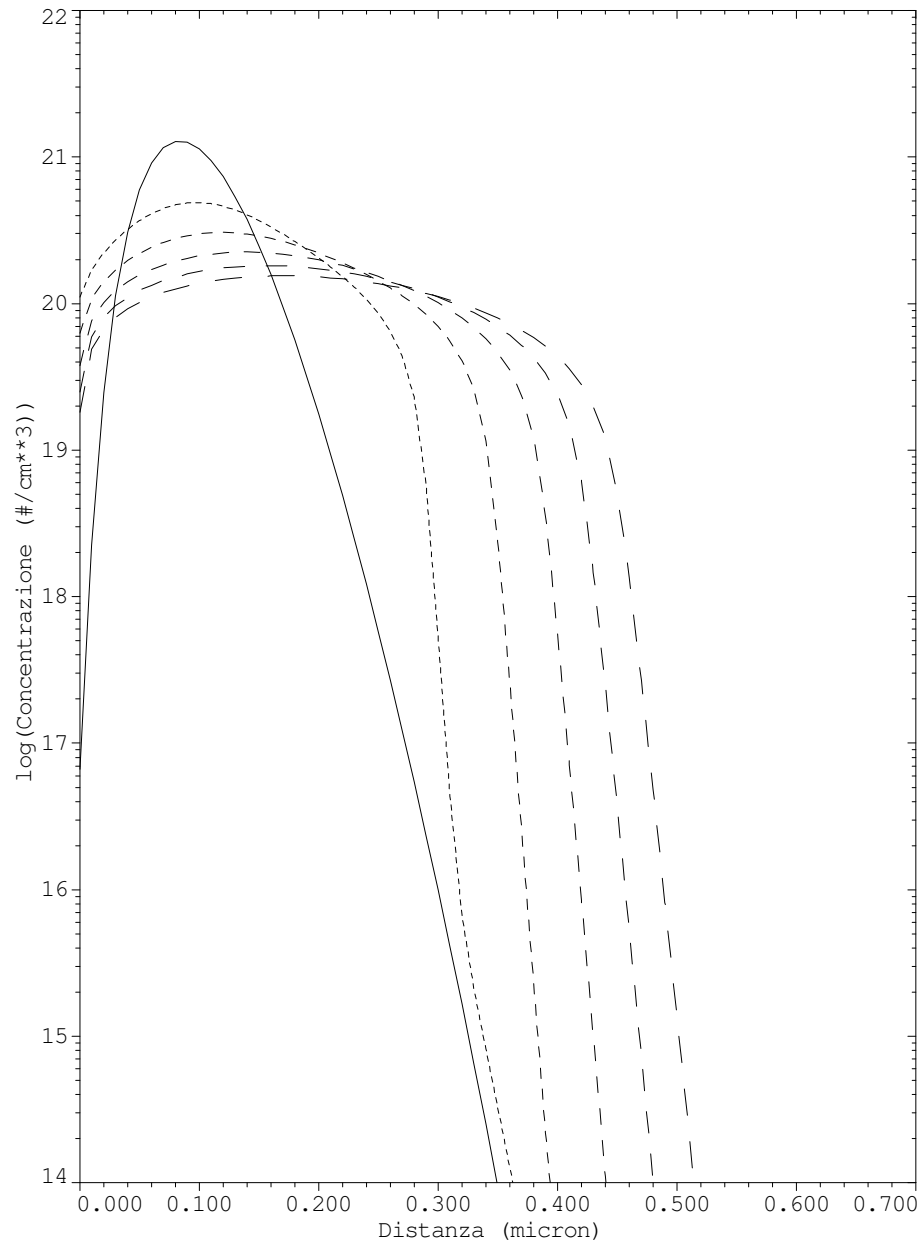


Figura 6.10: Variazione del profilo di impiantazione (curva continua) per ridiffusione a 1000°C di durata $t = n \cdot \Delta t$, con $\Delta t = 15 \text{ min}$ e $n = 1 \div 5$ (le curve da sinistra a destra si riferiscono a n crescenti).

Il programma fornisce graficamente l'evoluzione del profilo di drogaggio. La curva relativa al drogante impiantato ha un andamento di tipo gaussiano (fig. 6.10); la successiva diffusione non fa altro che aumentare la deviazione standard della curva e diminuirne il massimo.

6.3.8 Calcolo dei parametri della gaussiana

Si valutino, mediante il simulatore SUPREM3, i parametri della distribuzione gaussiana del drogante dopo un'impiantazione di arsenico. Si determinino, al variare dell'energia di impiantazione, le concentrazioni di drogante a diverse profondità nella fetta e i parametri R_p e ΔR_p per i più comuni materiali: Si, SiO₂, Al e Si₃N₄.

```
TITLE Variazione della distribuzione
+ in funzione dell'energia
INITIALIZE < 111 > SILICON THICKNES=.4
PLOT
LOOP STEPS=10
ASSIGN NAME=ENERG N.VALUE=(20,40,60,80
+,100,120,140,160,200,300)
INITIALIZE < 111 > SILICON THICKNES=.4 DX=.005
IMPLANT ARSENIC DOSE=1E15
+ ENERGY=@ENERG TEMPERAT=800
PRINT CHEMICAL ARSENIC X.MIN=0
+ X.MAX=.2 TERMINAL
PLOT ADD CHEMICAL ARSENIC
L.END
```

Il programma si riferisce a impiantazioni di arsenico su silicio; se ne possono scrivere altri in cui viene modificato il substrato. La simulazione fornisce direttamente C_p , N' , R_p mentre ΔR_p viene calcolato usando la definizione di deviazione standard. Il programma fornisce anche un'uscita grafica dei profili ottenuti dall'impiantazione al variare dell'energia di impiantazione (fig. 6.11 e 6.12).

Si nota dalla simulazione che mentre il massimo tende a spostarsi in profondità nel substrato al crescere dell'energia di impiantazione il picco della concentrazione diminuisce. Sono riportati nella figura ?? i grafici sperimentali per R_p e ΔR_p in funzione dell'energia di impiantazione.

6.3.9 Urto dello ione impiantato con la fetta di silicio

In un processo di impiantazione ionica si ha l'urto di ioni contro il reticolo cristallino che subisce l'impiantazione. Si studi l'urto elastico di uno ione (massa m_1 e velocità \underline{v}_1) con un'altra particella (massa m_2) inizialmente ferma (nucleo del reticolo cristallino).

- (a) *Supponendo che la particella 1 subisca una deviazione di un angolo θ_1 , si scrivano le relazioni tra le velocità delle due particelle (\underline{v}'_1 e \underline{v}'_2) dopo l'urto, applicando i principi di conservazione dell'energia e della quantità di moto.*

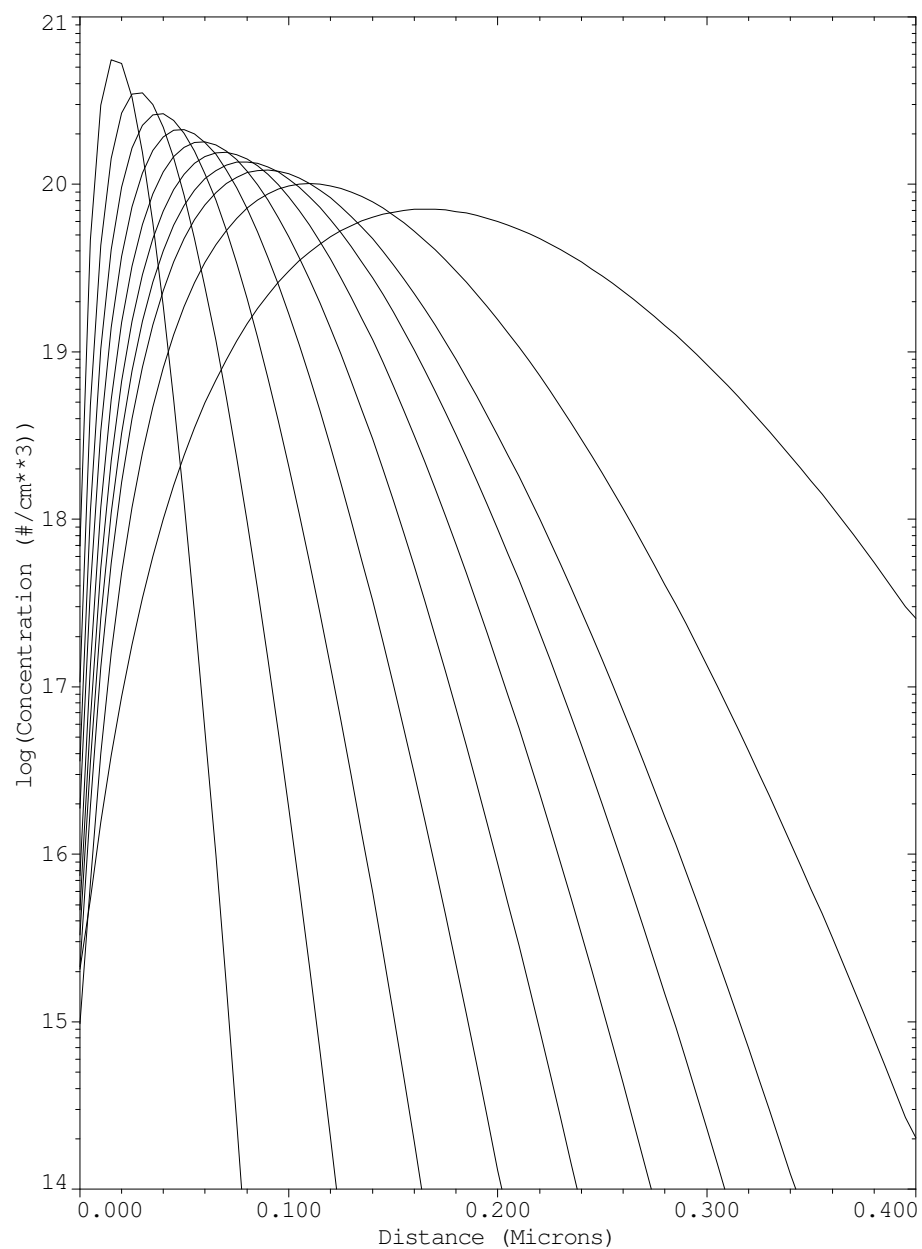


Figura 6.11: Profili di impiantazione su Si. Da sinistra curve con energia di impiantazione 20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 200, 300 keV.

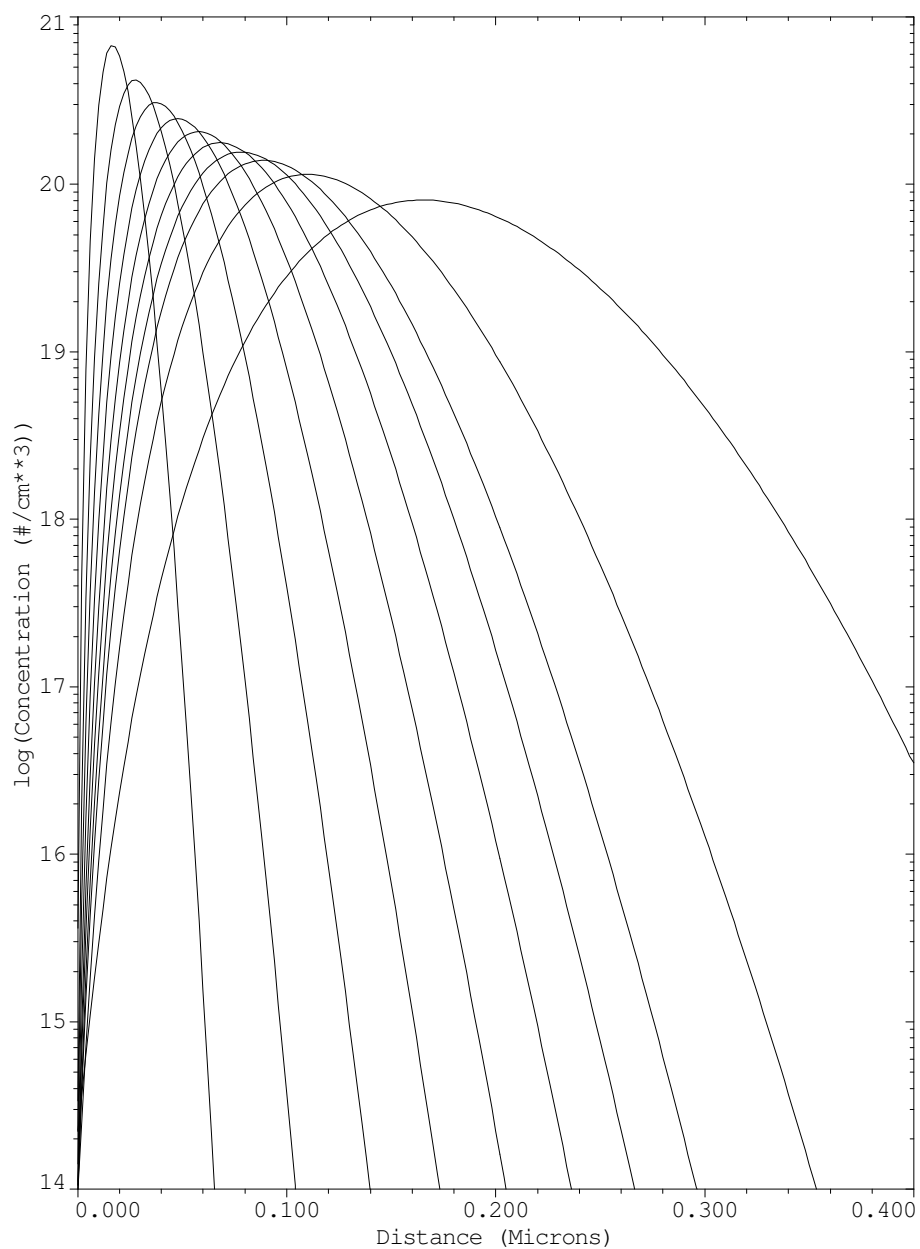


Figura 6.12: Profili di impiantazione su SiO_2 . Da sinistra curve con energia di impiantazione 20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 200, 300 keV.

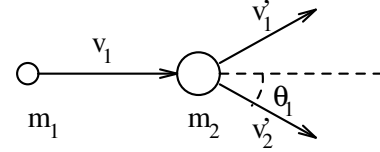


Fig. 6.16 Urto di uno ione con atomi del reticolo cristallino.

(b) Si trovino i valori delle velocità e dell'angolo θ_2 per un'urto di atomi di arsenico in una fetta di silicio. Se $\theta_1 = 15^\circ$ e l'impiantazione avviene con un'energia di 50 keV quanta energia viene trasferita al nucleo di silicio?

(c) Si ripeta il punto b) nel caso di urto frontale. Si trovi in questo caso anche la relazione che fornisce l'energia trasferita al nucleo del cristallo in funzione di E_0 e delle masse delle due particelle.

a)

Le conservazioni dell'energia e della quantità di moto sono relazioni vettoriali che si possono scrivere mediante tre equazioni scalari tra le componenti:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} m_1 v_1^2 &= \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \\ m_1 v_1 &= m_1 v_1' \cos(\theta_1) + m_2 v_2' \cos(\theta_2) \\ 0 &= m_1 v_1' \sin(\theta_1) - m_2 v_2' \sin(\theta_2) \end{cases}$$

Dividendo per m_1 e per v_1 con le nuove variabili $x = v_1'/v_1$, $y = v_2'/v_1$, $z = \theta_2$ e la costante $m_{21} = m_2/m_1$ il sistema diventa

$$\begin{cases} \cos(\theta_1) x + m_{21} y \cos z - 1 &= 0 \\ \sin(\theta_1) x - m_{21} y \sin z &= 0 \\ x^2 + m_{21} y^2 - 1 &= 0 \end{cases}$$

b)

La particella incidente è uno ione arsenico ($m_1 = 74,9216 \cdot m_0 = 1,244 \cdot 10^{-25}$ kg) con energia di 50 keV che, dopo l'urto, viene deviato di $\theta_1 = 15^\circ$. La particella urtata è un nucleo di silicio ($m_2 = 28,086 \cdot m_0 = 4,663 \cdot 10^{-26}$ kg). Quindi $m_{21} = m_2/m_1 = 0,3749$. Operando come descritto in appendice A per la soluzione di sistemi non lineari si ha per $\theta_1 = 15^\circ$ in 5 iterazioni la soluzione: $x = 0,5053$, $y = 1,40941$ e $z = 14,33^\circ$. Se l'energia dello ione arsenico è $E_0 = 50$ keV la velocità all'urto vale $v_1 = \sqrt{2E_0/m} = 358633$ m/s, allora $v_1' = 198324$ m/s, $v_2' = 505460$ m/s; all'atomo di silicio viene trasferita un'energia $E_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = 37,23$ keV.

c)

Con $\theta_1 = 0^\circ$, cioè urto frontale, in 4 iterazioni si trova: $x = 0,4547$, $y = 1,4547$ e $z = 0^\circ$. Quindi $v_1' = 163070$ m/s, $v_2' = 521703$ m/s e all'atomo di silicio viene trasferita un'energia $\frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = 39,66$ keV.

Nel caso $\theta_1 = 0 \rightarrow \theta_2 = 0$, restano due sole equazioni e si ottiene

$$E_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_0 = 0,793E_0 = 39,66 \text{ keV}$$

6.3.10 Distruzione dell'ordine cristallino nella fetta impiantata

Gli ioni ad alta energia che penetrano in un substrato perdono la propria energia in una serie di collisioni che possono dislocare atomi del reticolo ospite. Questi a loro volta possono spostare altri atomi provocando una cascata di dislocazioni che genera un "albero di disordine". Quando la concentrazione per unità di volume degli atomi ospiti spostati dai loro siti originari si avvicina alla densità atomica del semiconduttore, il materiale diventa amorfo.

Per un'impiantazione di ioni boro con energia $E_0 = 100$ keV si calcoli la dose richiesta affinché la densità di energia sia dello stesso ordine di grandezza di quella richiesta per produrre la fusione del silicio (cioè $E_{\text{fus}} = 10^{21}$ keV/cm³).

Usando le formule dei profili gaussiani, si ottiene la dose richiesta

$$N' = \frac{E_{\text{fus}} \times R_p}{E_0} = \frac{10^{21} \text{ keV/cm}^3 \times 0,32 \cdot 10^{-4} \text{ cm}}{100 \text{ keV}} = 3,2 \cdot 10^{14} \text{ ioni/cm}^2$$

6.3.11 Processo di annealing

Dopo un processo di impiantazione ionica è necessario un processo di rinvenimento ("annealing") per ricostruire il reticolo cristallino e per attivare gli atomi di drogaggio. Si studi l'efficacia di tale processo usando SUPREM3.

```
TITLE Variazione della percentuale di Arsenico attivo
+ per effetto del processo di ridiffusione
INITIALIZE < 111 > SILICON THICKNES=.7
IMPLANT ARSENIC DOSE=1E16 ENERGY=150
+ TEMPERAT=800
PLOT CHEMICAL DONOR TOP=1E22 LINE.TYP=3
PLOT ADD ACTIVE DONOR TOP=1E22
LOOP STEPS=5
PLOT ADD PAUSE TOP=1E22
PLOT TOP=1E22
DIFFUSION INERT TIME=3 TEMPERAT=1000
PLOT ADD CHEMICAL DONOR TOP=1E22 LINE.TYP=3
PLOT ADD ACTIVE DONOR TOP=1E22
L.END
```

Il programma fornisce i grafici dei profili di impiantazione delle cariche globali e di quelle elettricamente attive. Nelle figure 6.17 e 6.18 la curva a tratto continuo indica la carica attiva mentre la linea tratteggiata indica la carica complessiva impiantata. Dal confronto delle curve della figura 6.17, subito dopo l'impiantazione, e di quelle della figura 6.18, dopo un rivenimento a 800°C per 15 min, si constata che il processo di ridiffusione (annealing) favorisce il fenomeno dell'attivazione, infatti al crescere del tempo di ridiffusione le due curve delle cariche, tendono a sovrapporsi.

6.3.12 Variazione dei parametri elettrici durante il processo di rinvenimento

Dopo un'impiantazione ionica il substrato risulta danneggiato dall'urto con gli ioni impiantati; inoltre il processo avviene di solito a basse temperature e gli ioni impiantati nel silicio non sono tutti elettricamente attivi (non occupano posizioni sostituzionali). Per ovviare a tutti questi inconvenienti le strade sono due: o si esegue l'impiantazione portando la temperatura della fetta a un valore sufficientemente elevato in modo da fare avvenire il processo di rinvenimento contemporaneamente a quello di impiantazione,

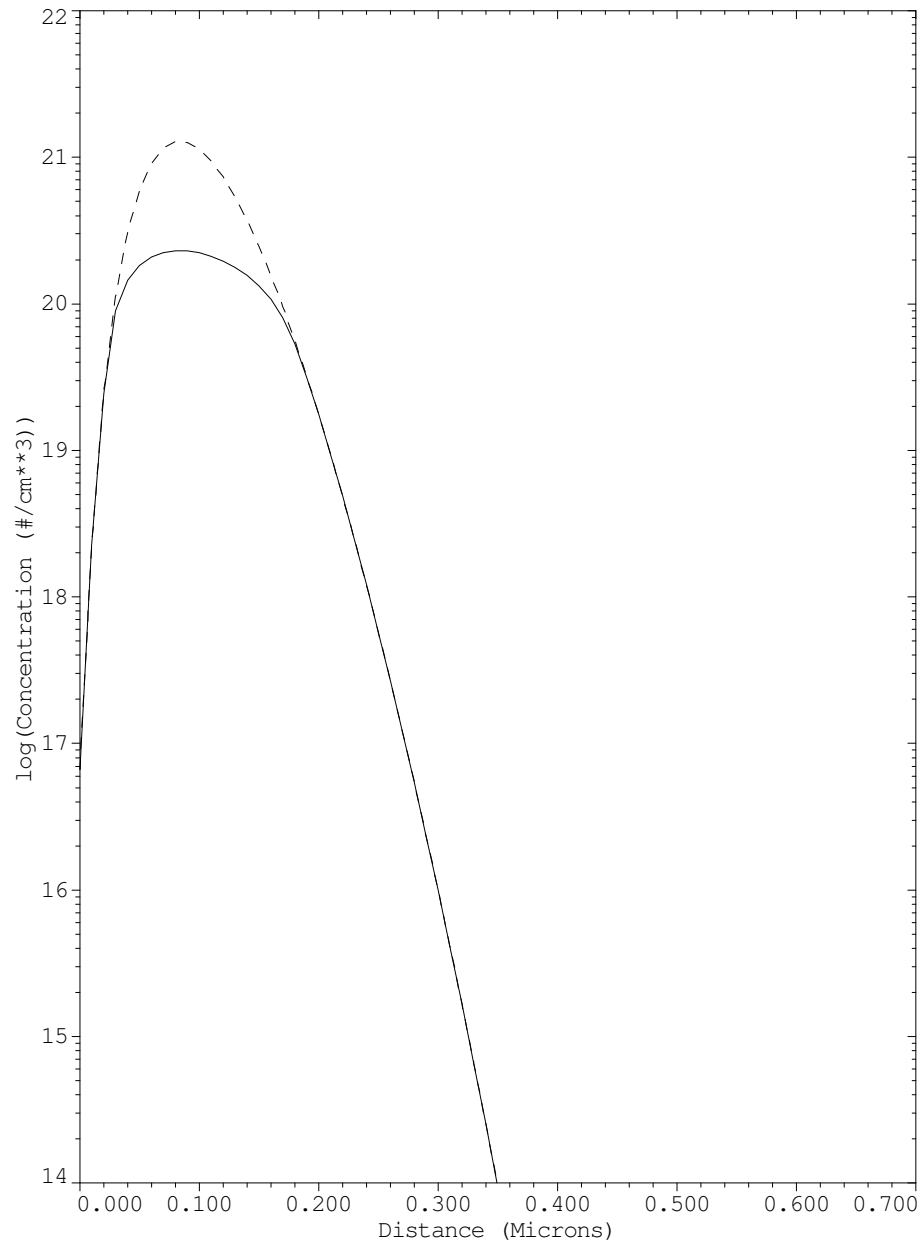


Figura 6.17: Profilo di drogaggio dopo l'implantazione a 150 keV e profilo delle cariche elettricamente attive.

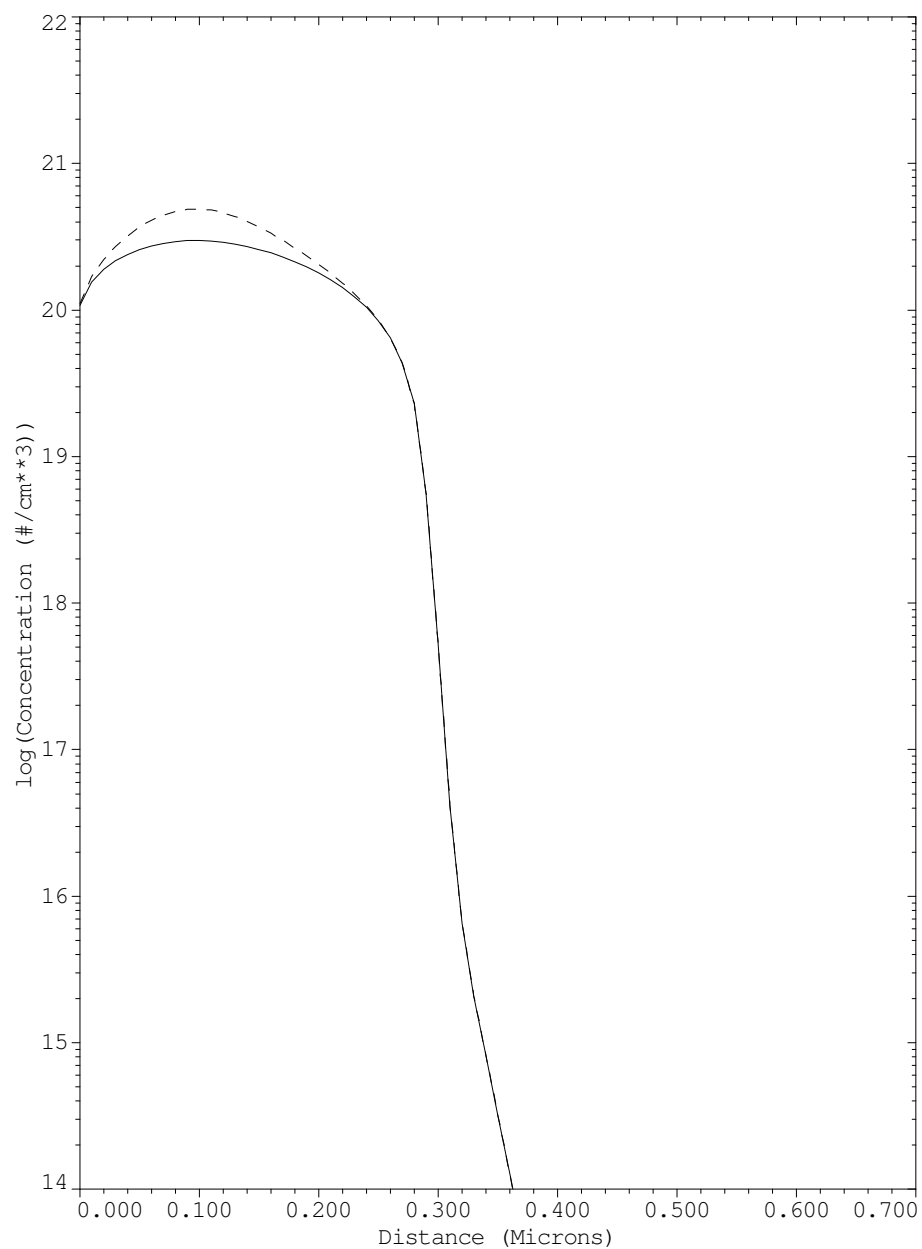


Figura 6.18: Profilo di drogaggio dopo l'impiantazione a 150 keV e profilo delle cariche elettricamente attive, dopo un processo di rinvenimento a 800°C che dura 15 min.

oppure si esegue dopo l'impiantazione a bassa temperatura un processo di rinvenimento. Per valutare gli effettivi benefici del rinvenimento si determini l'andamento della resistenza di substrato in funzione del tempo di ridiffusione.

```
TITLE Variazione dei parametri elettrici con annealing
+ alla temperatura di 900 gradi centigradi
INITIALIZE < 111 > SILICON THICKNES=3
EXTRACT PREFIX=Valori resistenza di superficie:
+ FILE=impianta/aneal1.out
ASSIGN NAME=SHP N.VALUE=(10)
ASSIGN NAME=TCOMP N.VALUE=(0)
IMPLANT ARSENIC DOSE=1E16 ENERGY=50
+TEMPERAT=800
ELECTRICAL
END
EXTRACT PREFIX=Condizioni dopo impiantazione
EXTRACT E.RESIST NAME=RES
EXTRACT VALUE=@RES PREFIX=Valore della resistenza:
LOOP STEPS=22
ASSIGN NAME=CO N.VALUE=(1,3,5,7,9,11,13,15,17,19
+ ,21,23,25,27,29,31,33,35,37,39,41,43)
LOOP STEP=2
ASSIGN NAME=COO N.VALUE=(0,1)
DIFFUSION INERT TIME=(@SHP*(1+@COO))
+ TEMPERAT=900
ASSIGN NAME=TCOMP
+ N.VALUE=(@TCOMP+@SHP*(1+@COO))
ELECTRICAL
END
EXTRACT VALUE=(@CO+@COO)
+ PREFIX=PASSO NUMERO:
EXTRACT E.RESIST NAME=RES
EXTRACT VALUE=@TCOMP
+ PREFIX=Tempo totale di diffusione:
EXTRACT VALUE=@RES PREFIX=Valore della R:
L.END
L.END
EXTRACT PREFIX=
EXTRACT CLOSE
```

Altri programmi simili consentono di cambiare la temperatura a cui avviene la ridiffusione e di conseguenza gli intervalli di tempo a cui va misurata la resistenza di superficie della fetta. I grafici sono ottenuti interpolando i valori numerici.

Commento dei risultati: dopo l'impiantazione il substrato, che ha subito l'urto degli ioni, presenta una resistenza elevata. In seguito al processo di rinvenimento la resistenza tende a diminuire; soprattutto perché gli ioni diventano parte integrante (in modo sostituzionale) del reticolo cristallino e liberano cariche che aumentano la conducibilità del substrato.

La diminuzione della resistenza si protrae durante il processo fino a che non prevalga il fenomeno di diffusione delle cariche all'interno del substrato, provocando un'inversione di tendenza che fa nuovamente aumentare la resistenza.

6.3.13

A una fetta di silicio viene aggiunto fosforo a partire da una sorgente gassosa a 975°C per 45 minuti. Si calcoli la profondità della giunzione nel caso che il substrato di tipo p abbia una resistività a) di $0,2 \Omega \text{ cm}$, b) di $30 \Omega \text{ cm}$.

Si assuma che a 975°C il coefficiente di diffusione del fosforo sia $D = 10^{-13} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ e che la sua solubilità solida sia 10^{21} cm^{-3} .

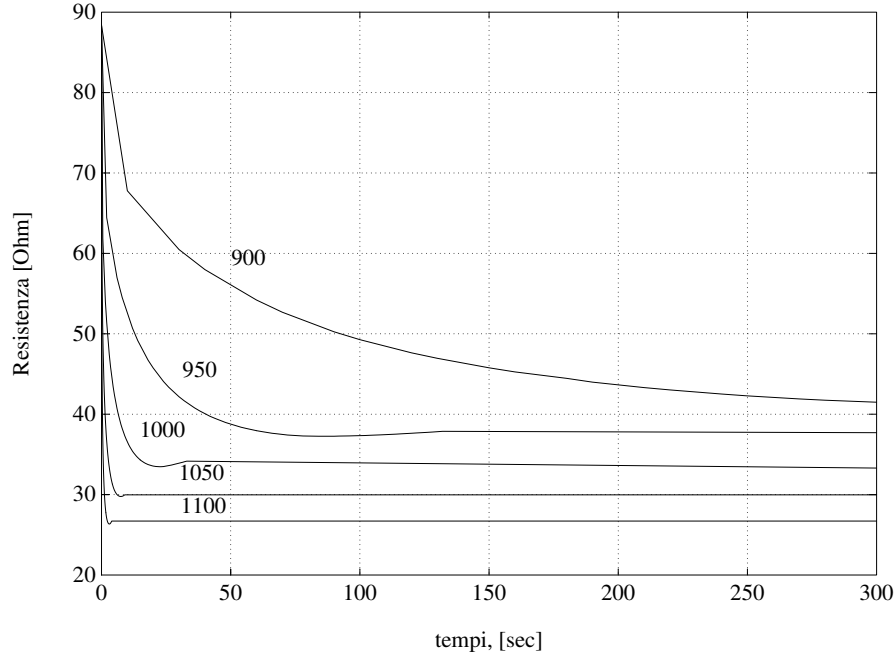


Figura 6.19: Resistenza di substrato in funzione del tempo di rinvenimento.

a)

La superficie è esposta durante la deposizione a una concentrazione di atomi droganti costante e pari alla solubilità solida di quell'elemento nel silicio. Si usa la soluzione dell'equazione di Fick nel caso in cui la concentrazione superficiale di drogante è fissa, con una funzione complementare d'errore:

$$\begin{aligned}
 C(x, t) &= C_s \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) = C_s \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty} e^{-\nu^2} d\nu \\
 &= C_s \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-\nu^2} d\nu\right) \\
 C(0, t) &= C_s = 10^{21} \text{ cm}^{-3}
 \end{aligned}$$

Si calcola la lunghezza caratteristica di diffusione

$$2\sqrt{Dt} = 2\sqrt{10^{-13} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1} \times 2700 \text{ s}} = 3,286 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$$

e si ricava dai grafici

$$\rho = 0,2 \Omega \text{ cm} \rightarrow N_a = 3 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$$

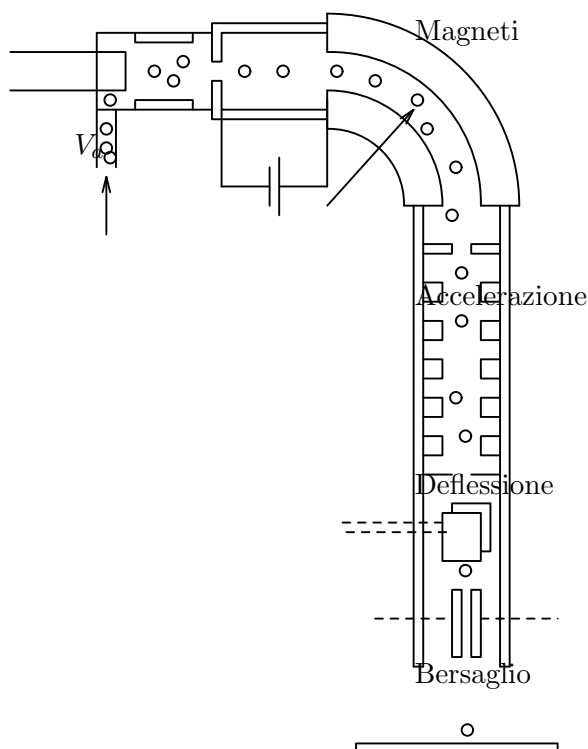
Si ha giunzione alla profondità x_j per cui la concentrazione di fosforo C_j è pari alla concentrazione N_a del substrato di tipo p.

$$C_j/C_s = N_a/C_s = 3 \cdot 10^{-5}$$

Dal grafico o dalle tabelle della funzione erfc si ha tale valore per l'argomento 2,95, da cui

$$\frac{x_j}{2\sqrt{Dt}} = 2,95 \rightarrow x_j = 2,95 \times 3,286 \cdot 10^{-5} \text{ cm} = 0,871 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

Sorgente Estrazione Separazione



b)

In modo analogo (estrapolando linearmente la curva della funzione erfc) si ha

$$\begin{aligned}\rho &= 30 \, \Omega\text{cm} \rightarrow N_a = 1,5 \cdot 10^{14} \, \text{cm}^{-3} \\ C_j/C_s &= N_a/C_s = 1,7 \cdot 10^{-7} \\ \frac{x_j}{2\sqrt{Dt}} &= 3,70 \rightarrow x_j = 3,70 \times 3,286 \cdot 10^{-5} \, \text{cm} = 1,22 \cdot 10^{-6} \, \text{m}\end{aligned}$$

6.3.14

Un dispositivo MOSFET è realizzato su un substrato di silicio di orientazione $\langle 100 \rangle$, drogato con $N_a = 5 \times 10^{16}$ atomi di boro al cm^3 attraverso i seguenti passi tecnologici:

- un'ossidazione in ossigeno secco a 900°C e 1atm, per 30 minuti;
- impiantazione di As, per la formazione di source e drain ($E_V = 100 \, \text{keV}$);
- un rinvenimento a 1200°C per 50 minuti.

Calcolare lo spessore dell'ossido cresciuto, la profondità della giunzione p-n, formata dalle regioni di source e drain e la loro estensione laterale al di sotto del gate.

6.3.15

Si consideri la seguente struttura relativa a un impiantatore ionico. Supponendo che nella sorgente di ioni questi siano accelerati da un potenziale pari a V_a (nella camera di estrazione) prima di entrare nel separatore, si determini:

- a) il verso dell'induzione magnetica B nel separatore, per la corretta deflessione degli ioni;
- b) l'espressione analitica che, dato il raggio di curvatura R (raggio di curvatura del separatore) ed il valore di induzione B , permetta di selezionare elementi di massa m in funzione di V_a ;
- c) il valore di V_a per selezionare ioni di arsenico con $B = 5 \text{ T}$ e $R = 30 \text{ cm}$;
- d) l'errore percentuale commesso nella selezione degli ioni, tenendo conto che il diaframma D ha un'apertura pari a $\pm 5\%$ del valore nominale di R .

6.4 Interconnessioni e resistori diffusi

La conduttanza di un resistore lungo L e con sezione $A = W \times d$, se il materiale è uniforme, cioè se la mobilità e la concentrazione dei portatori non varia con il punto, vale, scegliendo come esempio un semiconduttore di tipo n,

$$G = \sigma \cdot \frac{A}{L} = q \cdot n \cdot \mu_n \cdot \frac{W}{L} \cdot d$$

La variazione della mobilità con il drogaggio si può esprimere secondo la forma approssimata³

$$\mu = \mu_{\min} + \frac{\mu_{\max} - \mu_{\min}}{1 + \left(\frac{N}{N_{\text{rif}}}\right)^\alpha}$$

Parametro	arsenico	fosforo	boro
μ_{\min}	52,2	68,5	44,9
μ_{\max}	1417	1414	470,5
N_{rif}	$9,68 \cdot 10^{16}$	$9,20 \cdot 10^{16}$	$2,23 \cdot 10^{17}$
α	0,680	0,711	0,719

Se $n = N_d$ e μ_n sono funzione della profondità x , la conduttanza si calcola integrando il valore differenziale

$$\begin{aligned} dG &= q \cdot \mu_n(x) \cdot n(x) \cdot \frac{W}{L} dx \\ G &= \frac{W}{L} \cdot q \cdot \int_0^{x_j} \mu_n(x) \cdot n(x) dx \end{aligned}$$

dove x_j è la profondità a cui termina la regione resistiva, cioè si verifica la giunzione con il materiale di tipo opposto. Si definisce *conduttanza di strato* g la conduttanza di un resistore in cui $L = W$

$$g = q \cdot \int_0^{x_j} \mu_n(x) \cdot n(x) dx$$

risulta

$$G = g \frac{W}{L}$$

³McKelvey - Solid State and Semiconductor Physics - Dover.

6.4.1

Durante la fase di metallizzazione di un circuito integrato si realizza una pista di alluminio larga $2\mu\text{m}$ e lunga $1,2\text{mm}$. Lo spessore è $1\mu\text{m}$, ma in corrispondenza dei gradini, che la pista attraversa per il 15% della sua lunghezza, scende a $0,4\mu\text{m}$. La resistività dell'alluminio è $2,7\mu\Omega\text{mm}$. a) Si calcoli la resistenza della pista. b) Sapendo che la massima densità di corrente per evitare la elettromigrazione è $5 \cdot 10^5\text{A cm}^{-2}$, si determini la massima tensione che può essere applicata ai capi della pista.

a)

La pista si può ritenere formata da due tratti uniformi di spessore diverso, l'uno spesso $d_1 = 0,4\mu\text{m}$ e lungo $l_1 = 15\% \times 1,2\text{mm} = 0,018\text{cm}$, l'altro spesso $d_2 = 1\mu\text{m}$ e lungo $l_2 = 85\% \times 1,2\text{mm} = 0,102\text{cm}$; la resistenza totale ⁴ vale:

$$R = \rho \left(\frac{l_1}{w \cdot d_1} + \frac{l_2}{w \cdot d_2} \right) = 2,7 \cdot 10^{-6} \times \left(\frac{0,018}{2 \cdot 10^{-4} \times 0,4 \cdot 10^{-4}} + \frac{0,12}{2 \cdot 10^{-4} \times 1 \cdot 10^{-4}} \right) = 22,3\Omega$$

b)

La massima intensità di corrente entro la pista è data dal prodotto della massima densità di corrente permessa, $J_{\text{max}} = 5 \cdot 10^5\text{A cm}^{-2}$ per l'area della più piccola sezione trasversale del conduttore:

$$I = J_{\text{max}} \times (w \cdot d_1) = 5 \cdot 10^5 \times 2 \cdot 10^{-4} \times 0,4 \cdot 10^{-4} = 4\text{mA}$$

La caduta di tensione massima è dunque

$$V = RI = 22,3 \times 4\text{mV} = 89,2\text{mV}$$

6.4.2

Si assume che il profilo a gradino illustrato nella figura sia realizzato alla superficie di una fetta di silicio.

a) Calcolare la resistenza di strato.

b) Si assuma che il profilo di drogaggio lungo x , a seguito di ulteriori passi di processo, diventi costante al valore $2,5 \cdot 10^{17}\text{cm}^{-3}$ sino alla profondità $x = 4,5\mu\text{m}$. Se fosse possibile introdurre in modo uniforme altri atomi droganti tra $x = 0$ e $x = 4,5\mu\text{m}$, quale tipo di impurità (donatori o accettori) e quale concentrazione renderebbero la resistenza di strato di un drogaggio a profilo costante eguale alla resistenza di strato trovata nella parte a)?

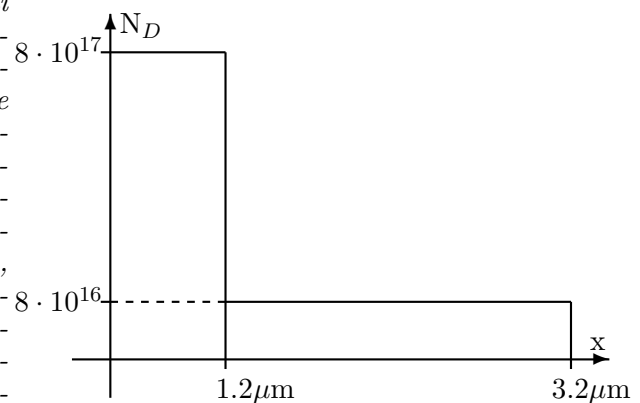


Fig. 6.20 Profilo di drogaggio resistore diffuso.

c) Quale dose di atomi consente di ottenere per impiantazione il risultato del punto b)?

⁴Si usano come unità di misura per le lunghezze i centimetri.

a)

Si fa l'ipotesi che il drogante sia arsenico e si usa l'espressione approssimata per determinare i valori di mobilità

$$\begin{aligned} N_{D_1} &= 8 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3} \rightarrow \mu_{n_1} = 314,4 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1} \\ N_{D_2} &= 8 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3} \rightarrow \mu_{n_2} = 799,4 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

La resistenza di strato si ottiene con una semplice operazione di integrazione

$$\begin{aligned} g &= q \cdot \int_0^{3,2\mu\text{m}} \mu_n(x) \cdot n(x) \text{ d}x \\ g &= q \cdot \int_0^{1,2\mu\text{m}} \mu_{n_1} \cdot n_1 \text{ d}x + q \cdot \int_{1,2\mu\text{m}}^{3,2\mu\text{m}} \mu_{n_2} \cdot n_2 \text{ d}x \\ &= q \cdot \mu_{n_1} \cdot N_{D_1} \cdot 1,2 \cdot 10^{-4} + q \cdot \mu_{n_2} \cdot N_{D_2} \cdot 2 \cdot 10^{-4} \\ &= 6,884 \times 10^{-3} \Omega^{-1} \\ R &= \frac{1}{g} = 145,2 \Omega/\square \end{aligned}$$

b)

Nella situazione modificata di drogaggio, si ha:

$$\begin{aligned} N_d &= 2,5 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3} \rightarrow \mu_n = 522 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1} \\ g &= q N_d \cdot 4,5 \cdot 10^{-4} \mu_n = 9,41 \cdot 10^{-3} \Omega^{-1} \\ R &= 106,3 \Omega/\square \end{aligned}$$

Se si vuole aumentare la resistenza di strato, per arrivare a $145,2 \Omega/\square$, occorre diminuire il numero di portatori e quindi aggiungere accettori

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{145,2} = 6,884 \cdot 10^{-3} \Omega^{-1} = q \mu_n \cdot 4,5 \cdot 10^{-4} (N_d - N_a) \\ (N_d - N_a) \mu_n &= \frac{6,884 \cdot 10^{-3}}{1,602 \cdot 10^{-19} \times 4,5 \cdot 10^{-4}} = 9,55 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-1} \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

Determinare N_a è complicato dal fatto che anche μ_n dipende dal drogaggio; in particolare mentre la concentrazione dei portatori dipende da $(N_d - N_a)$, la mobilità μ_n è legata a $N' = (N_d + N_a)$. Una tecnica approssimata consiste nel ritenere μ_n costante, trovare un valore per N_a , calcolare la corrispondente mobilità per ottenere infine un valore più corretto del drogaggio, e così via:

$$\begin{aligned} N_d - N_a &= 1,83 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}; \rightarrow N_a = 6,70 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3} \\ N' &= N_d + N_a = 3,17 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}; \rightarrow \mu_n = 473,4 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1} \\ N_d - N_a &= 2,017 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}; \rightarrow N_a = 4,83 \times 10^{16} \text{ cm}^{-3} \end{aligned}$$

da cui si ha $\mu_n = 486$, cioè il processo converge, ma non è ancora assestato definitivamente. In modo più sicuro si può risolvere numericamente l'equazione non lineare ($x = N_a$), con i metodi descritti in appendice A e usando la (??) per valutare la mobilità. Assumendo $T = 300 \text{ K}$, si ha

$$\mu_n(N) = 88 + \frac{7,4 \cdot 10^8 300^{-2,33}}{1 + 0,88N(1,26 \cdot 10^{17})^{-1}}$$

dove $N = N_d + N_a$ è la concentrazione totale di drogante; si può scrivere l'equazione non lineare

$$(N_d - N_a) \mu_n (N_d + N_a) = 9,55 \cdot 10^{19}$$

ovvero, posto $x = N_a$,

$$(2,5 \cdot 10^{17} - x) \left(88 + \frac{1251,8}{2,75 + 6,98 \cdot 10^{-18} x} \right) = 9,55 \cdot 10^{19}$$

Usando il processo di Newton si trova alla terza iterazione $N_a = 5,45 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ e $\mu_n = 488,5 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$.

c)

Se la distribuzione degli accettori è uniforme, la dose da impiantare entro lo strato spesso $x_j = 4,5 \mu\text{m}$ è

$$N'_A = N_a \times x_j = 5,115 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3} \times 4,5 \cdot 10^{-4} \text{ cm} = 2,3 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-2}$$

6.5 Circuiti integrati ibridi

6.5.1

Si progetti, cercando di minimizzare l'area occupata, un resistore a film spesso del valore di $2 \text{ k}\Omega$, sapendo che la concentrazione degli elettroni nel materiale resistivo è pari a $3,1 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$, che la mobilità vale $36,7 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$, che gli strati depositi hanno uno spessore di $2 \mu\text{m}$ e che la minima dimensione delle piste è di $4 \mu\text{m}$.

6.5.2

Un resistore di un circuito ibrido a film spesso ha le caratteristiche seguenti: lunghezza $220 \mu\text{m}$, larghezza $20 \mu\text{m}$, spessore $2 \mu\text{m}$, resistività dello strato resistivo di $2 \cdot 10^{-4} \Omega \text{ m}^{-1}$.

1. *Supponendo che il resistore sia percorso da una corrente di polarizzazione di 15 mA , si calcoli la potenza dissipata.*
2. *Supponendo inoltre, che la temperatura esterna sia di 25°C , che il substrato sia alumina con una resistenza termica di 2°C W^{-1} , che il tutto sia incapsulato in uno strato di resina epossidica uniforme avente una resistenza termica di 40°C W^{-1} , si disegni l'equivalente elettrico del sistema termico e si calcoli la temperatura, in condizioni stazionarie, della superficie del film resistivo (si veda anche il paragrafo ?? del capitolo 9).*

Capitolo 7

La giunzione metallo semiconduttore e i MESFET

Per l'analisi del comportamento elettrico di una giunzione metallo semiconduttore si impiegano i diagrammi a bande della struttura, sia in condizioni di equilibrio termodinamico sia nella situazione in cui si applichi un potenziale elettrico.

Viene utilizzata la teoria ideale di Schottky per classificare i contatti metallo-semiconduttore come contatti raddrizzanti o metallici (ohmici). È sufficiente un semplice confronto dei valori del lavoro di estrazione per avere un'indicazione se la giunzione abbia o meno un comportamento raddrizzante.

Si ricorre all'equazione di Richardson per valutare la corrente inversa come corrente termoemessa nel semiconduttore e si mettono in luce i limiti della teoria di Schottky nel progetto di contatti non raddrizzanti. La loro scarsa affidabilità non ne permette l'impiego pratico nella realizzazione di circuiti integrati. Si preferisce l'impiego dei contatti tunnel il cui studio viene affrontato applicando al diagramma a bande del contatto metallo-semiconduttore i meccanismi di conduzione attraverso una barriera di potenziale (rettangolare e triangolare) descritti nei capitoli 1 e 2. Dagli esempi considerati è facile rilevare che l'elevata densità di corrente ottenibile per effetto tunnel in un contatto tra metallo e silicio e la sua dipendenza lineare dalla tensione applicata consentono di ottenere un contatto a bassa resistenza tra un semiconduttore e una connessione metallica esterna.

Il diodo Schottky viene anche studiato come dispositivo raddrizzante; allo scopo si svolgono alcuni esercizi che mettono in evidenza le caratteristiche I-V e la dipendenza dalla temperatura delle caratteristiche elettriche.

Per la sua rilevanza applicativa è poi utile ricordare che il contatto metallo-semiconduttore è alla base di alcuni metodi sperimentali per la determinazione delle grandezze che definiscono il diagramma a bande e del profilo di drogaggio a partire dalla misura della capacità di giunzione.

Infine il capitolo si chiude con l'esame del primo dispositivo a tre morsetti considerato in questo testo: il transistor a effetto di campo MESFET, che basa il suo funzionamento su di un contatto metallo-semiconduttore.

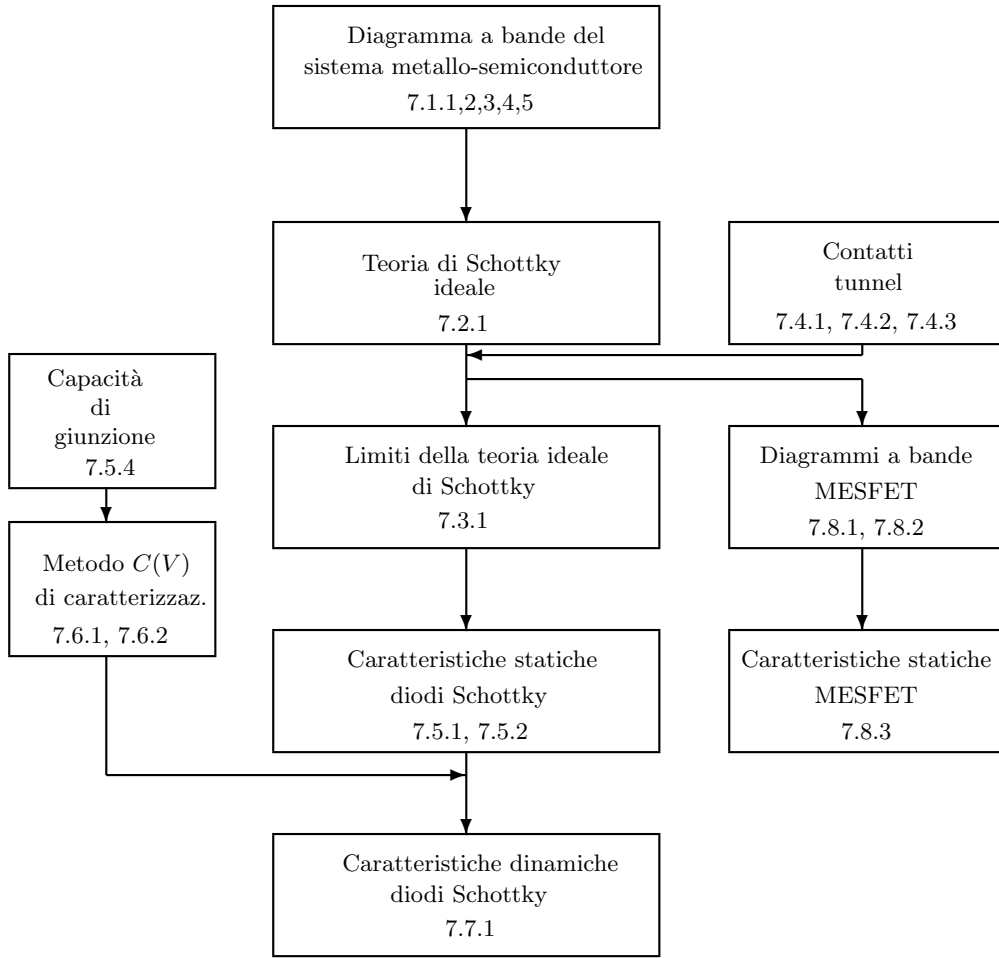


Figura 7.1: Struttura del capitolo 7.

7.1 Diagramma a bande della giunzione metallo semiconduttore

7.1.1

Si dimostri che in una struttura costituita da due materiali diversi il livello di Fermi, all'equilibrio termodinamico, è costante. Per ottenere che il livello di Fermi sia costante la condizione dell'equilibrio termodinamico è strettamente necessaria?

Si considerino due materiali (1) e (2) caratterizzati dalle funzioni di Fermi-Dirac $f_1(E)$ e $f_2(E)$, dalle densità degli stati $g_1(E)$ e $g_2(E)$, dalle concentrazioni di elettroni $n_1(E)$ e $n_2(E)$ e dalle concentrazioni di posti vuoti $v_1(E)$ e $v_2(E)$.

In condizione di equilibrio termodinamico, situazione all'interfaccia tra i materiali (1) e (2) si deve avere, *per ogni energia* E^* , un bilanciamento del flusso di elettroni tra i due materiali: il numero di elettroni che mediamente vanno verso (2) (proporzionale al numero di elettroni in grado di effettuare il passaggio, n_1 , per il numero di posti vuoti in grado di accoglierli, v_2) deve essere pari a quelli che mediamente fanno il cammino opposto

$$n_1(E^*)v_2(E^*) = n_2(E^*)v_1(E^*)$$

Per i singoli fattori valgono le espressioni

$$\begin{cases} n_1(E^*) &= g_1(E^*) f_1(E^*) \\ v_1(E^*) &= g_1(E^*) (1 - f_1(E^*)) \\ n_2(E^*) &= g_2(E^*) f_2(E^*) \\ v_2(E^*) &= g_2(E^*) (1 - f_2(E^*)) \end{cases}$$

Sostituendo si ha

$$\begin{aligned} g_1(E^*)f_1(E^*)g_2(E^*)(1 - f_2(E^*)) &= g_2(E^*)f_2(E^*)g_1(E^*)(1 - f_1(E^*)) \\ g_1(E^*)g_2(E^*)f_1(E^*) &= g_1(E^*)g_2(E^*)f_2(E^*) \end{aligned}$$

In definitiva, per qualunque coppia di materiali, cioè per qualunque distribuzione degli stati $g_1(E)$ e $g_2(E)$, si ha

$$f_1(E^*) = f_2(E^*) \quad \longrightarrow \quad E_{F,1} = E_{F,2} = E_F = \text{costante}$$

All'equilibrio termodinamico all'interno di una etero-struttura il livello di Fermi deve essere allineato.

Si noti come la condizione dell'equilibrio termodinamico non sia necessaria, infatti lo stesso risultato si otterrebbe in condizioni di corrente nulla tra i due materiali.

7.1.2

Si costruisca il diagramma a bande di una giunzione metallo-semiconduttore di tipo n in condizioni di equilibrio termodinamico, sapendo che il lavoro di estrazione del metallo è maggiore di quello del semiconduttore.

In condizioni di equilibrio termodinamico le regole che permettono di costruire il diagramma a bande di una giunzione metallo-semiconduttore possono essere schematizzate come segue:

- il livello di Fermi, E_F , è costante,
- il livello del vuoto¹, E_0 , è continuo,
- il lavoro di estrazione del metallo, $q\Phi_M$, è costante,
- l'affinità elettronica del semiconduttore, $q\chi$, è costante,
- l'estensione della banda proibita del semiconduttore, E_g , è costante,
- lontano dalla giunzione il diagramma a bande coincide con quello del materiale isolato

Si disegna il livello di Fermi. Nel lato del metallo il livello del vuoto E_0 si trova aggiungendo un'energia pari a $q\Phi_M$. Nel lato del semiconduttore lontano dal contatto, nota che sia la concentrazione degli atomi droganti, si trova l'energia inferiore della banda di conduzione².

$$E_C - E_F = kT \ln \frac{N_C}{N_d}$$

Partendo da E_C e scendendo in energia di una quantità pari a E_g si trova il livello E_V della banda di valenza, mentre a un'energia superiore di una quantità pari a $q\chi$ si trova il livello del vuoto. La somma dell'affinità elettronica e della differenza $E_C - E_F$ dà il

¹È l'energia dell'elettrone libero.

²Nel caso di un semiconduttore di tipo p, si ha una formula analoga che fornisce l'energia superiore della banda di valenza.

Se il drogaggio è uniforme la carica spaziale positiva che si estende per una profondità x_d dalla superficie di contatto con il metallo entro il semiconduttore è

$$Q_S = qAN_d x_d$$

e ai suoi capi si forma una differenza di potenziale

$$\phi_i = \Phi_M - \Phi_S = \Phi_M - \chi - \frac{E_C - E_F}{q}$$

dove

$$E_C - E_F = kT \ln \frac{N_C}{N_d} = 0,0259 \ln \frac{3,22 \cdot 10^{19}}{8 \cdot 10^{14}} \text{ eV} = 0,275 \text{ eV}$$

per cui

$$\phi_i = \Phi_M - \Phi_S = 4,75 \text{ V} - 4,15 \text{ V} - 0,275 \text{ V} = 0,325 \text{ V}$$

Dato che la carica è costante con x , il campo elettrico presenta una pendenza costante, cioè ha una variazione lineare

$$\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_{\max} \left(1 - \frac{x}{x_d} \right)$$

il suo valore massimo in $x = 0$ è

$$\mathcal{E}_{\max} = -\frac{qN_d x_d}{\epsilon_S}$$

L'area sotto la curva del campo elettrico rappresenta la tensione ϕ_i localizzata ai capi della regione svuotata, per cui

$$\phi_i = -\frac{1}{2} \mathcal{E}_{\max} x_d = \frac{q N_d x_d^2}{2\epsilon_S}$$

e esplicitando x_d

$$x_d = \sqrt{\frac{2\epsilon_S \phi_i}{qN_d}} = \sqrt{\frac{2 \times 11,7 \times 8,8544 \cdot 10^{-12} \times 0,325}{1,6 \cdot 10^{-19} \times 8 \cdot 10^{20}}} = 0,7 \text{ } \mu\text{m}$$

da cui

$$\mathcal{E}_{\max} = -\frac{1,6 \cdot 10^{-19} \times 8 \cdot 10^{20} \times 0,7 \cdot 10^{-6}}{11,7 \times 8,8544 \cdot 10^{-12}} = -865 \text{ kV/m}$$

Integrando il campo elettrico⁵ si ottiene

$$U(x) = \mathcal{E}_{\max} \left(x - \frac{x^2}{2x_d} \right) + C$$

Ponendo a zero l'energia potenziale all'interno del semiconduttore, $U(x_d) = 0$, la costante diventa $C = -\mathcal{E}_{\max} x_d/2$, per cui in definitiva

$$U(x) = \mathcal{E}_{\max} \left(x - \frac{x^2}{2x_d} - \frac{x}{2} \right)$$

⁵Con un doppio cambiamento di segno, uno per il passaggio campo - potenziale l'altro per il passaggio potenziale - energia potenziale.

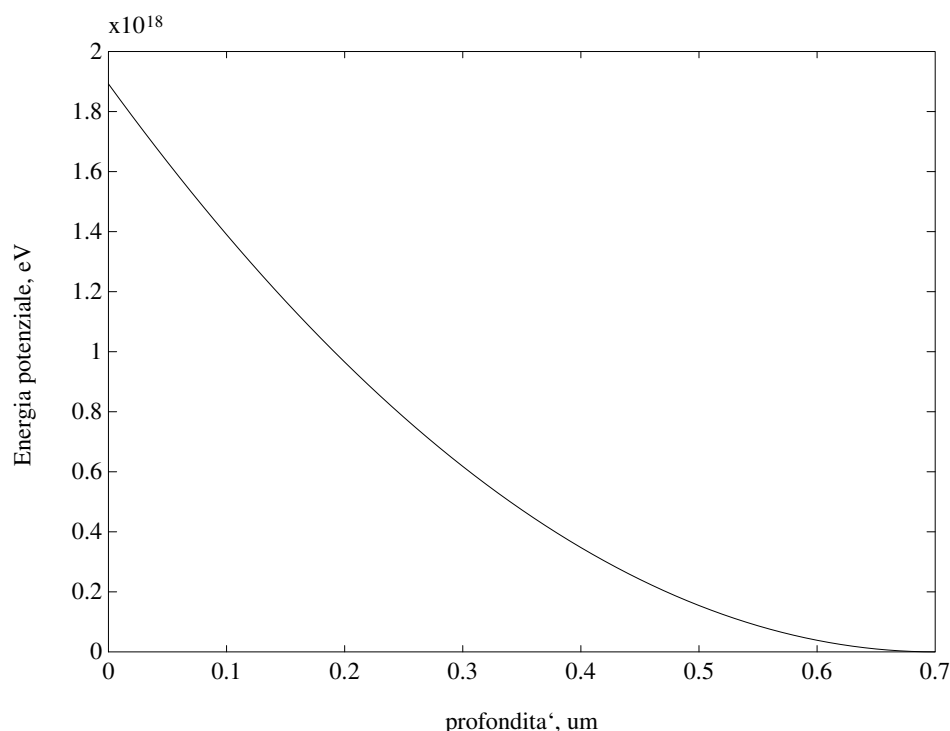


Figura 7.3: Energia potenziale degli elettroni (E_C) in prossimità di un contatto con Au.

7.1.4

Si costruisca il diagramma a bande di una giunzione metallo-semiconduttore di tipo n in presenza di polarizzazione esterna

L'applicazione di un potenziale esterno modifica l'aspetto del diagramma a bande rispetto a quello presentato all'equilibrio termodinamico (problema 7.1.2). Non è più possibile introdurre il livello di Fermi, infatti se il sistema non è all'equilibrio termodinamico *a rigore* non vale più la statistica di Fermi-Dirac e quindi non è corretto parlare di livello di Fermi. Si può però, in condizioni di basso livello di iniezione, definire (capitolo 5) uno *pseudo-livello di Fermi* per gli elettroni E_{Fn} e uno per le lacune E_{Fp} , immaginando che sussista per ciascuna delle due popolazioni, considerate separatamente, una condizione di equilibrio.

Nel diagramma a bande in esame il semiconduttore è di tipo n e si considera lo pseudolivello degli elettroni.

Le considerazioni che devono essere fatte nella costruzione del diagramma a bande fuori dall'equilibrio sono diverse a seconda che

- non vi sia corrente che fluisce nel dispositivo, o perlomeno la sua intensità sia piccola, e inoltre il semiconduttore presenti una grande conducibilità (elevato drogaggio),
- il flusso di corrente non sia trascurabile e quindi, data la conducibilità non infinita del semiconduttore drogato, si abbia una caduta di potenziale sul semiconduttore.

Il primo caso si riferisce a un contatto polarizzato inversamente, oppure in polarizzazione diretta, ma con piccole tensioni. Dato che il metallo e il semiconduttore si possono ritenere a conducibilità elevata e che la corrente è di bassa intensità, le cadute

di tensione nel metallo e nel corpo del semiconduttore ($r_s I$) possono essere considerate trascurabili; la tensione applicata V_a si localizza tutta sulla giunzione. Dato che

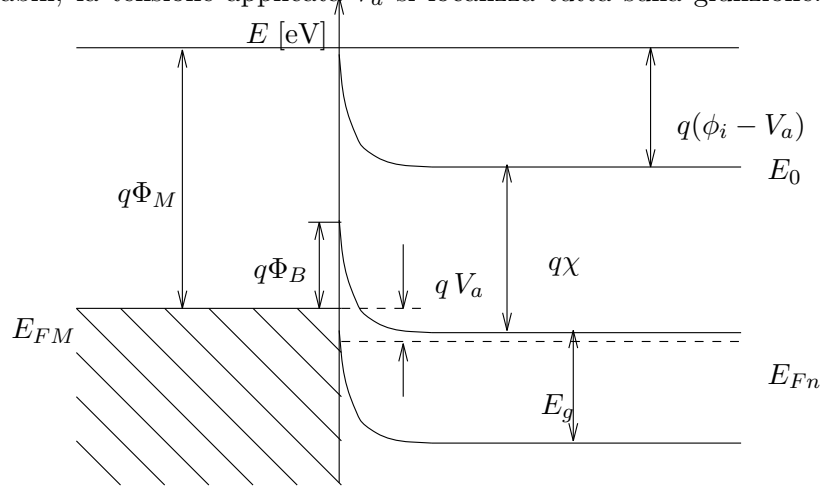


Figura 7.4: Diagramma a bande di un sistema metallo-semiconduttore di tipo n polarizzato *inversamente* (assenza di una corrente apprezzabile).

il semiconduttore è di tipo n la giunzione è polarizzata inversamente se si applica il polo negativo sul metallo: ciò comporta che i livelli energetici del lato semiconduttore si abbassino rispetto a quelli del metallo (fig. 7.4). Il salto energetico tra i due pseudo-livelli di Fermi degli elettroni è pari a qV_a . Applicare una tensione inversa porta allo stesso risultato che si avrebbe con un semiconduttore con lavoro di estrazione superiore al valore effettivo di una quantità qV_a (altezza della barriera di potenziale maggiore). Comportamento analogo si verifica in polarizzazione diretta per correnti di bassa intensità sino a che la caduta $r_s I$ è trascurabile; il risultato è lo stesso che si avrebbe con un semiconduttore caratterizzato da un lavoro di estrazione più basso di una quantità qV_a (altezza della barriera inferiore).

Si potrebbe pensare di applicare una tensione diretta che annulli la barriera ($V_a = \phi_i$), cioè raggiungere una situazione di banda piatta come succede nei dispositivi MOS (capitolo 11) e come è illustrato nella figura 7.5. Ciò *non è possibile*, infatti al crescere della tensione diretta la barriera $\phi_i - V_a$ diminuisce, ma aumenta la corrente e la caduta $r_s I$ diventa non più trascurabile. Sul contatto metallo-semiconduttore non viene applicata l'intera tensione esterna, ma la tensione $V_a - r_s I$. La barriera nel semiconduttore vale $\phi_i - (V_a - r_s I) = \phi_i - V_a + r_s I$ e non si annulla mai. Nella figura 7.6 risultano evidenti la caduta di tensione nel corpo del semiconduttore, tipica di un comportamento resistivo (zona lineare del diagramma a bande), e la zona svuotata, che rappresenta un comportamento capacitivo (zona parabolica). Si noti invece come in ogni caso la barriera di potenziale dal metallo al semiconduttore *non* vari al variare del potenziale esterno, in quanto è data dalla differenza $q\Phi_M - q\chi$, tra due quantità che dipendono solo dai materiali in gioco.

7.1.5

Si abbia un contatto metallo-semiconduttore tra alluminio e silicio di tipo n, in cui il profilo di drogaggio sia gaussiano con il massimo sulla superficie. Il valore misurato della barriera è $q\Phi_B = q\Phi_M(\text{Al}) - q\chi(\text{Si}) = 0,69 \text{ eV}$.

1. Si disegni qualitativamente il diagramma a bande.
2. Si indichi come sia possibile valutare il potenziale di contatto ϕ_i , inteso come differenza dei lavori di estrazione dei due materiali.

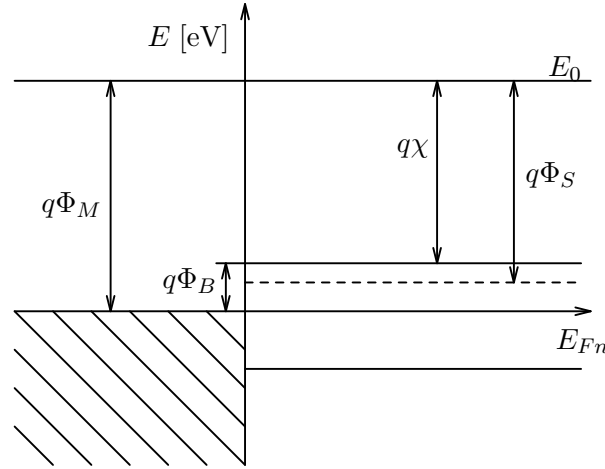


Figura 7.5: Diagramma a bande **errato** di un sistema metallo-semiconduttore di tipo n polarizzato *direttamente* (la polarizzazione diretta sembrerebbe tendere a riportare le bande nella condizione di *banda piatta*).

3. Si approssimi la distribuzione gaussiana ($C_p = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ e $\sigma = 0,4 \text{ }\mu\text{m}$) con una funzione di tipo esponenziale:
 - quale delle funzioni $\pm a \pm be^{\pm cx}$ risulta la più adatta con $a, b, c \geq 0$?
 - Si determinino a, b, c imponendo che la nuova distribuzione coincida con quella gaussiana in $x = 0$, $x = \sigma$ e $x = 2\sigma$.
4. Con la nuova distribuzione e nell'ipotesi di completo svuotamento, si integri l'equazione di Poisson e si ricavi $(\phi_i - V_a) = f(x_d)$, dove x_d è l'ampiezza della regione svuotata. Si disegni per punti la funzione trovata e si trovi in modo approssimato, graficamente, il valore di x_d all'equilibrio termodinamico.
5. Valutare se, in base al valore di x_d , sia veramente necessaria per $N(x)$ una rappresentazione esponenziale e non sia proponibile una espressione approssimata più semplice.

a)

Il diagramma a bande del metallo e del semiconduttore drogato, considerati separatamente, sono illustrati nella figura 7.7; si noti come nel semiconduttore il drogaggio diminuisca con la profondità a partire dalla superficie. All'equilibrio termodinamico i livelli di Fermi devono allinearsi per cui le bande del semiconduttore si deformano approssimativamente come indicato nella figura 7.8.

b)

Nel caso di una giunzione metallo-semiconduttore il potenziale di contatto è calcolabile come differenza tra il lavoro di estrazione nel metallo e il lavoro di estrazione nel silicio nel punto in cui il semiconduttore torna neutro, ovvero al bordo della regione svuotata

$$\begin{aligned}
 \phi_i &= \Phi_M - \Phi_S(x_d) = \Phi_M(\text{Al}) - \chi(\text{Si}) - \frac{E_c(x_d) - E_F}{q} \\
 &= \Phi_M - \chi - \frac{kT}{q} \ln \left(\frac{N_C}{N_d(x_d)} \right)
 \end{aligned}$$

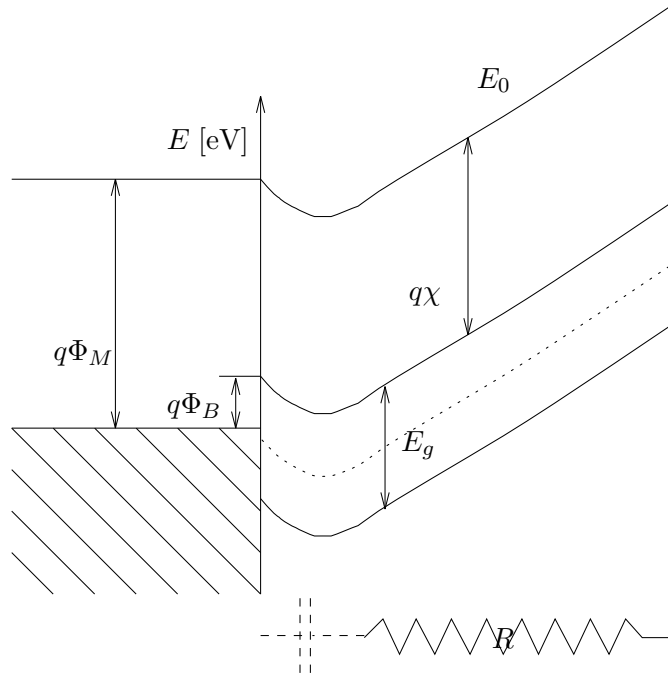


Figura 7.6: Diagramma a bande di un sistema metallo-semiconduttore di tipo n polarizzato *direttamente* (presenza di una corrente apprezzabile).

Il potenziale di contatto non può essere calcolato direttamente, in quanto il valore di x_d non è noto: per poterlo valutare è necessario integrare due volte la distribuzione di carica e ottenere un'altra espressione tra ϕ_i e x_d . Eguagliando si ha

$$\Phi_M - \chi - \frac{kT}{q} \ln \left(\frac{N_C}{N_d(x_d)} \right) = \int_0^{x_d} \int_0^x -q \frac{N_d(x')}{\epsilon_s} dx' dx$$

c)

Ponendo alla superficie l'origine dell'asse x che rappresenta la profondità, la gaussiana ha la forma

$$N_d(x) = C(x) = C_p e^{x^2/2\sigma^2}$$

Nell'espressione che approssima la gaussiana l'addendo $\pm a$ ha unicamente lo scopo di consentire lo scorrimento verticale della curva approssimante. La forma è invece fissata dai valori e dai segni degli altri due coefficienti.

Dalle figure 7.9 risulta ovvia la scelta

$$N_d(x) = a - b e^{cx}$$

Per la determinazione di a, b, c si impongono le condizioni

$$\begin{cases} x = 0 & \longrightarrow & C_p & = & a - b & (a) \\ x = \sigma & \longrightarrow & C_p e^{-1/2} & = & a - b e^{c\sigma} & (b) \\ x = 2\sigma & \longrightarrow & C_p e^{-2} & = & a - b e^{c2\sigma} & (c) \end{cases}$$

$$(a) - (b) \longrightarrow C_p (1 - e^{-1/2}) = b(e^{c\sigma} - 1) \quad (d)$$

$$(b) - (c) \longrightarrow C_p (e^{-1/2} - e^{-2}) = b e^{c\sigma} (e^{c\sigma} - 1) \quad (e)$$

$$(d) : (e) \longrightarrow \frac{1 - e^{-1/2}}{e^{-1/2} - e^{-2}} = e^{-c\sigma} = \ln(1,1975) = 0,1803$$

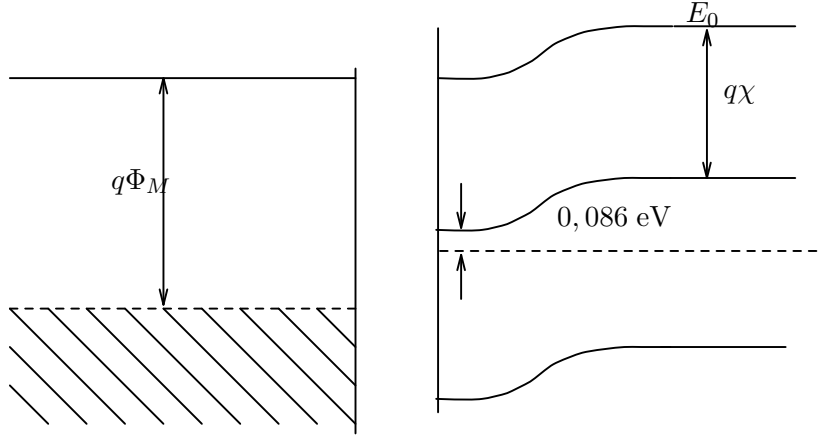


Figura 7.7: Diagramma a bande del metallo e del semiconduttore considerati separatamente.

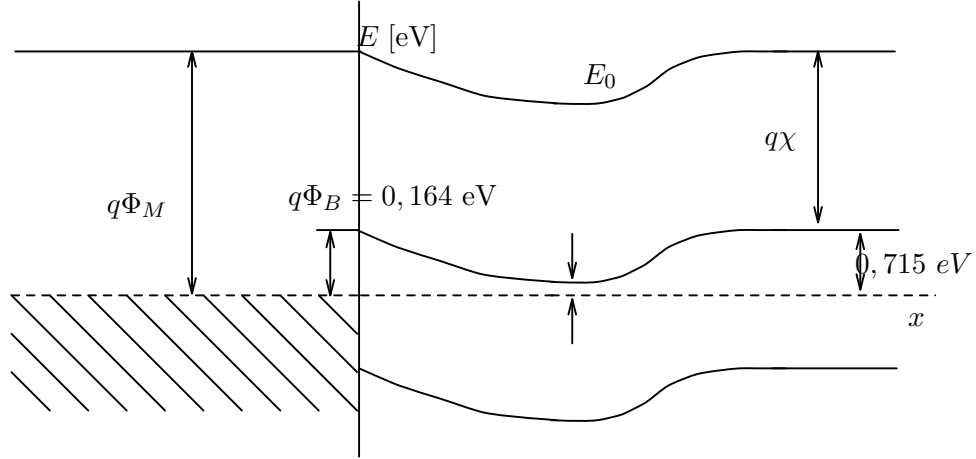


Figura 7.8: Diagramma a bande della giunzione metallo semiconduttore all'equilibrio termodinamico.

In conclusione si ha

$$\begin{aligned} c &= 4507,5 \text{ cm}^{-1} \\ b &= C_p \frac{1 - e^{-1/2}}{e^{c\sigma} - 1} = C_p \cdot 1,992 = 1,992 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3} \\ a &= C_p + b = (1 + 1,992) \cdot C_p = 2,992 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3} \end{aligned}$$

d)

Con la nuova distribuzione e nell'ipotesi di completo svuotamento

$$N_d^+ = N_d(x) \equiv C(x) = a - b e^{cx}$$

si integra l'equazione di Poisson ottenendo

$$\mathcal{E}(x) = \int_0^x \frac{\rho}{\epsilon_s} dx' = \frac{q}{\epsilon_s} \int_0^x N(x') dx' = \frac{q}{\epsilon_s} \left[ax - \frac{b}{c} (e^{cx} - 1) \right] + K$$

Se x_d è la profondità a cui la regione completamente svuotata ha fine, allora $\mathcal{E}(x_d) = 0$

$$K = -\frac{q}{\epsilon_s} \left[ax_d - \frac{b}{c} (e^{cx_d} - 1) \right]$$

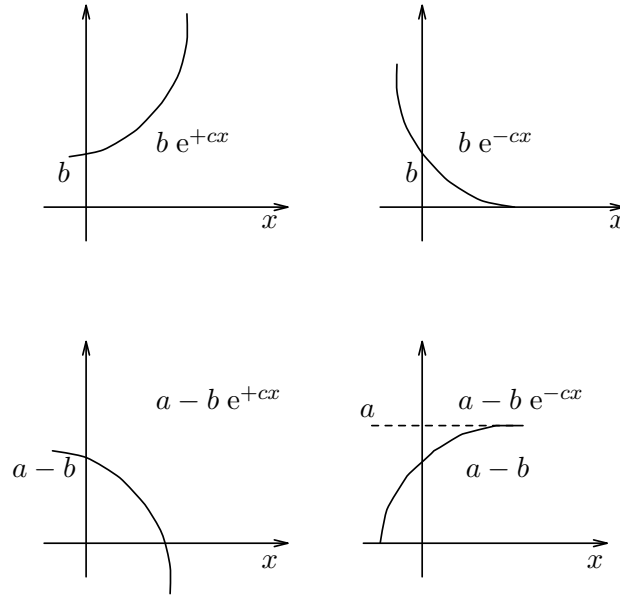


Figura 7.9: Andamenti delle funzioni $+be^{\pm cx}$ e $a - be^{\pm cx}$ con $a, b, c > 0$.

mentre in $x = 0$ il campo è massimo, $\mathcal{E}(x) = K$. Ponendo $V(x = 0) = 0$, la tensione cresce all'interno del semiconduttore sino a un massimo $V(x = x_d) = V_j = \phi_i - V_a$ che, all'equilibrio termodinamico (tensione applicata $V_a = 0$), vale $V(x = x_d) = V_j = \phi_i$

$$\begin{aligned}
 V(x) &= - \int_0^x \mathcal{E}(x') dx' = -\frac{q}{\epsilon_s} \left[\frac{a}{2} x^2 - \frac{b}{c^2} e^{cx} + \frac{b}{c} x \right] + Kx \Big|_0^x \\
 &= -\frac{q}{\epsilon_s} \left[\frac{a}{2} x^2 - \frac{b}{c^2} e^{cx} + \frac{b}{c} x + \frac{b}{c^2} \right] + Kx \\
 V_j &= V(x_d) = -\frac{q}{\epsilon_s} \left[\frac{a}{2} x_d^2 - \frac{b}{c^2} e^{cx_d} + \frac{b}{c} x_d + \frac{b}{c^2} \right] + Kx_d \\
 &= -\frac{q}{\epsilon_s} \left[\frac{a}{2} x_d^2 - \frac{b}{c} \left(\frac{1}{c} - x_d \right) (e^{cx_d} - 1) + \frac{b}{c} x_d \right]
 \end{aligned}$$

È possibile trovare all'equilibrio termodinamico l'ampiezza della regione svuotata risolvendo numericamente l'equazione

$$\Phi_M - \chi - \frac{kT}{q} \ln \left(\frac{N_C}{a - b e^{cx_d}} \right) = -\frac{q}{\epsilon_s} \left[\frac{a}{2} x_d^2 - \frac{b}{c} \left(\frac{1}{c} - x_d \right) (e^{cx_d} - 1) + \frac{b}{c} x_d \right] \quad (7.1)$$

Si ottiene una soluzione approssimata disegnando in funzione di x_d il primo e il secondo membro dell'equazione e cercandone il punto di intersezione. Dalla figura 7.10 si ha per l'estensione della regione svuotata il valore⁶ $x_d \simeq 28,18$ nm e $q\phi_i = 0,6032$ eV. Si nota che la curva relativa al primo membro è sostanzialmente una retta orizzontale. Ciò si spiega osservando che, con il valore trovato per x_d , l'esponenziale nelle formule vale al massimo

$$e^{cx_d} = e^{450750 \times 28,18 \cdot 10^{-9}} = e^{1,27 \cdot 10^{-2}} = 1,013 \simeq 1$$

⁶Ora che si conosce l'ordine di grandezza di x_d si può osservare come i punti usati per approssimare la gaussiana con l'esponenziale coprano un dominio troppo ampio; come nodi si sarebbero potuti assegnare per esempio $x = 0, x_d, 10x_d$.

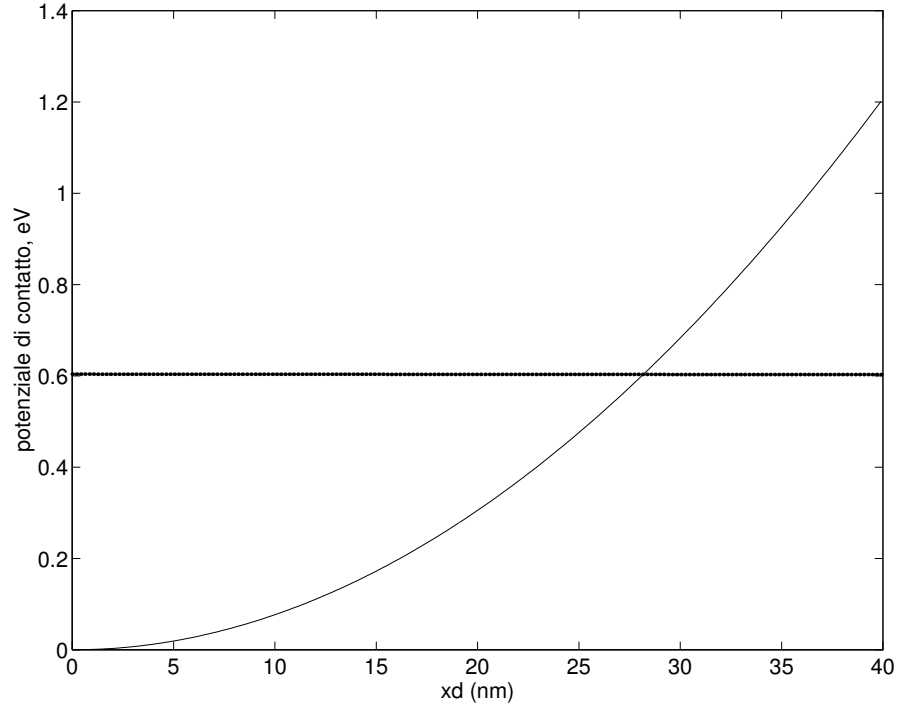


Figura 7.10: Andamento del potenziale nel semiconduttore con $N_d(x) = a - b e^{cx}$, espresso mediante le due relazioni. L'intersezione corrisponde al potenziale di contatto e permette di determinare l'ampiezza della regione svuotata.

mentre al minimo, per $x_d = 0$, vale 1. Tale variazione viene ulteriormente ridotta dalla funzione logaritmica e il primo membro della (7.1) si può ritenere costante, $q\phi_i = 0,603$ eV.

e)

Nel secondo membro della (7.1) l'esponenziale si potrebbe approssimare con i primi due termini dello sviluppo in serie

$$N_d(x) = a - b e^{cx} \simeq a - b(1 + cx) = (a - b) - (bc)x = m - nx$$

dove $m = a - b$ e $n = bc$. Ripetendo il procedimento secondo i passi seguiti in precedenza si ha

$$\mathcal{E}(x) = \frac{\rho}{\epsilon_s} = \frac{q}{\epsilon_s} \int_0^x N(x') dx' = \frac{q}{\epsilon_s} \left(mx - \frac{n}{2} x^2 \right) + K$$

$$\mathcal{E}(x_d) = 0 \rightarrow K = -\frac{q}{\epsilon_s} \left(mx_d - \frac{n}{2} x_d^2 \right)$$

da cui

$$\begin{aligned} V(x) &= - \int_0^x \mathcal{E}(x') dx' = -\frac{q}{\epsilon_s} \left[\frac{m}{2} x^2 - \frac{n}{6} x^3 \right] + Kx \Big|_0^x \\ &= -\frac{q}{\epsilon_s} \left[\frac{m}{2} x^2 - \frac{n}{6} x^3 \right] + Kx \end{aligned}$$

infine

$$\begin{aligned} V_j &= V(x_d) = -\frac{q}{\epsilon_s} x_d^2 \left(-\frac{m}{2} + \frac{n}{6} x_d + m - \frac{n}{2} x_d \right) \\ &= -\frac{q}{\epsilon_s} x_d^2 \left(\frac{m}{2} - \frac{n}{3} x_d \right) \end{aligned}$$

Procedendo graficamente nel modo descritto sopra si trova che all'equilibrio vale ancora $x_d \simeq 27,93$ nm.

Anche il termine con x_d nell'approssimazione lineare è molto piccolo; trascurandolo entro la parentesi si ha, con un'approssimazione che si può dire di ordine 0 (drogaggio costante),

$$x_d = \sqrt{\frac{\phi_i}{\frac{q}{\epsilon_s} \frac{m}{2}}} = 2,794 \cdot 10^{-8} \text{ m} = 27,94 \text{ nm}$$

Nota: il risultato non deve sorprendere dato che si è assunta una gaussiana con un valore elevato di σ e che x_d è così piccolo da interessare un microscopico intervallo in prossimità del massimo della gaussiana.

Anche senza conoscere il valore di x_d si deve comunque osservare che, per ben rappresentare la gaussiana nell'intorno dell'origine, i termini polinomiali più importanti sono quelli pari. Quindi, se non basta l'approssimazione 0 (drogaggio costante), per migliorare in modo apprezzabile il risultato, occorre passare a un'approssimazione quadratica.

7.2 Teoria di Schottky per contatto ideale

7.2.1

Si considerino due campioni di silicio drogati rispettivamente a) di tipo n e b) di tipo p. Supponendo di realizzare dei contatti "ideali", per i quali valga la teoria di Schottky, con un metallo avente lavoro di estrazione $q\Phi_M$ pari a 4,5 eV, determinare gli intervalli di drogaggio di tipo n e p per i quali si ottengono diodi a barriera Schottky oppure contatti non raddrizzanti (ohmici).

Per un contatto ideale, la teoria di Schottky permette di decidere sulla natura del contatto semplicemente confrontando i valori dei lavori di estrazione del semiconduttore e del metallo. Infatti la condizione essenziale per cui il contatto non abbia un comportamento bloccante è che la struttura a bande non presenti ostacoli per il trasferimento dei portatori di maggioranza. Di conseguenza i contatti con materiali di tipo n devono presentare bande incurvate verso il basso (zona arricchita di elettroni in superficie) e quelli con semiconduttori di tipo p bande incurvate verso l'alto (zona arricchita di lacune in superficie). Riassumendo

tipo n	tipo p
$q\Phi_M > q\Phi_S$ raddrizzante	$q\Phi_M < q\Phi_S$ raddrizzante
$q\Phi_M < q\Phi_S$ non raddrizzante	$q\Phi_M > q\Phi_S$ non raddrizzante

Nella figura 7.11 è illustrato il caso limite per il quale i lavori di estrazione coincidono

$$q\Phi_S = q\Phi_M$$

e quindi

$$(E_C - E_F) + q\chi = q\Phi_M \rightarrow E_C - E_F = q\Phi_M - q\chi = 4,5 - 4,05 = 0,45 \text{ eV}$$

Dato che $0,45 < E_g/2$ il livello di Fermi si trova sopra al centro della banda proibita, quindi l'assenza della barriera si verifica con un semiconduttore di tipo n.

a)

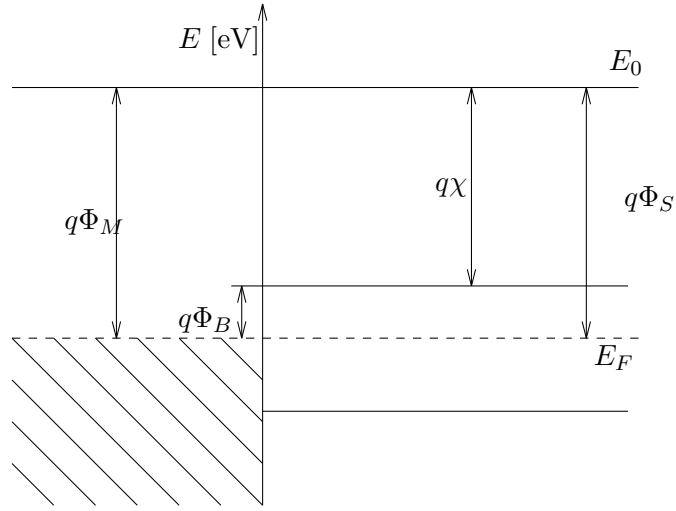


Figura 7.11: Diagramma a bande di un sistema metallo-semiconduttore di tipo n all'equilibrio termodinamico nel quale $q\Phi_M = q\Phi_S$.

Nel caso di semiconduttore di tipo n si ha un effetto raddrizzante se il lavoro di estrazione degli elettroni nel semiconduttore è inferiore a quello nel metallo con creazione di una regione di svuotamento. Nel caso di silicio tipo n si ha una barriera, e quindi un contatto *raddrizzante*, per

$$\begin{aligned}
 q\Phi_M &> q\Phi_S \longrightarrow (E_C - E_F) < 0,45 \\
 E_C - E_F &= kT \ln \left(\frac{N_C}{N_d} \right) = 0,026 \times \ln \left(\frac{2,8 \cdot 10^{19}}{N_d} \right) < 0,45 \\
 \exp \left(\frac{0,45}{0,026} \right) &> \frac{2,8 \cdot 10^{19}}{N_d} \\
 N_d &> \frac{2,8 \cdot 10^{19}}{e^{17,3}} = 8,5 \times 10^{11} \text{ cm}^{-3}
 \end{aligned}$$

Il contatto risulta non raddrizzante se $q\Phi_M < q\Phi_S$ e

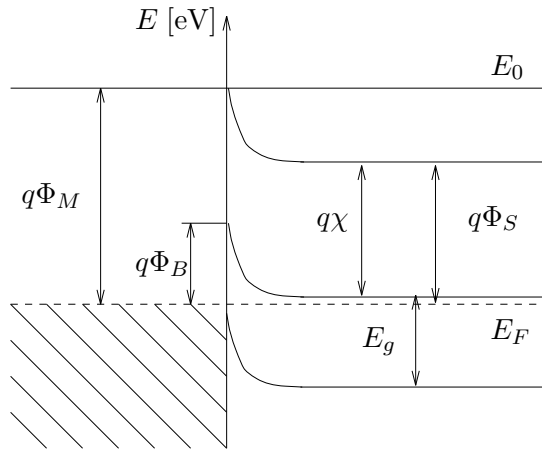


Figura 7.12: Diagramma a bande di un sistema metallo-semiconduttore di tipo n con $N_d > 8,5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-3}$.

$$0,45 < (E_C - E_F) < E_g/2$$

ovvero

$$N_d < 8,5 \times 10^{11} \text{ cm}^{-3}$$

È da notare che un tale livello non risulta realistico per un drogaggio intenzionale, in quanto il drogaggio di fondo non intenzionale può avere concentrazione superiore.

b)

Nel caso di silicio di tipo p, dato che $q\Phi_S$ è sempre maggiore di $q\Phi_M$, il contatto è di tipo raddrizzante qualsiasi sia la concentrazione di drogante (problema 7.5.2).

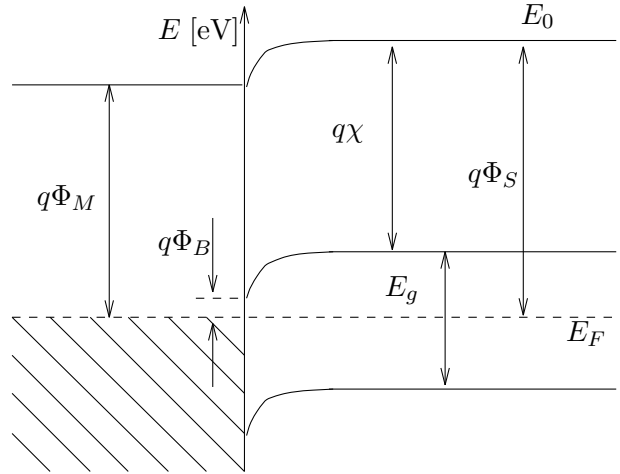


Figura 7.13: Diagramma a bande di un sistema metallo-semiconduttore di tipo n con $N_d < 8,5 \times 10^{11} \text{ cm}^{-3}$.

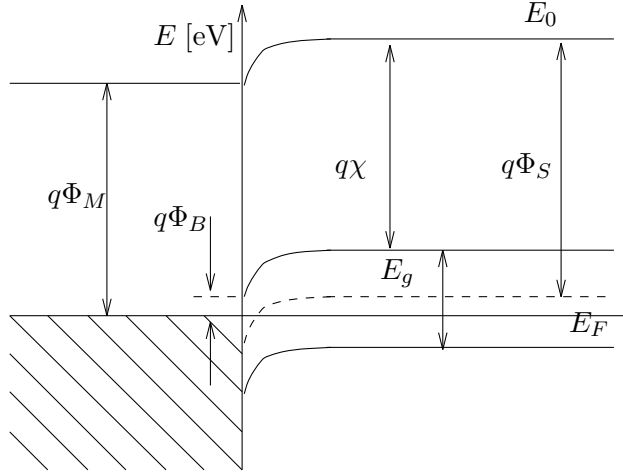


Figura 7.14: Diagramma a bande di un sistema metallo-semiconduttore di tipo p con un valore di N_a qualsiasi.

7.3 Limiti della teoria ideale di Schottky

7.3.1

Nel caso della teoria ideale di Schottky, la natura del contatto dipende solo dai valori di $q\Phi_M$ e $q\Phi_S$ ovvero dal fatto che, in condizioni di equilibrio termodinamico, esista

valutare tale corrente si applicano i concetti esaminati nel capitolo 2 a proposito dell'emissione di un metallo nel vuoto⁸. Si impiega l'equazione di Richardson alla barriera metallo semiconduttore di valore pari al lavoro di estrazione del metallo diminuito dell'affinità elettronica nel silicio: $q\Phi_B = q\Phi_M - q\chi$,

$$J = A_0 \cdot T^2 \cdot \exp\left(-\frac{q\Phi_M - q\chi}{kT}\right)$$

Si valutano le correnti a 300 K relative ai contatti realizzati tra il silicio e i vari metalli. Si ha⁹

$$A_0 = \frac{4mq\pi}{h^3} k^2 = 120 \cdot 10^4 \text{ Am}^{-2}\text{K}^{-2}$$

e quindi

$$A_0 \cdot T^2 @ 300 = 10,8 \cdot 10^6 \text{ Am}^{-2}$$

L'affinità elettronica del silicio vale 4,05 V, quindi $q\Phi_B$ nei quattro casi vale 0, 0,1 eV, 0,45 eV e 1,0 eV; si hanno le densità di corrente

$$\begin{array}{ll} q\Phi_B = 0,0 \text{ eV} & J = 10,8 \cdot 10^6 \text{ Acm}^{-2} \\ q\Phi_B = 0,1 \text{ eV} & J = 230,1 \cdot 10^3 \text{ Acm}^{-2} \\ q\Phi_B = 0,45 \text{ eV} & J = 0,327 \text{ Acm}^{-2} \\ q\Phi_B = 1 \text{ eV} & J = 21,3 \cdot 10^{-11} \text{ Acm}^{-2} \end{array}$$

In condizioni di polarizzazione inversa la corrente termoemessa nel silicio dal metallo rappresenta il limite massimo della corrente che può scorrere nel contatto (*limite di emissione*). Non è detto che tale corrente possa effettivamente scorrere nel contatto: la corrente dipende dai fenomeni di trasporto nel semiconduttore.

b)

Si tratta di valutare per quali valori di tensione si incorra nel limite di emissione. Nel semiconduttore con spessore di 5 μm si uguaglia la corrente emessa dal metallo nel semiconduttore con la corrente di trascinamento nel semiconduttore e si ottiene il valore massimo di tensione inversa applicabile¹⁰. Il fatto di supporre che tutto il potenziale cada sul silicio è giustificato perché la caduta resistiva sul metallo è trascurabile e fino a quando non intervenga il limite di emissione il potenziale sulla giunzione non cambia. Quindi

$$J_{\text{emessa}} = J_t = q\mu_n n \mathcal{E} = q\mu_n n V_a / L$$

e la tensione massima prima di incorrere nel limite di emissione vale

$$V_a = \frac{J_{\text{emessa}} L}{q\mu_n n}$$

Ponendo $\mu_n = 1400 \text{ cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$, per $L=5 \mu\text{m}$ si ottiene,

$$\begin{array}{ll} q\Phi_B = 0,0 \text{ eV} & V_a = 28,28 \cdot 10^6 \text{ V} \\ q\Phi_B = 0,1 \text{ eV} & V_a = 6,041 \cdot 10^5 \text{ V} \\ q\Phi_B = 0,45 \text{ eV} & V_a = 0,808 \text{ V} \\ q\Phi_B = 1 \text{ eV} & V_a = 5,59 \cdot 10^{-10} \text{ V} \end{array}$$

⁸Si trascura il fenomeno dell'abbassamento della barriera di potenziale per effetto Schottky, quando si applica una tensione esterna.

⁹In realtà per un'analisi più precisa bisognerebbe correggere il valore teorico utilizzando per barriere Schottky con silicio di tipo n il valore $250 \text{ Acm}^{-2}\text{K}^{-2}$.

¹⁰Oltre questo limite la corrente tende a saturare e quindi varia poco al crescere della tensione; la resistenza del contatto cresce sensibilmente.

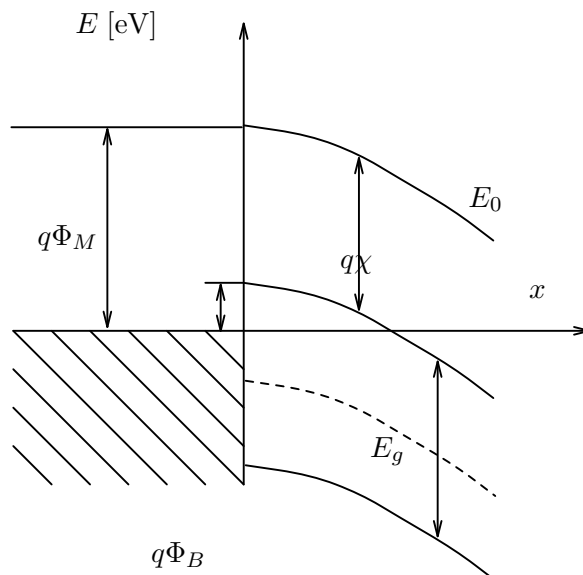


Figura 7.17: Diagramma a bande di un sistema metallo-semiconduttore in condizioni di polarizzazione inversa prima che intervenga il limite di emissione.

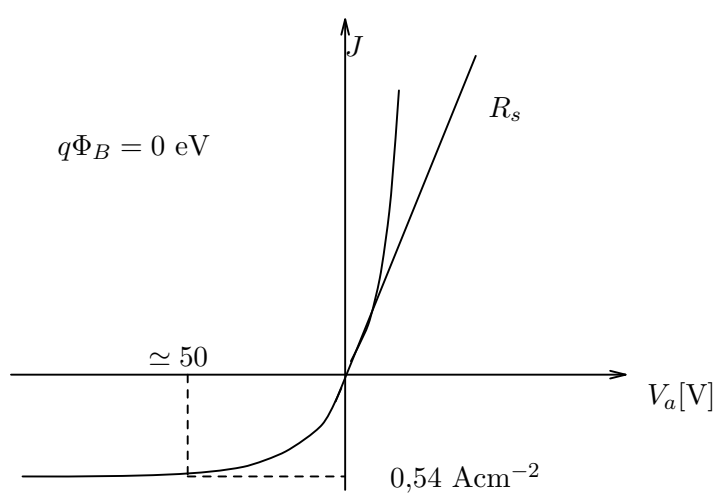


Figura 7.18: Diagramma tensione-corrente per il contatto metallo-semiconduttore con $q\Phi_B = 0$ nel quale in polarizzazione inversa interviene il *limite di trasporto*.

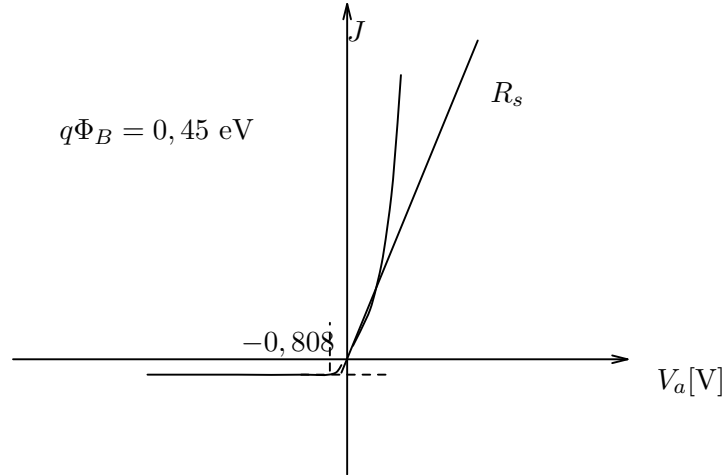


Figura 7.19: Diagramma tensione-corrente per il contatto metallo-semiconduttore con $q\Phi_B = 0,45$ eV nel quale in polarizzazione inversa interviene il *limite di emissione*.

Il fenomeno di saturazione della velocità dei portatori pone un'altro vincolo. Con una velocità dei portatori di $4 \cdot 10^6$ cm/s (al limite della saturazione) si ottiene

$$J_t = q n v = 1,6 \cdot 10^{-19} \times 8,5 \cdot 10^{11} \times 4 \cdot 10^6 = 0,54 \text{ A cm}^{-2}$$

Questo valore può essere indicato come *limite di trasporto* e si incontra per un campo di 10^5 V cm⁻¹ che corrisponde, per il semiconduttore in esame, a tensioni di circa 50 V corrispondenti a un campo di 10^5 V cm⁻¹. Nei primi due casi ($q\Phi_B = 0$ e $q\Phi_B = 0,1$ eV) il limite di emissione è molto alto e prevale dunque quello di trasporto, ma dato che nei circuiti integrati si devono garantire escursioni tipiche di tensione tra +10 V e -10 V, non si hanno in pratica limiti e i contatti si possono considerare non raddrizzanti. Nel terzo e quarto caso il limite di emissione riduce il campo di funzionamento non raddrizzante del contatto a una frazione di volt.

c)

In polarizzazione diretta (tensione positiva applicata al metallo) la corrente di elettroni è diretta dal semiconduttore al metallo ed è legata alla densità dei portatori all'interfaccia. Le equazioni di Shockley mostrano che la dipendenza con la tensione applicata è esponenziale, quindi sono garantite correnti tali da non creare limiti alla natura non raddrizzante del contatto. Il comportamento in polarizzazione diretta, tranne che per tensioni dirette molto piccole, è completamente dominato dai fenomeni resistivi nel semiconduttore.

d)

Complessivamente l'andamento della corrente in funzione della tensione per i due contatti metallo semiconduttore è rappresentato nelle figure 7.18 e 7.19.

7.4 Contatti tunnel

Nelle tecnologie integrate la necessità di realizzare dei contatti ohmici di elevata affidabilità (in un circuito integrato si possono avere un numero di contatti metallo semiconduttore superiore al milione) non permette di utilizzare contatti progettati affidandosi alla teoria di Schottky. I motivi sono i seguenti:

1. non è possibile tecnologicamente controllare con una precisione sufficientemente elevata le concentrazioni di drogaggio necessarie per realizzare contatti non raddrizzanti con l'alluminio;

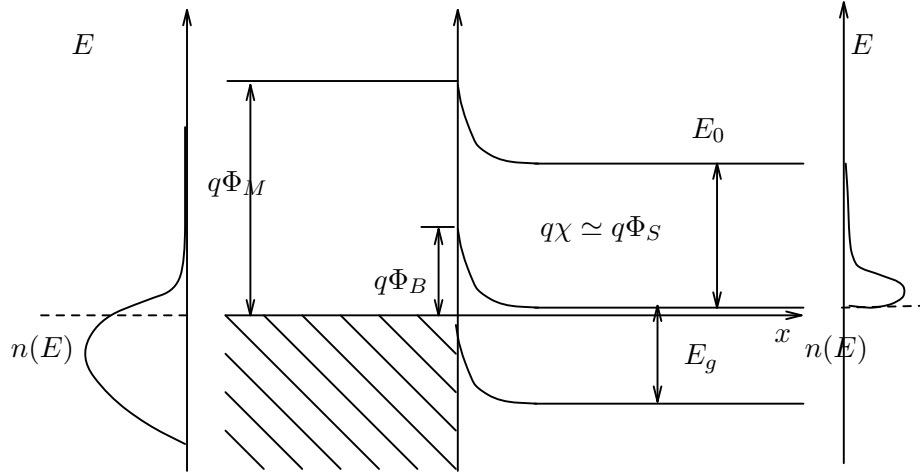


Figura 7.20: Diagramma a bande all'equilibrio termodinamico del contatto metallo (alluminio) semiconduttore (silicio drogato n con $N_d = 2,8 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$) e relativa distribuzione degli elettroni nel metallo e nel semiconduttore in banda di conduzione per una temperatura pari a 300 K.

2. non è possibile un controllo accurato dell'interfaccia tra metallo e semiconduttore, tale da fissare con sicurezza l'entità della barriera $q\Phi_B$ (il valore può variare molto rispetto alla situazione ideale, soprattutto a causa delle cariche superficiali) e quindi la corrente inversa.

Per questo motivo si ricorre alla realizzazione di contatti con silicio fortemente drogato nei quali la conduzione avviene per effetto tunnel (il flusso di cariche dovuto all'effetto tunnel prevale sulle componenti di iniezione).

7.4.1

Si determini la corrente in un contatto di area $A = 4 \mu\text{m}^2$ tra alluminio e silicio drogato di tipo n con $N_d = 2,8 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$, in condizioni di polarizzazione diretta e inversa assumendo una velocità di trascinamento di 10^6 cm s^{-1} . Si confrontino i risultati con quelli che si otterrebbero con un semiconduttore drogato $N_d = 5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$. Si approssimi la forma della barriera in modo lineare e si usi il metodo WKB esaminato nel capitolo 1.

Dato l'alto livello di drogaggio nel semiconduttore il livello di Fermi viene ad allinearsi con il bordo inferiore della banda di conduzione; il diagramma a bande risultante all'equilibrio termodinamico è quello illustrato nella figura 7.20. La possibilità di avere conduzione tra metallo e semiconduttore e viceversa, è legata all'attraversamento della barriera di potenziale di altezza $q\Phi_B \simeq q\phi_i$ per effetto tunnel. Secondo la teoria di Schottky questo contatto sarebbe sicuramente raddrizzante in quanto $q\Phi_M > q\Phi_S$. L'elevato drogaggio però riduce la larghezza della barriera di potenziale consentendo un flusso di elettroni per effetto tunnel. Il problema dell'attraversamento di una barriera di potenziale è stata affrontato nel capitolo 1; se ne usano qui i risultati fondamentali.

- L'altezza della barriera è $q\Phi_B = q\Phi_M - q\chi = 0,25 \text{ eV}$;
- la larghezza della barriera può essere calcolata all'equilibrio integrando l'equazione di Poisson

$$\frac{qN_d}{2\epsilon_S} x_d^2 = \phi_i \longrightarrow x_d = \sqrt{\frac{2\epsilon_S}{qN_d} \phi_i}$$

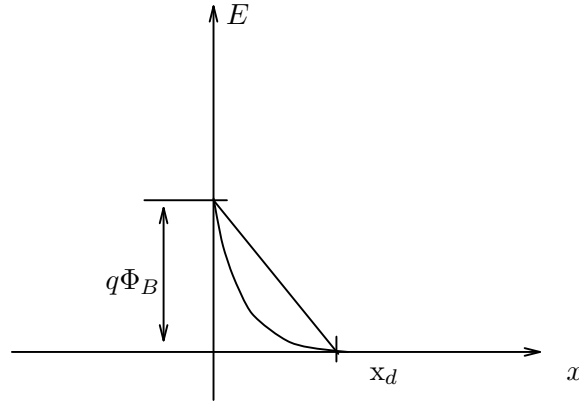


Figura 7.21: Andamento del potenziale relativo alla barriera e sua approssimazione triangolare per l'applicazione del metodo WKB.

Dato che $E_C - E_F \simeq 0$, il valore del potenziale di contatto coincide con il valore della barriera di potenziale ($q\phi_i \simeq q\Phi_B = 0,25$ eV)

$$x_d = \sqrt{\frac{2 \times 11,7 \times 8,854 \cdot 10^{-14}}{1,6 \cdot 10^{-19} \times 2,8 \cdot 10^{19}}} \times 0,25 = 34 \text{ \AA}$$

Nel caso di semiconduttore con drogaggio $N_d = 5 \cdot 10^{16}$ si sarebbe ottenuto

$$x_d = 469 \text{ \AA}$$

- La barriera può essere approssimata linearmente con una barriera triangolare e quindi si applica il metodo WKB per il calcolo della probabilità di trasmissione. La barriera di potenziale è illustrata nella figura 7.21 e può essere espressa con

$$U(x) - E_F = q\Phi_B \left(1 - \frac{x}{x_d}\right)$$

- La distribuzione degli elettroni a 300 K sia nel metallo sia nella banda di conduzione del semiconduttore (come si è visto nel calcolo del lavoro di estrazione per emissione da catodo freddo) consente di assumere che la quasi totalità della corrente è prodotta dagli elettroni con energia prossima al livello di Fermi. Per tale ragione si calcola con il metodo WKB la probabilità di trasmissione per un elettrone con energia pari ad E_F .

La probabilità di trasmissione si può valutare come

$$T(E) = \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_0^d \{2m^* (U(x) - E)\}^{\frac{1}{2}} dx \right]$$

Per $E = E_F$ è $d = x_d$ e

$$U(x) - E_F = q\Phi_B - \frac{q\Phi_B}{x_d} x = q\Phi_B \left(1 - \frac{x}{x_d}\right)$$

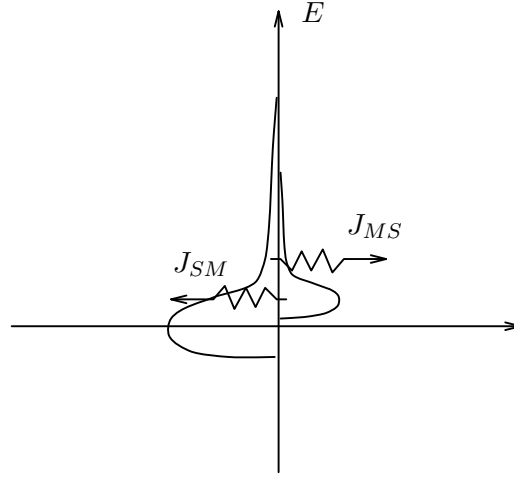


Figura 7.22: Andamento delle densità elettroniche nel metallo e nel semiconduttore in prossimità della giunzione.

allora

$$\begin{aligned}
 T(E_F) &= \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_0^{x_d} \sqrt{2m^* \left\{ q\Phi_B \left(1 - \frac{x}{x_d} \right) \right\}} dx \right] \\
 &= \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m^* q\Phi_B} \int_0^l \sqrt{\left(1 - \frac{x}{x_d} \right)} dx \right] \\
 &= \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m^* q\Phi_B} \left[-\frac{2}{3} x_d \left(1 - \frac{x}{x_d} \right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{x_d} \right] \\
 &= \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m^* q\Phi_B} \frac{2}{3} x_d \right] = \exp \left[-\frac{4}{3\hbar} \sqrt{2m^* q\Phi_B} x_d \right]
 \end{aligned}$$

Numericamente, introducendo la massa efficace dell'elettrone ($0,26 m_0$),

$$\begin{aligned}
 T(E_F) &= \exp \left[-\frac{4}{3\hbar} \sqrt{2 \times 0,26 \times 9,1 \cdot 10^{-31} \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times 0,25 \times 34 \cdot 10^{-8}} \right] \\
 T(E_F) &= 2,7 \cdot 10^{-3};
 \end{aligned}$$

La corrente che scorre nel contatto può essere calcolata, in prima approssimazione¹¹, come

$$\begin{aligned}
 I_{\text{tunnel}} &\simeq q \cdot v_x \cdot A \cdot n \cdot T(E_F) \\
 &= 1,6 \cdot 10^{-19} \times 10^6 \times 4 \cdot 10^{-8} \times 2,8 \cdot 10^{19} \times 2,7 \cdot 10^{-3} = 0,483 \text{ mA}
 \end{aligned}$$

Per confronto, i valori trovati con una concentrazione $N_d = 5 \cdot 10^{16}$ sono

$$x_d = 469 \text{ \AA} \quad ; \quad T_{E_F} = 3,698 \cdot 10^{-36} \quad ; \quad I_{\text{tunnel}} \simeq 6,6 \cdot 10^{-36} \text{ mA}$$

Anche in questo caso il contatto è raddrizzante, ma la corrente per effetto tunnel è del tutto trascurabile¹².

¹¹Si considera la corrente di elettroni dal semiconduttore verso il metallo in quanto questa, data la minor concentrazione elettronica, può rappresentare il limite all'ohmicità del contatto.

¹²In questo caso in realtà $E_C - E_F$ non è più trascurabile e in corrispondenza di E_F nel semiconduttore si ha la banda proibita.

7.4.2

Utilizzando la formula di Fowler-Nordheim¹³

$$J_{\text{tunnel}} = \frac{q^3 \mathcal{E}^2}{8\pi \hbar q \Phi_B} \exp \left[\frac{-4 (2m^*)^{1/2} q \Phi_B^{3/2}}{3 \hbar q \mathcal{E}} \right]$$

applicabile a una barriera triangolare di altezza Φ_B , si calcolino i valori di corrente nel caso proposto nell'esercizio precedente e si confrontino i risultati.

7.4.3 Resistenza di contatto

Nello definire un tracciato per la realizzazione di un diodo Schottky la lunghezza L del metallo viene scelta in modo di ridurre la resistenza serie ($1 \div 2 \mu\text{m}$), mentre la larghezza Z viene dimensionata in accordo con le esigenze del circuito.

Si consideri un diodo Schottky metallo-semiconduttore di tipo n con corrente di saturazione inversa $J_s = 10^{-14} \text{ A}/\mu\text{m}^2$ e lungo $L = 1,5 \mu\text{m}$. La resistenza serie, sempre presente in un diodo reale, deriva dal contatto, dal volume del semiconduttore n e dal fatto che la corrente non è distribuita uniformemente sotto il contatto (defocalizzazione della corrente). La resistenza sarà inversamente proporzionale alla larghezza Z del diodo: $R_s = r_s/Z$. Il suo effetto è quello di ridurre la tensione che arriva ai capi del diodo.

Si disegni, nel caso $r_s = 500 \Omega\mu\text{m}$ e al variare della larghezza Z , la tensione V_a necessaria a sostenere una corrente $I = 2 \text{ mA}$.

L'equazione del diodo è

$$J = J_s \left(e^{V_j/V_T} - 1 \right)$$

dove V_j è la tensione ai capi del contatto. Dato che parte della tensione esterna cade sulla resistenza serie r_s/Z , si ha

$$I = J_s L Z \left(e^{(V_a - I r_s/Z)/V_T} - 1 \right)$$

Esplicitando la tensione si ha

$$V_a = \frac{I r_s}{Z} + V_T \ln \left(\frac{I}{J_s L Z} \right)$$

Il risultato è riportato nella figura 7.23.

7.5 Caratteristiche statiche I-V diodi Schottky

7.5.1

La densità di corrente diretta in un diodo a barriera Schottky dipende dalla temperatura. Si determini la temperatura per cui, a una data tensione, la densità vale

¹³Tale relazione, "esatta", è stata ricavata applicando il metodo WKB a una barriera triangolare di altezza $q\Phi_B$.

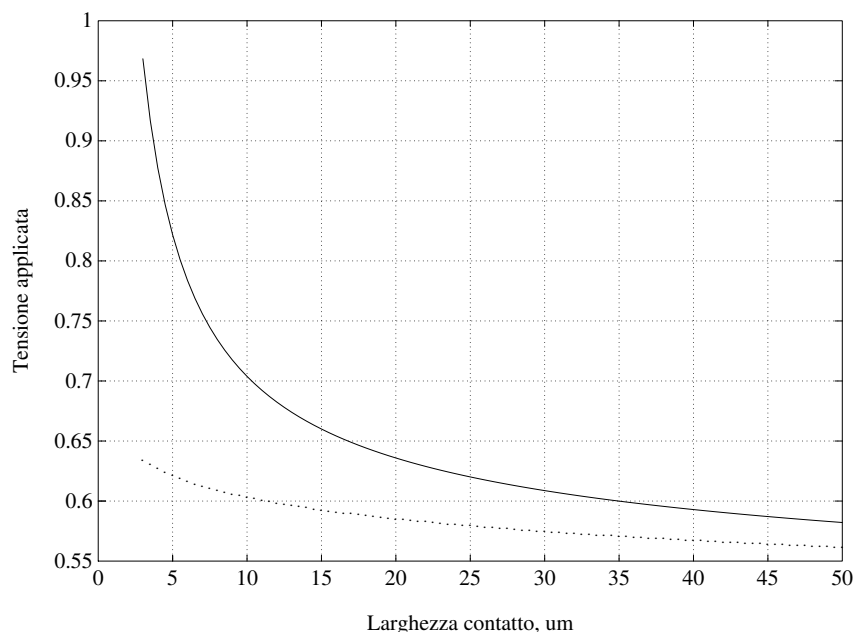


Figura 7.23: Andamento della tensione applicata che, al variare della larghezza Z del contatto, consente un flusso di corrente di 2 mA. La curva punteggiata rappresenta la tensione V_j ai capi della giunzione.

$J = 10^{-2} \text{ A/cm}^2$ e se ne tracci la caratteristica corrente-tensione. Si ricorda che la caratteristica statica di un diodo Skottky è data da

$$J = J_0 \left(e^{V_a/V_T} - 1 \right) \quad \text{dove} \quad J_0 = A_0 T^2 \exp \left(-\frac{q\Phi_M - q\chi}{kT} \right)$$

dove A_0 è la costante di Richardson. Si usino i valori $A_0 = 120 \cdot 10^4 \text{ Am}^{-2}\text{K}^{-2}$, $q\Phi_M - q\chi = 0,77 \text{ eV}$ e

$$B = \frac{qV_a}{k} = 1,7 \cdot 10^3 \text{ K}$$

Inoltre si individui il metallo con il quale è realizzato il diodo.

Considerando il diodo in polarizzazione diretta il termine esponenziale prevale sull'unità, quindi

$$J = A_0 \exp \left(-\frac{q\Phi_M - q\chi}{kT} \right) T^2 e^{B/T} = A_0 T^2 \exp \frac{B - C}{T}$$

dove $C = q(\Phi_M - \chi)/k = 7944,8 \text{ K}$. Inoltre $D = B - C = -6244,8 \text{ K}$. L'equazione nell'incognita T non è risolvibile in forma chiusa, è quindi necessario ricorrere a metodi numerici quali il metodo di Newton. La funzione di cui si cerca uno zero e la sua derivata sono

$$\begin{aligned} f(T) &= J - A_0 T^2 e^{D/T} \\ f'(T) &= A_0 (-2T + D) e^{D/T} \end{aligned}$$

PROGRAMMA FORTRAN

```

n  = 1
A0 = 120e4
D  = -6244.8276
cur = 1e2
T  = 700
1 f  = cur - A0*T**2*exp(b/T)
fp  = A0*(- 2*T+D)*exp(b/T)
dT  = - f/fp
T   = T + dT
write (59,*)n, T, f, dT
n   = n+ 1
if(abs(dT/T).lt.1.E-6) stop
if(n.ge.100) stop
go to 1
end

```

I risultati ottenuti nelle varie iterazioni sono riportati nella tabella

Iter.	Temperatura	$f(T)$	errore $(\Delta T)/T$
1	635.90448	-7.8515E+07	-64.0955
2	582.10742	-2.6364E+07	-53.7970
3	536.37341	-8.9142E+06	-45.7340
4	497.05889	-3.0321E+06	-39.3145
5	462.93185	-1.0367E+06	-34.1270
6	433.05389	-356103.590	-29.8779
7	406.70248	-122798.8120	-26.3513
8	383.32290	-42483.1875	-23.3795
9	362.50766	-14728.2549	-20.8152
10	344.01562	-5103.9677	-18.4920
11	327.86468	-1756.5256	-16.1509
12	314.54599	-589.5696	-13.3187
13	305.23257	-183.3345	-9.3134
14	300.97738	-45.5815	-4.2551
15	300.22888	-5.9966	-0.7485
16	300.20877	-0.1530	-2.012E-02
17	300.20874	-1.9735E-04	-2.598E-05

Con 17 iterazioni partendo da $T = 700$ K si trova $T = 300.20874$ con un errore relativo dell'ordine di 10^{-5} . A questa temperatura la caratteristica statica del diodo Schottky è data dall'espressione

$$J = J_0 \left(e^{V_a/V_T} - 1 \right) 3,398 \cdot 10^{-5} \left(e^{V_a/0,026} - 1 \right)$$

L'andamento è tracciato nella figura 7.24 Il lavoro di estrazione del metallo può essere calcolato, pensando che il semiconduttore sia silicio, ricordando che

$$q\Phi_M - q\chi = 0,77 \text{ eV} \longrightarrow \Phi_M = 4,05 + 0,77 = 4,83 \text{ V}$$

Tale valore del lavoro di estrazione potrebbe corrispondere al tungsteno.

7.5.2

Si consideri il sistema illustrato nella figura 7.25 nel quale

- *il contatto in A è realizzato con un metallo con funzione di lavoro $q\Phi_M = 4,5 \text{ eV}$;*

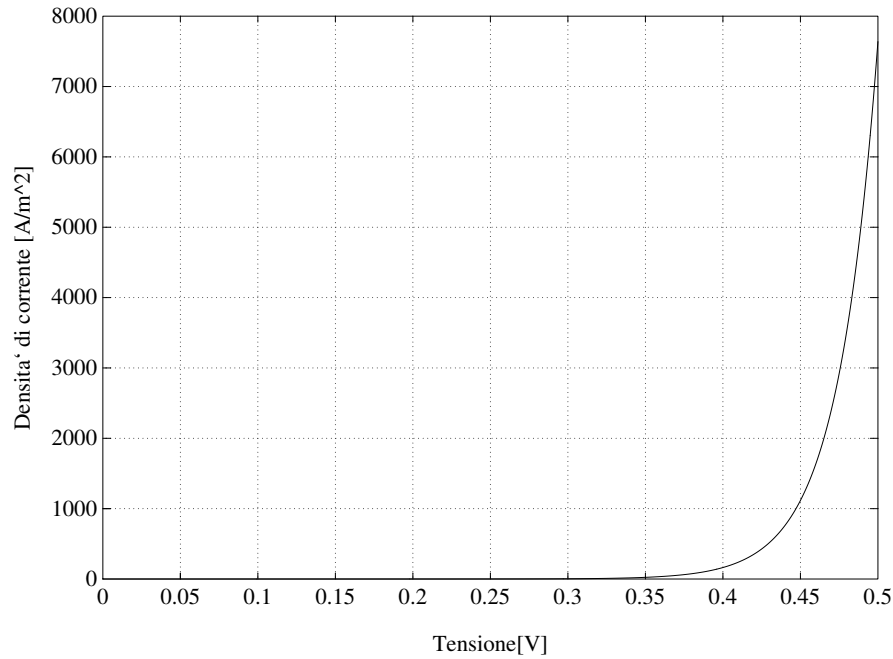


Figura 7.24: Densità di corrente a 300,21 K in funzione della tensione applicata.

- lo strato epitassiale n^- ha $N_d = 5 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$;
- l'area dello strato epitassiale racchiuso dall'ossido è $(L = 10 \text{ } \mu\text{m}) \times (W = 5 \text{ } \mu\text{m})$, il suo spessore è $X_{\text{epi}} = 2,5 \text{ } \mu\text{m}$;
- il substrato di tipo p è drogato con $N_a = 2 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$, il suo spessore è $X_{\text{sub}} = 500 \text{ } \mu\text{m}$;
- il tempo di vita delle concentrazioni in eccesso di elettroni e di lacune $\tau_n = \tau_p = 0,25 \text{ } \mu\text{s}$;
- il contatto in C non è raddrizzante¹⁴.

1. Tracciare il diagramma a bande dettagliato nella sezione $1 - 1'$.
2. Determinare il circuito elettrico "equivalente" della struttura.
3. Determinare le caratteristiche $I-V$ nelle condizioni di misura:
 - (a) al contatto C viene applicata una tensione variabile tra -5 V e $+5 \text{ V}$, il contatto B viene lasciato aperto mentre A è a massa;
 - (b) al contatto B viene applicata una tensione variabile tra -5 V e $+5 \text{ V}$, il contatto C viene lasciato aperto mentre A è a massa.

¹⁴Nella tecnologia del silicio i contatti tra silicio drogato p e alluminio realizzano *naturalmente* un contatto non raddrizzante. Infatti l'alluminio è un drogante di tipo p per il silicio e la sua deposizione sul silicio genera un sottile strato p^+ che trasforma il contatto, raddrizzante per la teoria di Schottky, in un contatto tunnel. Di ciò non si terrà conto nella soluzione del problema e si costruirà un diagramma a bande che garantisce un comportamento non raddrizzante nell'ipotesi che valga la teoria ideale di Schottky.

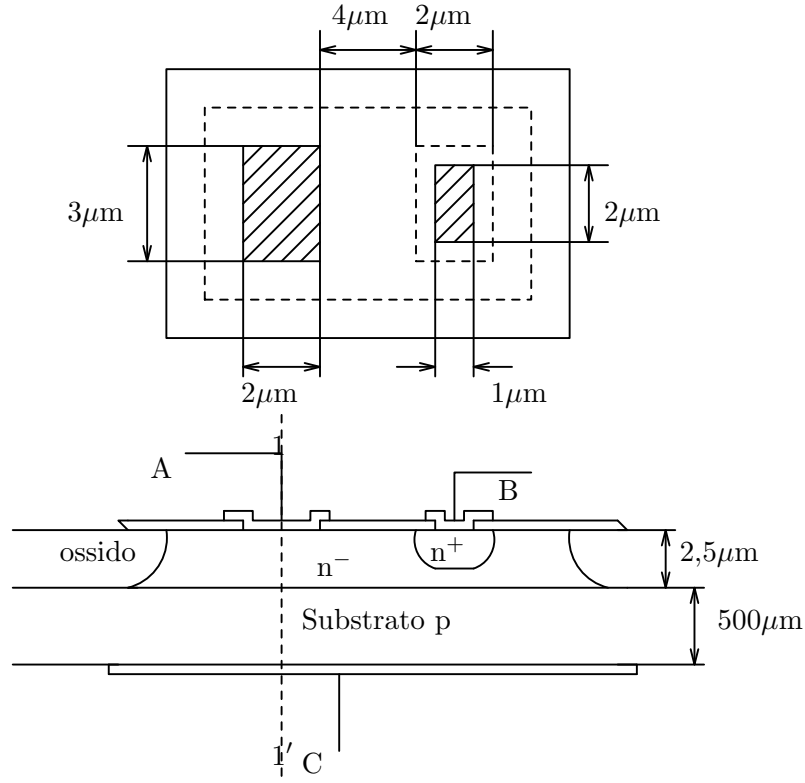


Figura 7.25: Layout e sezione della struttura integrata presa in esame.

a)

Per la valutazione delle grandezze che determinano il diagramma a bande all'equilibrio termodinamico a 300 K si ha

$$(E_F - E_i)_n = kT \ln \left(\frac{N_d}{n_i} \right) = 0,026 \times \ln \left(\frac{5 \times 10^{15}}{1,45 \cdot 10^{10}} \right) = 0,331 \text{ eV}$$

$$(E_i - E_F)_p = \frac{kT}{q} \ln \left(\frac{N_a}{n_i} \right) = 0,026 \times \ln \left(\frac{1,4 \cdot 10^{16}}{1,45 \cdot 10^{10}} \right) = 0,36 \text{ eV}$$

Per quanto riguarda la giunzione J_1 metallo semiconduttore si ha:

$$q\Phi_B(J_1) = q\Phi_M - q\chi = 4,5 - 4,05 = 0,45 \text{ eV}$$

L'ampiezza della regione di svuotamento della giunzione metallo semiconduttore può essere calcolata a partire dal potenziale di contatto

$$\phi_{i1} = q\Phi_M - q\Phi_S = 4,5 - (4,05 + 0,56 - 0,331) = 0,221 \text{ eV}$$

e quindi

$$x_{dJ_1} = \sqrt{\frac{2\varepsilon_s}{qN_d} \cdot \phi_{i1}} = \sqrt{\frac{2 \times 11,7 \times 8,854 \cdot 10^{-14}}{16 \cdot 10^{-19} \times 5 \cdot 10^{15}}} \times 0,221$$

$$= 0,756 \cdot 10^{-5} \text{ cm} = 0,0756 \mu\text{m}$$

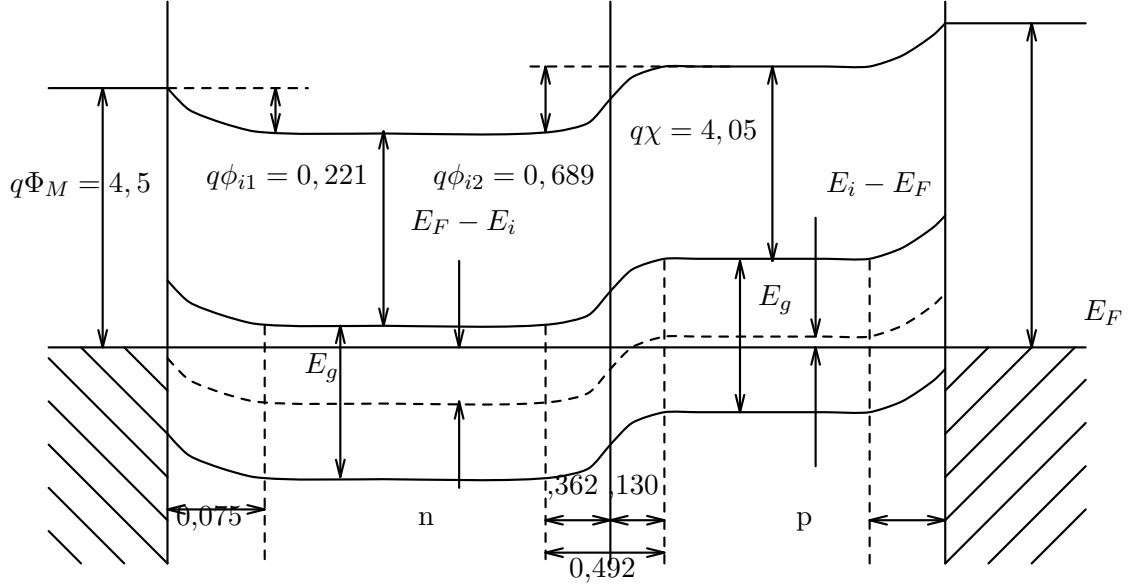


Figura 7.26: Diagramma a bande nella sezione 1 – 1'. Le lunghezze sono in μm , le energie in eV.

Considerando invece la giunzione¹⁵ J_2 di tipo n⁻p si calcola: il drogaggio equivalente

$$N_{\text{eq}}(J_2) = \frac{1}{\left(\frac{1}{N_a} + \frac{1}{N_d}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{1,4 \cdot 10^{16}} + \frac{1}{5 \cdot 10^{15}}\right)} = 3,68 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$$

il potenziale di contatto

$$\phi_{i2} = \frac{kT}{q} \cdot \ln \left(\frac{N_a \cdot N_d}{n_i^2} \right) = 0,026 \times \ln \left(\frac{1,4 \cdot 10^{16} \times 5 \cdot 10^{15}}{(1,45 \cdot 10^{10})^2} \right) = 0,689 \text{ eV}$$

l'estensione della regione svuotata

$$x_{dJ_2} = \sqrt{\frac{2\varepsilon_s}{qN_{\text{eq}}} \cdot \phi_{i2}} = \sqrt{\frac{2 \times 11,7 \times 8,854 \cdot 10^{-14}}{16 \cdot 10^{-19} \times 3,68 \cdot 10^{15}}} \times 0,689 = 0,492 \mu\text{m}$$

di cui nel lato n si ha

$$x_{dn}(J_2) = x_{dJ_2} \cdot \frac{N_a}{N_a + N_d} = 0,492 \times \frac{1,4 \cdot 10^{16}}{1,9 \cdot 10^{16}} = 0,362 \mu\text{m}$$

Il diagramma a bande risultante all'equilibrio è riportato nella figura 7.26.

b)

La giunzione in A tra platino e silicio n⁻, dato che si ha un potenziale di contatto $q\Phi_M - q\Phi_S = 0,221 \text{ eV}$ e quindi esiste all'equilibrio una zona svuotata, ha un comportamento raddrizzante. La caratteristica elettrica a 300 K è data da

$$\begin{aligned} I &= A_J \cdot J_0 \left(e^{V_a/V_T} - 1 \right) \\ I &= A_J \cdot A_0 e^{-q(\Phi_M - \chi)/kT} \left(e^{V_a/V_T} - 1 \right) \end{aligned}$$

¹⁵Per lo studio della giunzione p-n si rimanda ai capitoli successivi.

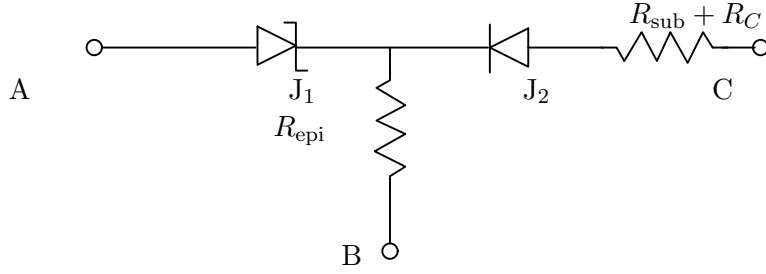


Figura 7.27: Circuito equivalente della struttura in esame.

dove A_J è l'area della giunzione che, assumendo una emissione completamente focalizzata, vale $6 \mu\text{m}^2$,

$$\begin{aligned} I &= 6 \cdot 10^{-8} \times 120 e^{-(4,5-4,05)/0,026} \left(e^{V_a/0,026} - 1 \right) \\ &= 2,185 \cdot 10^{-10} \left(e^{V_a/0,026} - 1 \right) \text{ mA} \end{aligned}$$

Lo strato n^- è anche il catodo di una giunzione in cui il lato p è lo strato epitassiale. L'area di questa giunzione è quella dello strato epitassiale compreso nella trincea di ossido: $10\mu\text{m} \times 5\mu\text{m}$. I valori delle concentrazioni di drogaggio determinano la mobilità degli elettroni dello strato epitassiale, $\mu_n = 1260 \text{ cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$, e delle lacune nel substrato, $\mu_p = 315 \text{ cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$, cui corrispondono, in base alla relazione di Einstein, le diffusività, $D_n = 32,76 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$ e $D_p = 8,19 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$ e le lunghezze di diffusione per le concentrazioni in eccesso, $L_n = 28,35 \mu\text{m}$ e $L_p = 14,31 \mu\text{m}$. Dal capitolo 8 sulle giunzioni p-n si trova l'espressione della corrente¹⁶

$$I = A_J \cdot I_0 \left(e^{V_a/V_T} - 1 \right) \quad \text{dove} \quad J_0 = qn_i^2 \left(\frac{D_n}{L_n N_a} + \frac{D_p}{L_p N_d} \right)$$

per cui, nel caso in esame

$$I = qn_i^2 A_J \left(\frac{D_n}{L_n N_a} + \frac{D_p}{L_p N_d} \right) \left(e^{V_a/kT} - 1 \right) = 3,29 \cdot 10^{-15} \left(e^{V_a/0,026} - 1 \right) \text{ mA}$$

Nel circuito equivalente devono essere rappresentati anche i fenomeni resistivi. Mentre le resistenze di contatto dei due contatti non raddrizzanti in B e in C possono essere considerate nulle, al contrario non si possono trascurare le resistenze del corpo della regione n^- epitassiale (R_{epi}) e della regione p di substrato (R_{sub}), incontrate dai flussi di corrente per giungere nella sezione 1-1'. In particolare per la resistenza epitassiale

$$\begin{aligned} R_{\text{epi}} &= (q\mu_n N_d)^{-1} L / (W X_{\text{epi}}) \\ &= (1,6 \cdot 10^{-19} \times 1260 \times 5 \cdot 10^{15})^{-1} \cdot 4 \cdot 10^{-4} / (3 \cdot 10^{-4} \times 2,5 \cdot 10^{-4}) = 5294 \Omega \end{aligned}$$

e per la resistenza di substrato

$$\begin{aligned} R_{\text{sub}} &= (q\mu_p N_a)^{-1} X_{\text{sub}} / (WL) \\ &= (1,6 \cdot 10^{-19} \times 315 \times 2 \cdot 10^{16})^{-1} \cdot 500 \cdot 10^{-4} / (5 \cdot 10^{-4} \cdot 10 \cdot 10^{-4}) = 99,2 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

Il circuito equivalente è riportato nella figura 7.27.

c) *Prima situazione di misura.*

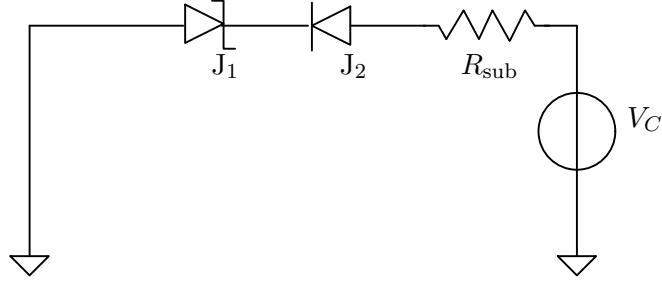


Figura 7.28: Circuito equivalente nella prima configurazione di misura.

Nella situazione in cui al contatto C viene applicata una tensione variabile V_C tra -5 V e $+5$ V e il contatto B viene lasciato aperto mentre A è a massa, il circuito equivalente diventa quello della figura 7.28

Il diagramma tensione corrente può essere costruito notando che, se $V_C > 0$, la giunzione J_2 tende a essere in conduzione diretta; in realtà la tensione V_a ai suoi capi non può crescere oltre il valore corrispondente alla corrente inversa di J_1 , quindi:

$$I_{0(J_1)} = I_{0(J_2)} (e^{V_a/V_T} - 1)$$

$$V_a = V_T \ln \left(\frac{I_{0(J_1)} + I_{0(J_2)}}{I_{0(J_2)}} \right) = 0,288 \text{ V}$$

Oltre a questo valore la tensione in eccesso si localizza, come tensione inversa, sulla giunzione J_1 mantenendo la corrente costante pari a $I_{0(J_1)}$ fino a quando l'estensione della regione svuotata non diventi tale da svuotare completamente la regione n^- . Per questo valore di tensione la corrente, che era limitata alla corrente inversa della giunzione metallo semiconduttore, aumenta rapidamente, in quanto le due barriere di potenziale entrando in contatto tendono ad annullarsi tra di loro¹⁷. S'innesca cioè il meccanismo di "perforazione diretta", cui corrisponde un intenso flusso di portatori (elettroni dal metallo al semiconduttore di tipo p). Il valore della tensione V_C che porta al completo svuotamento può essere calcolato assumendo che sia trascurabile la regione svuotata $x_{dn}(J_2)$ della giunzione¹⁸ n^- -p e quindi considerando solo l'estensione della regione svuotata della barriera Schottky.

Dalle relazioni

$$x_d = \sqrt{\frac{2\varepsilon_s}{qN_d}(\phi_i - V_a)} \quad ; \quad \mathcal{E}_{\max} = \frac{qN_d}{\varepsilon_s} x_d \quad ; \quad \phi_i - V_a = +\frac{1}{2}\mathcal{E}_{\max}x_d(V_a)$$

Lo svuotamento completo si ha quando $x_{dJ_1} \simeq 2,5 \mu\text{m}$, per cui risulta immediato valutare il campo massimo e la tensione inversa sulla giunzione nella condizione limite

$$\mathcal{E}_{\max} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \times 5 \cdot 10^{15}}{11,7 \times 8,85 \cdot 10^{-14}} \times 2,5 \cdot 10^{-4} = 1,93 \cdot 10^5 \text{ V cm}^{-1}$$

$$\phi_i - V_a = +\frac{1}{2}\mathcal{E}_{\max} \cdot x_d \rightarrow V_a = \phi_i - \frac{1}{2}\mathcal{E}_{\max} \cdot x_d$$

$$V_a(J_1) = 0,221 \text{ V} - 24,14 \text{ V} = -23,919 \text{ V}$$

¹⁶Sarebbe più corretto considerare il diodo corto e quindi sostituire alle lunghezze di diffusione le lunghezze fisiche dei due lati della giunzione.

¹⁷Si faccia riferimento alla figura 7.26 pensando che la zona neutra n^- scompaia.

¹⁸All'equilibrio termodinamico la larghezza della regione di svuotamento nella giunzione è $0,362 \mu\text{m}$. Quando si polarizza inversamente il contatto J_1 , la giunzione J_2 è polarizzata direttamente (se pur di poco dato che la corrente resta limitata) e quindi la regione di svuotamento nel lato n di J_2 si riduce ulteriormente.

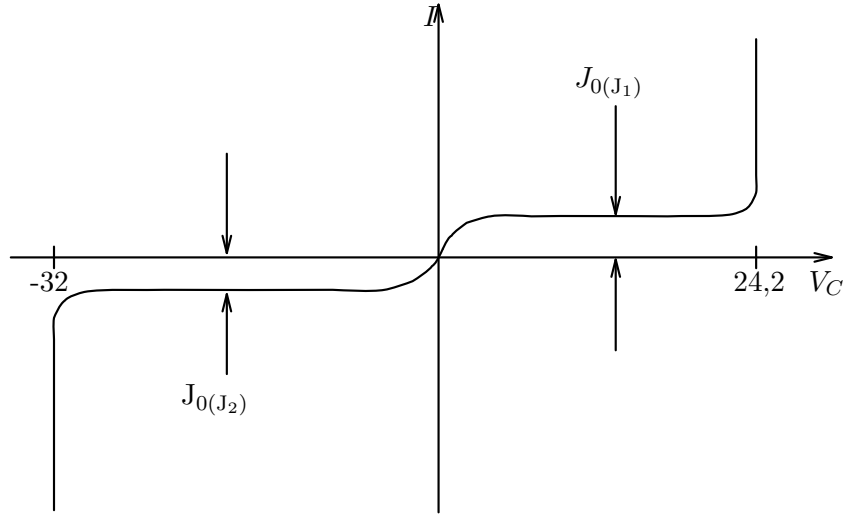


Figura 7.29: Andamento corrente-tensione nella prima configurazione di misura. $J_{0(J_2)} = qn_i^2 A_J (D_n/L_n N_a + D_p/L_p N_d)$ e $J_{0(J_1)} = A_J A_0 \exp(-q(\Phi_M - \chi)/kT)$.

La tensione esterna che indurrà il completo svuotamento sarà

$$\begin{aligned} V_C &= -V_a(J_1) + V_a(J_2) \\ V_C &= 23,919 \text{ V} + 0,288 \text{ V} = 24,207 \text{ V} \end{aligned}$$

Se si considera poi il caso in cui si applica al contatto C una tensione negativa si osserva che la giunzione J_1 tende a essere polarizzata direttamente, ma ora la giunzione J_2 si polarizza inversamente limitando la corrente complessiva al valore di saturazione inversa $I_{0(J_2)}$. Quindi oltre alla tensione

$$V_a = V_T \ln \left(\frac{I_{0J_2} + I_{0J_1}}{I_{0J_1}} \right) = 0,39 \mu\text{V}$$

la tensione si localizza come tensione inversa sulla giunzione J_2 . Come nel caso delle tensioni applicate positive, la corrente rimarrà limitata sin tanto che lo strato n^- non risulti completamente svuotato, a questo punto s'innesca un meccanismo di "perforazione diretta". Trascurando la regione svuotata relativa alla giunzione J_1 si può calcolare la tensione alla quale lo strato risulta completamente svuotato

$$\begin{aligned} V_C &= V_a(J_1) - V_a(J_2) \simeq -V_a(J_2) \\ V_C &\simeq \phi_{i2} - \frac{qx_d^2 N_d}{2\epsilon_S N_a} (N_a + N_d) \simeq -32,04\text{V} \end{aligned}$$

Seconda situazione di misura.

Nella seconda situazione di misura al contatto B viene applicata una tensione variabile tra -5 V e $+5 \text{ V}$, il contatto C viene lasciato aperto mentre A è a massa. Il circuito equivalente della seconda configurazione di misura è illustrato nella figura 7.30 In questo caso la caratteristica $I - V$ è essenzialmente quella relativa alla giunzione J_1 (metallo semiconduttore) con in serie la resistenza R_{epi} .

7.5.3 Capacità di giunzione

7.5.4

Si realizzi un oscillatore costituito da un circuito LC nel quale la capacità è realizzata con un diodo Schottky polarizzato inversamente. Ricordando che la frequenza di

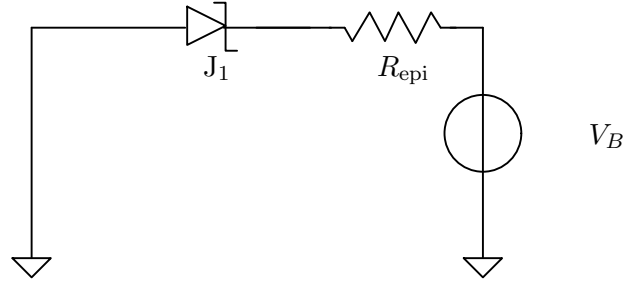


Figura 7.30: Circuito equivalente della seconda configurazione di misura.

oscillazione è data da

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

si determinino, nel caso in cui $L = 100 \mu\text{H}$ e $T = 300\text{K}$,

- l'espressione della capacità differenziale del contatto;
- la frequenza di oscillazione per una barriera Schottky ideale tra platino ($q\Phi_M = 5,3 \text{ eV}$) e silicio drogato uniformemente con $N_d = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ con polarizzazione nulla (l'area del diodo è 10^{-5} cm^2);
- il valore di polarizzazione per cui la frequenza di oscillazione risulta accresciuta del 50 % rispetto al suo valore a polarizzazione nulla.

a)

La capacità differenziale in una giunzione metallo semiconduttore è legata alla variazione della carica di svuotamento in funzione della tensione applicata.

$$C = \frac{dQ_S(V_a)}{dV_a}$$

Per determinare la dipendenza funzionale di Q_S dalla tensione

$$Q_S = qAN_dx_d$$

si integra l'equazione di Gauss e si ha il campo elettrico

$$\mathcal{E}(x) = \int_{x_d}^x \frac{qN_d}{\epsilon_S} dx + \mathcal{E}(x_d) = \frac{qN_d}{\epsilon_S}(x - x_d) + 0$$

una nuova integrazione produce il potenziale

$$\Phi(x) = \int_0^x \frac{qN_d}{\epsilon_S}(x_d - x)dx + \Phi(0) = \frac{qN_d}{\epsilon_S}x_dx - \frac{qN_d}{2\epsilon_S}x^2$$

La tensione totale che cade nella regione svuotata nel lato semiconduttore del contatto $\Phi(x_d)$, all'equilibrio termodinamico, è il potenziale di contatto ϕ_i

$$\Phi(x_d) = \frac{qN_dx_d^2}{2\epsilon_s} \quad ; \quad \phi_i = \frac{1}{2} \frac{q}{\epsilon_s} N_dx_d^2 \quad (7.2)$$

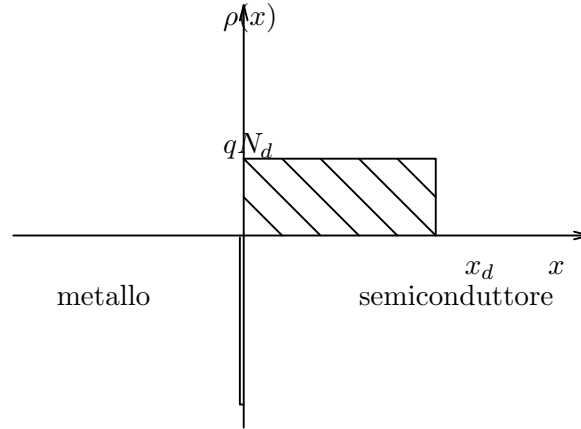


Figura 7.31: Carica elettrica nella regione di svuotamento.

con una tensione applicata V_a , la caduta di potenziale sulla regione svuotata vale invece $(\phi_i - V_a)$, pertanto il legame $x_d(V_a)$ diventa

$$x_d = \sqrt{\frac{2\epsilon_s}{qN_d}(\phi_i - V_a)} \quad (7.3)$$

e la carica

$$Q_S(V_a) = A\sqrt{2qN_d\epsilon_s(\phi_i - V_a)}$$

Si ottiene allora l'espressione della capacità differenziale

$$C = \left| \frac{dQ_S}{dV_a} \right| = \frac{1}{2}A \frac{2qN_d\epsilon_s}{\sqrt{2qN_d\epsilon_s(\phi_i - V_a)}} = A\sqrt{\frac{qN_d\epsilon_s}{2(\phi_i - V_a)}} \quad (7.4)$$

b)

Dato che $q\phi_i = q\Phi_M - q\Phi_S$ e $q\Phi_M = 5,3 \text{ eV}$, occorre determinare $q\Phi_S = q\chi + (E_C - E_F)$

$$\begin{aligned} E_C - E_F &= kT \ln \frac{N_C}{N_d} = 0,026 \ln \left(\frac{2,8 \cdot 10^{19}}{10^{16}} \right) = 0,206 \text{ eV} \\ q\Phi_S &= 4,05 + 0,205 = 4,255 \text{ eV} \\ q\phi_i &= 5,3 - 4,255 = 1,045 \text{ eV} \end{aligned}$$

La capacità viene scritta nella forma

$$\begin{aligned} C &= \frac{K'}{\sqrt{\phi_i - V_a}} \\ K' &= A\sqrt{\frac{q\epsilon_s N_d}{2}} = 0,88 \cdot 10^{-13} \text{ F} \\ C(V_a = 0) &= \frac{2,88 \cdot 10^{-13}}{\sqrt{1,045}} = 0,282 \text{ pF} \end{aligned}$$

a questa capacità corrisponde una frequenza di risonanza

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}} = 29,66 \text{ MHz}$$

c)

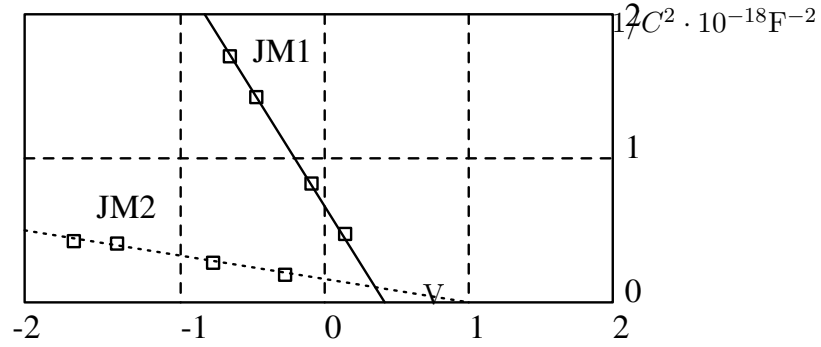


Figura 7.32: Andamento delle curve $1/C^2$ per due giunzioni metallo semiconduttore.

Se $f_1 = 1,5f_0$ la nuova capacità dovrà soddisfare la relazione

$$\frac{C(V_a)}{C(0)} = 0,44$$

per cui

$$V_a = \phi_i \left(1 - \frac{1}{0,44^2} \right) = -4,25 \text{ V}$$

7.6 Caratterizzazione giunzione metallo semiconduttore con misure $C(V)$

7.6.1

Si studino due giunzioni metallo-semiconduttore realizzate con due metalli aventi lavoro di estrazione differente, e due semiconduttori con resistività rispettivamente di $1 \Omega\text{cm}$ e $5 \Omega\text{cm}$, di cui si conoscono le curve $1/C^2$ (fig. 7.32). In particolare si determinino i potenziali di contatto, il tipo di semiconduttore, a quali diodi si riferiscono i due drogaggi e i lavori di estrazione dei metalli.

In una giunzione metallo semiconduttore in cui valga l'ipotesi di totale svuotamento è

$$C = \left| \frac{dQ_s}{dV_a} \right| = \frac{1}{2} A \frac{2qN_d\epsilon_s}{\sqrt{2qN_d\epsilon_s(\phi_i - V_a)}} = A \sqrt{\frac{qN_d\epsilon_s}{2(\phi_i - V_a)}}$$

e quindi

$$\frac{1}{C^2} = \frac{2(\phi_i - V_a)}{qA^2N_d\epsilon_s}$$

Le curve $1/C^2$ intercettano l'asse delle tensioni in $V_a = \phi_i$; dalla figura 7.32

$$\begin{cases} \Phi_{i1} \simeq 0,4 \text{ V} \\ \Phi_{i2} \simeq 1 \text{ V} \end{cases}$$

Risulta evidente che si tratta di semiconduttori di tipo n in quanto al crescere della tensione V_{MS} cresce C, ovvero si riduce l'ampiezza della regione svuotata, indicando

una situazione di crescente polarizzazione diretta. Dato che ci si trova in presenza di semiconduttori di tipo n nei due casi si ha

$$\begin{aligned} q\Phi_{i_1} &= q\Phi_{M_1} - q\chi - (E_C - E_F)_1 \\ q\Phi_{i_2} &= q\Phi_{M_2} - q\chi - (E_C - E_F)_2 \end{aligned}$$

L'influenza su Φ_i di Φ_M e di $(E_C - E_F)$ è di segno opposto, pertanto non si sa a priori se a potenziali di contatto maggiori corrispondano lavori di estrazione del metallo maggiori o minori. Se si esamina l'influenza di $(E_C - E_F)_1$ e di $(E_C - E_F)_2$ si osserva che è trascurabile. Infatti, dato che in prima approssimazione è $N_{D1\Omega} \simeq 5N_{D5\Omega}$, si ha

$$\begin{aligned} (E_C - E_F)_{5\Omega} - (E_C - E_F)_{1\Omega} &= kT \ln \left(\frac{N_C}{N_{D5\Omega}} \right) - kT \ln \left(\frac{N_C}{5N_{D5\Omega}} \right) \\ &= kT \ln 5 = 0,042 \text{ eV} \end{aligned}$$

Per cui risulta $q\Phi_{M_1} < q\Phi_{M_2}$.

Per quanto riguarda le concentrazioni di drogaggio si possono evidenziare (usando frecce per indicare variazioni di crescita o diminuzione) le relazioni di massima

N_d	x_d	C	$1/C^2$	ρ
↑	↓	↑	↓	1 Ωcm
↓	↑	↓	↑	5 Ωcm

I valori delle concentrazioni di drogaggio si desumono dalle pendenze delle rette della figura 7.32, in quanto il coefficiente angolare delle curve $1/C^2$ vale

$$a = -\frac{2}{qA^2N_d\epsilon_S}$$

Ricapitolando si ha che il contatto JM1 è tra il metallo con lavoro di estrazione $q\Phi_{M_1}$ minore e il semiconduttore con resistività 5 Ωcm, mentre JM2 ha $q\Phi_{M_2}$ maggiore e il semiconduttore con 1 Ωcm.

Per valutare i lavori di estrazione dei due metalli si usano le espressioni

$$\begin{aligned} q\Phi_{M_1} &= q\chi + kT \left(\ln \frac{N_C}{N_{D5\Omega}} \right) + q\Phi_{i_1} \\ q\Phi_{M_2} &= q\chi + kT \ln \left(\frac{N_C}{5N_{D5\Omega}} \right) + q\Phi_{i_2} \end{aligned}$$

7.6.2 Rivelatori di profilo

Applicato un contatto metallico a un semiconduttore di tipo n si misurano le capacità differenziali in funzione della tensione applicata.

a) In un caso si trova la curva della figura 7.33, b) nel secondo quella della figura 7.34. Si determinino i due profili di drogaggio e si indichi quale può essere stato il processo tecnologico che li ha generati.

Nel caso di drogaggio non uniforme $N_d = N(x)$ si fanno misure di capacità differenziale al variare della tensione applicata. Nelle figure 7.33 e 7.34 sono riportate in funzione di V le capacità per unità di area C/A . Per ogni valore di tensione la regione di carica spaziale si estende sino alla profondità x_d fornita dalla relazione

$$C/A = \frac{\epsilon_s}{x_d} \quad (7.5)$$

Figura 7.33: Capacità differenziale in funzione della tensione applicata. Campione 1.

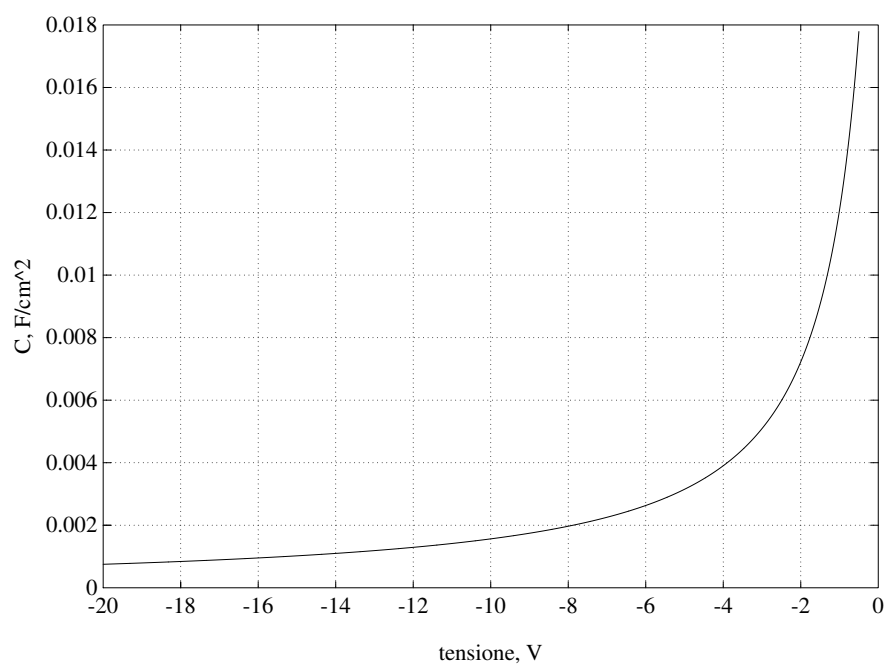
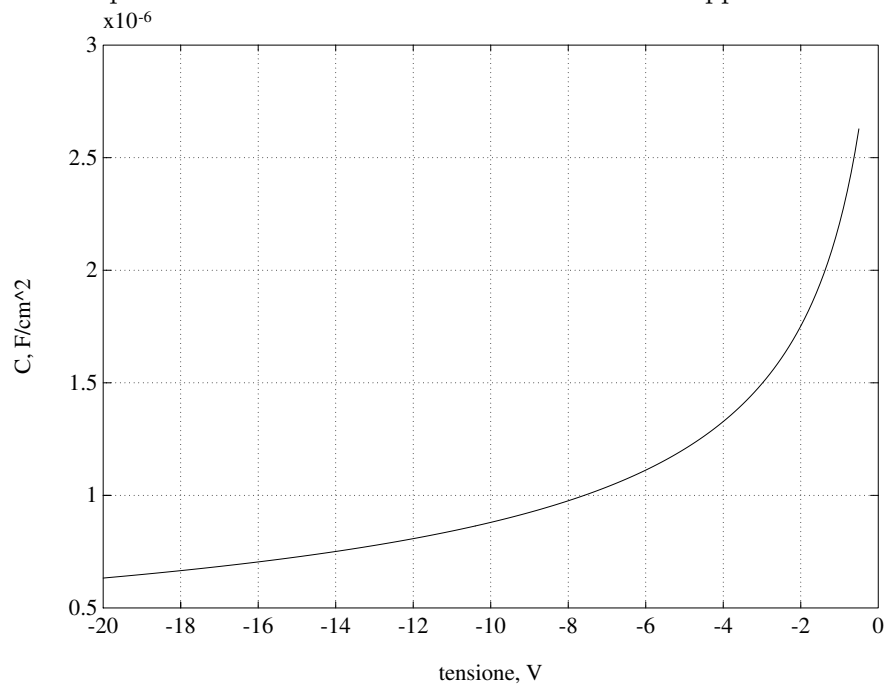


Figura 7.34: Capacità differenziale in funzione della tensione applicata. Campione 2.

Tra la concentrazione di drogaggio in x_d e la capacità per unità di area vale la relazione.

$$N(x_d) = \frac{-2}{q\epsilon_s \frac{d(1/(C/A)^2)}{dV}} \quad (7.6)$$

Evidentemente il primo campione ha un drogaggio uniforme (fig. 7.35), quindi può essere uno strato ottenuto per crescita epitassiale; il secondo (fig. 7.36) potrebbe essere la coda di una gaussiana di un processo di diffusione.

7.7 Caratteristiche dinamiche diodo Schottky

7.7.1

Si consideri la struttura nella figura 7.37 costituita da un transistor Schottky: ovvero un transistor nel quale la metallizzazione del contatto di base viene allargata in modo da coprire parzialmente anche il collettore.

1. *Si determini il circuito equivalente della giunzione base collettore;*
2. *si spieghi come la presenza della giunzione metallo-semiconduttore modifichi la tensione di accensione della giunzione tra base e collettore;*
3. *si mettano in evidenza le conseguenze sui tempi di commutazione rispetto ad un transistor convenzionale.*

L'estensione della metallizzazione del contatto di base ha come conseguenza la creazione di una giunzione metallo semiconduttore tra base e collettore. Considerando il transistor bipolare come l'insieme di due giunzioni p-n, è possibile costruire un circuito equivalente di prima approssimazione nel quale tra base e collettore si hanno due diodi in parallelo: una giunzione p-n che corrisponde a quella naturale del transistor e un contatto metallo-semiconduttore. La tensione di accensione (tensione di soglia) di un contatto metallo-semiconduttore è più bassa di quella corrispondente di una giunzione p-n di circa 200-300 mV. Ciò ha come conseguenza che la giunzione p-n non andrà mai in conduzione diretta, in quanto si accenderà sempre prima il diodo Schottky nel quale fluirà tutta la corrente tra base e collettore. In tal modo il transistor bipolare non arriva mai in saturazione e la quantità di carica accumulata nella base risulta limitata, con il vantaggio di ridurre il ritardo a essa connesso e di aumentare la velocità di commutazione. La corrente in un diodo Schottky è una corrente di portatori maggioritari, quindi non si hanno fenomeni di diffusione e di accumulo di portatori minoritari, come avviene nelle giunzioni p-n; pertanto l'unico elemento che interviene a limitare la velocità di commutazione è legato alla capacità di svuotamento, che comunque risulta inferiore a quella della giunzione p-n.

A verifica di quanto detto si simula con SPICE prima una giunzione p-n sola pilotata con un'onda quadra (commutazione di natura digitale ON-OFF) e in un secondo tempo mettendo in parallelo a essa un diodo Schottky. SPICE non possiede internamente un modello di diodi a barriera Schottky, ma si possono ottenere ottimi risultati con il modello di un diodo a giunzione fissando opportunamente i parametri. In particolare la corrente inversa di saturazione viene fissata a un valore più alto di quello corrispondente a una giunzione p-n, mentre il tempo di transito, dato che la corrente è di portatori maggioritari, viene considerato zero, annullando in tal modo gli effetti della capacità di diffusione (si veda il paragrafo ??).

Il modello SPICE utilizzato per descrivere un diodo Schottky è

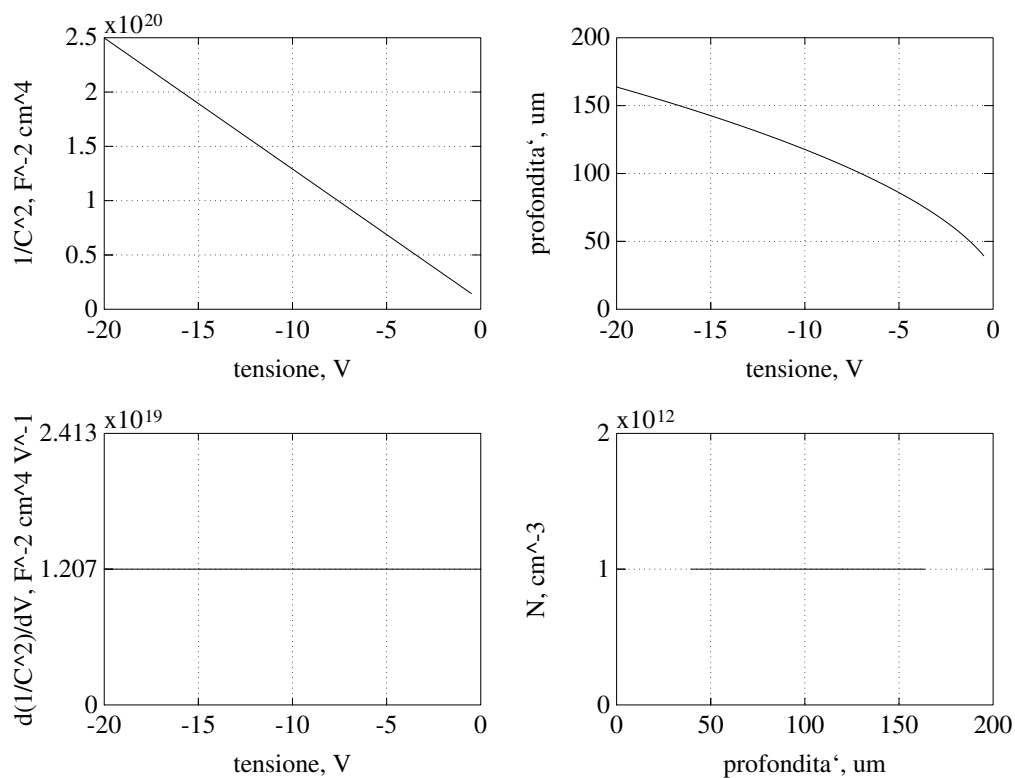


Figura 7.35: Profilo di drogaggio a partire dalla curva $1/C^2$.

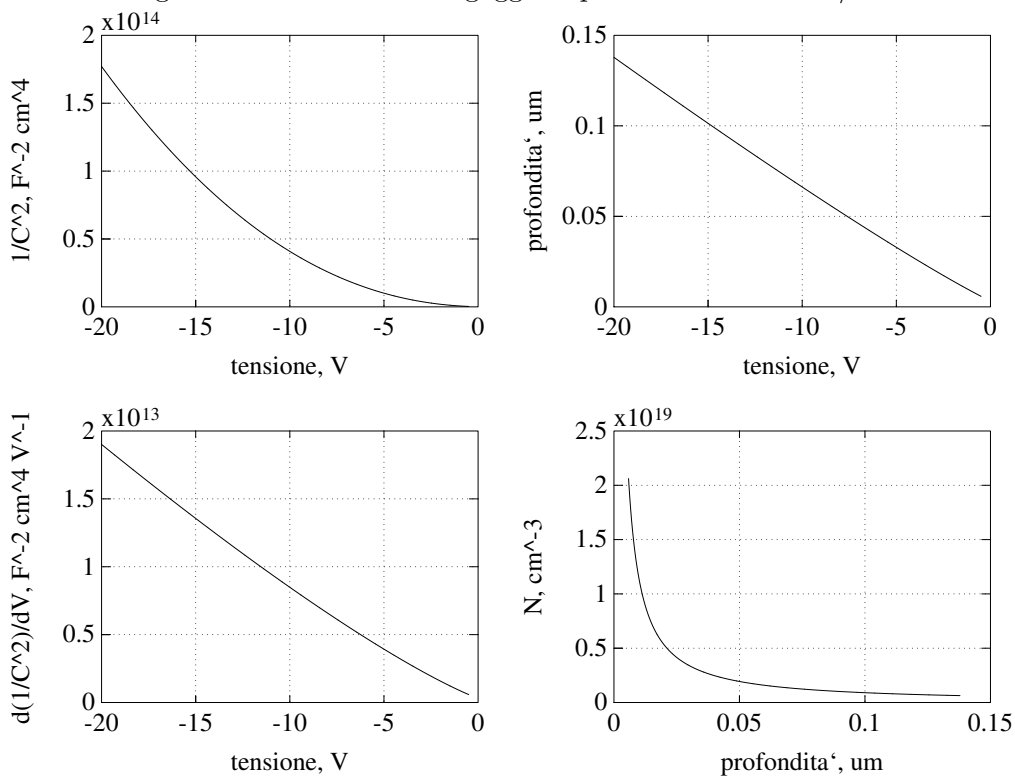


Figura 7.36: Profilo di drogaggio a partire dalla curva $1/C^2$.

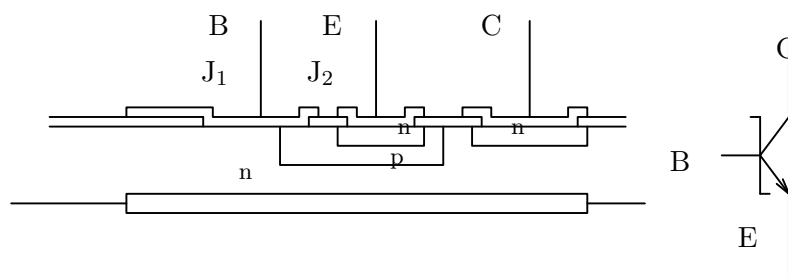


Figura 7.37: Sezione e simbolo di un transistor Schottky.

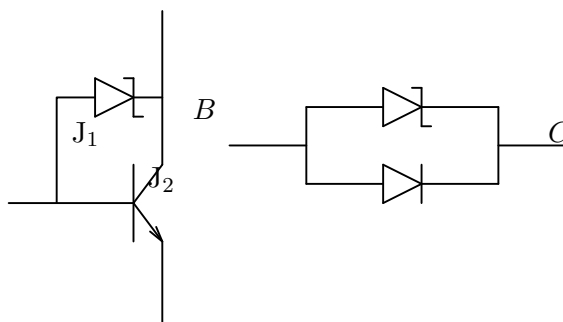


Figura 7.38: Circuito equivalente semplificato della giunzione base collettore.

.MODEL DBSD D(IS=190p Rs=0.1 CJ0=890f Tt=0n N=1 M=0.5 Eg=0.65)

Nelle figura 7.39 è illustrata la tensione ai capi del diodo ottenuta simulando una giunzione p-n ¹⁹, nella figura 7.40 il risultato si riferisce invece al caso in cui alla giunzione sia posto in parallelo un diodo Schottky; si può osservare come la presenza di un diodo Schottky riduca il ritardo al solo contributo della capacità di svuotamento.

7.8 Transistore a effetto di campo metallo-semiconduttore, MESFET

Il transistor a effetto di campo (FET) è sostanzialmente un resistore costituito da un materiale conduttore (semiconduttore drogato) posto tra due contatti metallici, uno agisce come sorgente (*source*) l'altro come collettore (*drain*); la sua resistenza viene controllata in tensione, infatti una tensione applicata a un elettrodo di controllo (*gate*) modifica l'estensione di una regione svuotata di cariche che riduce l'area della sezione attraversata dalla corrente che fluisce tra i due contatti metallici.

I FET sono dispositivi unipolari, dato che la corrente è solo di portatori maggioritari, quindi non presentano effetti parassiti legati a fenomeni di immagazzinamento di portatori minoritari: i FET hanno velocità di commutazione e frequenze di taglio più elevate di quelle dei transistori bipolari.

Il MESFET (MEtal Semiconductor Field Effect Transistor) per controllare il flusso di cariche nel canale impiega la regione di svuotamento di un contatto raddrizzante metallo-semiconduttore: si varia la polarizzazione inversa sul contatto per modulare l'area della sezione trasversale disponibile per il flusso della corrente; nei JFET (capitolo 9) si usa invece quella di una giunzione p-n.

¹⁹Per un chiarimento sul transitorio di spegnimento del diodo si veda il problema ??.

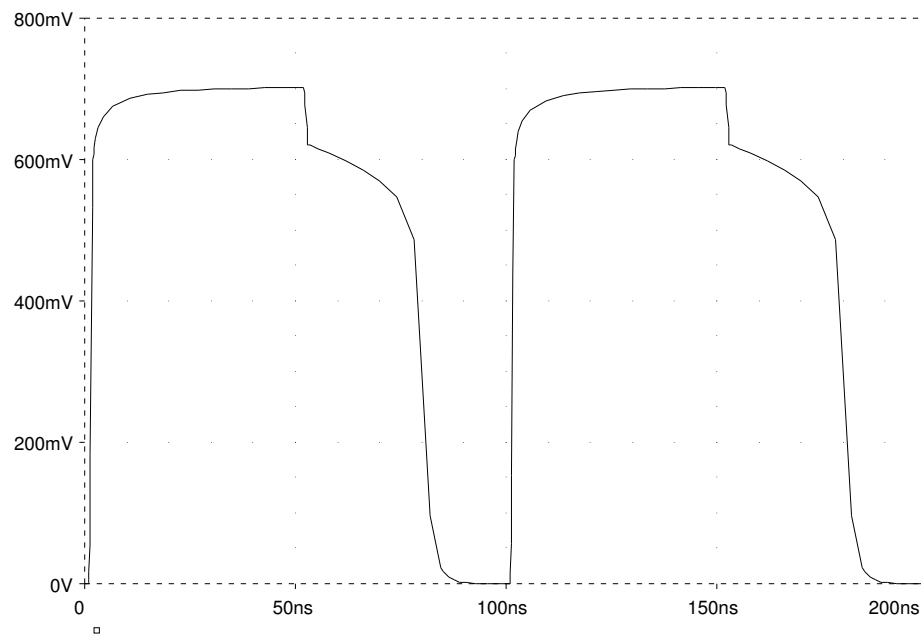


Figura 7.39: Commutazione di una giunzione p-n: tensione ai capi del diodo in funzione del tempo.

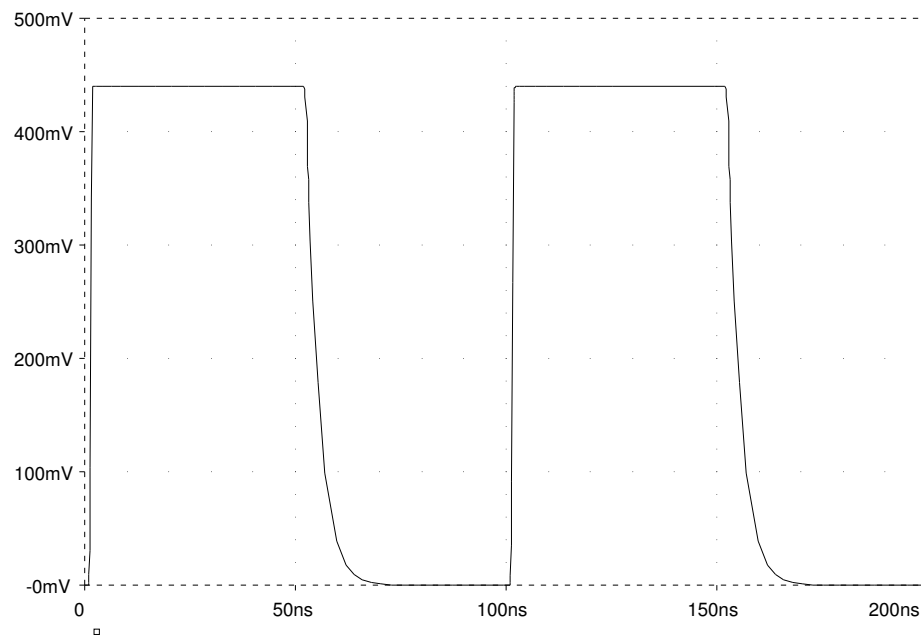


Figura 7.40: Commutazione di una giunzione p-n con in parallelo un diodo Schottky: tensione ai capi dei diodi in funzione del tempo.

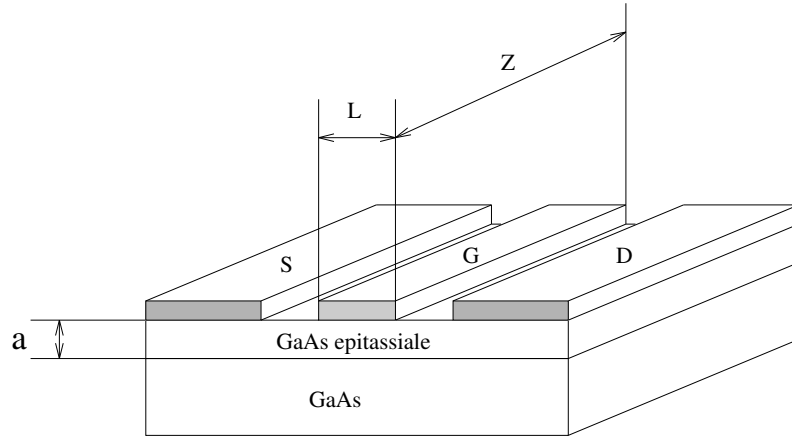


Figura 7.41: a) Sezione trasversale di un MESFET a doppia eterogiunzione.

I MESFET offrono numerose caratteristiche attraenti per l'impiego nei circuiti integrati ad alta velocità, dato che possono essere realizzati con semiconduttori (semiconduttori composti dei gruppi III-V, quali l'arseniuro di gallio e il fosforo di indio) nei quali sono elevate sia la mobilità degli elettroni, fatto che consente di minimizzare le resistenze serie, sia la velocità di saturazione, che permette di aumentare la frequenza di taglio. I MESFET reali sono costruiti usando strati epitassiali su substrati semiisolanti (per esempio GaAs intrinseco) per minimizzare le capacità parassite.

Le dimensioni fondamentali del dispositivo sono quelle del canale: la lunghezza L , la larghezza Z e l'altezza a . Nelle rappresentazioni la sorgente è usualmente a massa e le tensioni V_G del gate e V_D del collettore sono misurate rispetto alla sorgente.

MESFET a canale normalmente aperto (ON)

Il dispositivo a canale normalmente aperto (o a svuotamento), è un dispositivo che a riposo ($V_{GS} = 0$) presenta un canale conduttore. Per tensioni inverse sul gate²⁰, in ogni sezione longitudinale x del dispositivo l'area della sezione trasversale aperta al flusso della corrente è pari a $A = Z[a - w(x)]$, dove $w(x)$ è la larghezza della regione di svuotamento del lato semiconduttore del contatto. L'estensione w della regione svuotata dipende dalle tensioni ai suoi capi: dal lato del metallo la tensione V_{GS} , da quello del semiconduttore la tensione nel punto x che è parte della tensione applicata ai capi dell'intero canale, V_{DS} . Al crescere della polarizzazione inversa sul gate il canale tende a chiudersi. In conclusione $w(x)$ è una funzione di V_{DS} e di V_{GS} , parimenti lo sarà la resistenza del canale e quindi la corrente.

Per correnti I_D di piccola intensità, la larghezza della regione di svuotamento è approssimativamente costante, $w(x) \simeq w$, quindi

$$I_D = G V_{DS} \quad \text{dove} \quad G = \sigma \frac{A}{L} = \frac{q\mu_n N_d Z(a - w)}{L}$$

La corrente varia linearmente con la tensione di collettore. Il legame tra w e la tensione dipende dal profilo di drogaggio; nel caso di un profilo di drogaggio costante di donatori nel semiconduttore

$$w = \sqrt{\frac{2\varepsilon_s}{qN_d} (\phi_i - V_{GS})}$$

allora

$$I_D = G_0 \left\{ 1 - \sqrt{\frac{2\varepsilon_s}{qN_d a^2} (\phi_i - V_{GS})} \right\} V_{DS} \quad (7.7)$$

²⁰Si usano quasi esclusivamente canali di tipo n, pertanto la polarizzazione inversa comporta $V_{GS} < 0$.

dove G_0 è la conduttanza a canale aperto

$$G_0 = q\mu_n N_d \frac{Za}{L} \quad (7.8)$$

La tensione lungo il canale aumenta dal valore zero in corrispondenza della sorgente al valore V_D sul collettore, di conseguenza il contatto risulta polarizzato inversamente in misura sempre maggiore man mano che si procede dalla sorgente verso il collettore. La regione di svuotamento è più estesa in prossimità dell'elettrodo di *drain* e si ha una riduzione progressiva lungo x della sezione trasversale aperta al flusso di corrente (e della conduttanza); la corrente pertanto aumenta con la tensione con una pendenza inferiore a quella della zona lineare. Assumendo una deformazione graduale del canale si trova

$$I_D = G_0 \left\{ V_{DS} - \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{\phi_i - V_P}} \left[(\phi_i - V_{GS} + V_{DS})^{\frac{3}{2}} - (\phi_i - V_{GS})^{\frac{3}{2}} \right] \right\} \quad (7.9)$$

dove V_P è la tensione di strozzamento (*pinch-off*), cioè la tensione totale alla quale la regione svuotata occupa tutto il canale. Nel caso di drogaggio omogeneo di tipo n

$$V_P = \phi_i - \frac{qN_d a^2}{2\varepsilon_s} \quad (7.10)$$

Nei dispositivi a svuotamento (*depletion*), V_P è sempre negativa ²¹. Quando la tensione V_{DS} raggiunge il valore $V_{D,sat}$, la corrente satura per strozzamento e rimane sostanzialmente costante

$$\begin{aligned} V_{D,sat} &= \frac{qN_d a^2}{2\varepsilon_s} - (\phi_i - V_{GS}) \\ I_{D,sat} &= G_0 \left[\frac{1}{3}(\phi_i - V_P) - (\phi_i - V_{GS}) \left\{ 1 - \frac{2}{3} \left[\frac{\phi_i - V_{GS}}{\phi_i - V_P} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \right] \end{aligned}$$

Il dispositivo descritto presenta una saturazione per *strozzamento*, cioè per chiusura del canale mediante la regione di carica spaziale. Nei MESFET normalmente succede che, prima che il canale si chiuda completamente, il campo longitudinale superi il valore per cui la velocità satura al valore v_{sl} , cioè $\mathcal{E}_y >> 10^5$ V/cm. In questo caso $\mu \propto 1/\mathcal{E}_y$, la corrente

$$I_D = q x_w Z N_d \mu \mathcal{E}_y \quad (7.11)$$

diventa quasi costante e si ha la *saturazione di velocità*. Le formule precedenti continuano a valere con l'unica differenza che la tensione e la corrente di saturazione hanno valori inferiori.

MESFET a canale normalmente chiuso (OFF)

Per applicazioni ad alta velocità e a bassa potenza si preferisce il dispositivo a canale normalmente chiuso che, per $V_G = 0$, non ha un canale conduttore perché la differenza di potenziale intrinseco ϕ_i della giunzione di porta è sufficiente a svuotare la regione del

²¹Nei FET a giunzione (capitolo 9) il potenziale di contatto è solitamente trascurabile rispetto alla quantità $qN_d a^2/(2\varepsilon_s)$; la tensione di strozzamento è quindi spesso definita come

$$V_P = - \frac{qN_d a^2}{2\varepsilon_s}$$

canale²². Occorre applicare alla porta una tensione di polarizzazione positiva affinché incominci a fluire corrente nel canale. La tensione necessaria, detta *tensione di soglia*

$$V_T = \phi_i - \frac{qN_d a^2}{2\epsilon_s}$$

è la tensione totale alla quale la regione svuotata occupa tutto il canale. In questi dispositivi, detti ad arricchimento (*enhancement*), V_T è positiva.

Parametri differenziali.

Quando alle tensioni costanti di polarizzazione (V_G e V_D) si sovrappongono tensioni di segnali sul gate (v_G) e sul collettore (v_D), la corrente di collettore si modifica, arricchendosi di una componente di segnale: i_D . La corrente totale diventa $i_D + I_D$ ed è funzione delle tensioni sul drain e sul gate. Nel caso di piccoli segnali, cioè piccoli scostamenti dai valori del punto di polarizzazione (punto di riposo), la corrente si può espandere in serie di Taylor intorno a tale punto (V_D , V_G) arrestando lo sviluppo ai termini lineari. Si ottiene il legame lineare

$$i_d = g_d v_D + g_m v_g \quad (7.12)$$

dove g_d è la *conduttanza del canale*, detta anche conduttanza di collettore, e g_m è la *transconduttanza*

$$g_d = \left. \frac{\partial I_D}{\partial V_D} \right|_{V_G=\text{cost}}$$

$$g_m = \left. \frac{\partial I_D}{\partial V_G} \right|_{V_D=\text{cost}}$$

Nella regione lineare

$$g_d = G_0 \left[1 - \sqrt{\frac{V_{GS} + \phi_i}{V_P}} \right]$$

$$g_m = \frac{1}{2} G_0 \sqrt{\frac{V_P}{V_{GS} + \phi_i}} \frac{V_{DS}}{V_P}$$

Nella regione di saturazione

$$g_d \simeq 0 \quad \text{caso ideale}$$

$$g_m = G_0 \left[1 - \sqrt{\frac{V_{GS} + \phi_i}{V_P}} \right] = g_{d,[\text{zona lineare}]} \quad (7.13)$$

Circuito equivalente.

La (7.12) descrive il comportamento del dispositivo in presenza di piccole variazioni delle grandezze elettriche rispetto al punto di riposo, cioè in presenza di un segnale. La (7.12) consente una semplice interpretazione circuitale, come parallelo di una conduttanza e di un generatore di corrente dipendente da una tensione. Esso rappresenta la parte dell'uscita del circuito equivalente per piccoli segnali di un MESFET, illustrato entro il riquadro nella figura 7.42.

Il circuito equivalente è completato all'ingresso dalla serie di un resistore d'ingresso R_i e di un condensatore²³ C_{gs} . Anche all'uscita il comportamento capacitivo del contatto è rappresentato da una capacità, C_{ds} .

²²Ad esempio, MESFET a GaAs con uno strato epitassiale n molto sottile e poco drogato su di un substrato semiisolante.

²³Tiene conto della capacità di svuotamento del contatto metallo-semiconduttore.

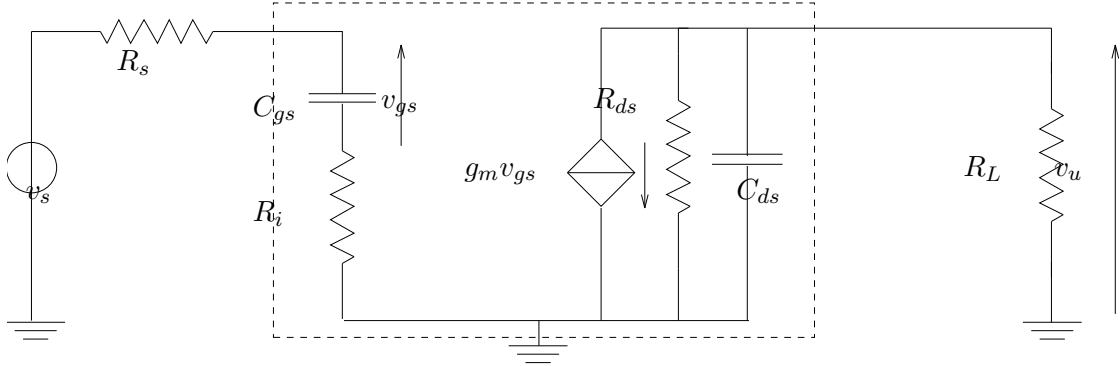


Figura 7.42: Circuito per piccolo segnale del MESFET *intrinseco*.

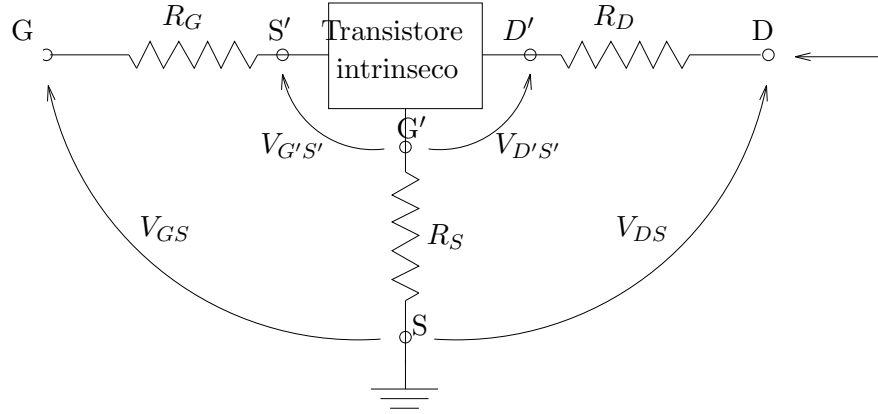


Figura 7.43: Circuito equivalente del MESFET reale: al modello del transistore *intrinseco* sono state aggiunte le resistenze serie R_S, R_D e R_G .

Al circuito equivalente del dispositivo *intrinseco* (cioè della parte che è utile per controllare il segnale) occorre aggiungere le resistenze serie (R_S, R_D, R_G), dovute essenzialmente al volume di semiconduttore attraversato dalla corrente prima di arrivare ai morsetti esterni (fig. 7.8).

Frequenza di taglio.

Per caratterizzare il comportamento con la frequenza, si definisce la massima frequenza di lavoro quella oltre cui il FET non può più amplificare un segnale d'ingresso²⁴ e la si denomina *frequenza di taglio* f_T . Si ha in prima approssimazione

$$f_T = \frac{g_m}{2\pi C_G} \quad (7.14)$$

dove C_G è la somma della capacità tra il gate e la sorgente C_{gs} e la capacità tra il gate e il drain C_{gd} .

7.8.1

In un MESFET si trascurino le resistenze serie parassite.

²⁴È la frequenza per cui, con l'uscita in corto circuito, l'amplificazione di corrente è unitaria.

1. Mediante l'uso del circuito equivalente della figura (7.42) si determini l'espressione della frequenza di taglio f_T , definita come frequenza per cui, con l'uscita in corto circuito, l'amplificazione di corrente è unitaria.
2. Partendo dalla relazione trovata si trovi una relazione approssimata (per eccesso) della frequenza di taglio in cui siano espliciti i legami con la geometria del canale e la concentrazione di drogaggio.

a)

Ponendo in corto circuito i morsetti d'uscita del circuito equivalente della figura 7.42 si determina la frequenza $f = f_T$ per la corrente che attraversa la capacità d'ingresso

$$2\pi f C_{gs} v_{gs}$$

è eguale alla corrente d'uscita

$$g_m v_{gs}$$

Pertanto si ottiene

$$f = f_T = \frac{g_m}{2\pi C_{gs}}$$

La capacità C_G che compare a denominatore della 7.14 è la somma della capacità tra il gate e la sorgente C_{gs} e la capacità tra il gate e il drain. La prima delle due è predominante sull'altra, quindi C_{gs} si può ritenere una buona approssimazione per difetto della C_G .

$$C_G = C_{gs} + C_{gd} > C_{gs}$$

b)

La frequenza di taglio è un parametro del MESFET impiegato come amplificatore di segnale d'ingresso, quindi la zona di funzionamento è quella di saturazione e la transconduttanza g_m è data dalla (7.13). La transconduttanza massima si ha per valori di V_{GS} prossimi a zero; la conduttanza a canale aperto G_0 della (7.8) costituisce una limitazione superiore

$$g_m < G_0 = q\mu_n N_d \frac{Za}{L}$$

La capacità C_{gs} è sostanzialmente la capacità di transizione del contatto metallo-semiconduttore tra il gate e il canale. Si ha

$$C_{gs} = \frac{\varepsilon_s A}{x_d} = \frac{\varepsilon_s}{x_d} L \times Z$$

Il MESFET si trova in zona di saturazione, quindi l'ampiezza x_d della regione svuotata varia fortemente lungo il canale e in prossimità del drain il canale è completamente chiuso. Al fine di ottenere una valutazione per difetto della capacità, si assume $x_d = a$. In conclusione

$$f_T = \frac{g_m}{2\pi C_G} < \frac{G_0}{2\pi C_{gs}} = \frac{\mu_n q N_d a^2}{2\pi \varepsilon_s L^2}$$

7.8.2

Sia un MESFET a canale n in GaAs con barriera per il flusso di elettroni dal metallo al semiconduttore $\phi_B = 0,9$ V. Il canale ha un drogaggio $N_d = 1 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$, è spesso $a = 0,1 \text{ }\mu\text{m}$, lungo $L = 1 \text{ }\mu\text{m}$ e largo $Z = 10 \text{ }\mu\text{m}$.

1. Si determini se si tratta di un dispositivo ad arricchimento o a svuotamento.
2. Si calcoli il valore della tensione di soglia.
3. Si valuti l'intensità della corrente di saturazione per $V_G = 0$ V.
4. Si calcoli la frequenza di taglio.

Nel GaAs la massa efficace degli elettroni è $m_n^* = 0,068m_0$ e di conseguenza la densità efficace degli stati in banda di conduzione vale $N_C = 4,7 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$.

a)

Si calcola la tensione interna

$$\phi_i = \phi_B - \frac{kT}{q} \ln \frac{N_C}{N_d} = 0,9 \text{ V} - 0,0259 \text{ V} \ln \frac{4,7 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}}{1 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}} = 0,86 \text{ V}$$

Per determinare il tipo di funzionamento del MESFET si deve effettuare un confronto tra lo spessore del canale e l'estensione della regione spaziale, pertanto si calcola

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{\frac{2\varepsilon_s}{qN_d} (\phi_i)} = \sqrt{\frac{2 \times 11,7 \times 8,8544 \cdot 10^{-14} \text{ F/cm} \times 0,86 \text{ V}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \times 1 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}}} \\ w &= 0,11 \text{ }\mu\text{m} \end{aligned}$$

dato che la profondità del canale è $a = 0,1 \text{ }\mu\text{m}$, il MESFET è normalmente chiuso, cioè ad arricchimento.

b)

La tensione di soglia del dispositivo, coincidente con la tensione di strozzamento V_P , è

$$V_T = \phi_i - \frac{qN_d a^2}{2\varepsilon_s} = 0,86 - \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \times 10^{17} \text{ cm}^{-3} \times (0,1 \cdot 10^{-4})^2}{2 \times 11,7 \times 8,8544 \cdot 10^{-14} \text{ F/cm}} = 0,77 \text{ V}$$

c)

La mobilità degli elettroni con l'intensità di drogaggio N_d è $\mu_n = 5000 \text{ cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$, quindi la conduttanza a vuoto vale

$$G_0 = q\mu_n N_d \frac{Za}{L} = 1,6 \cdot 10^{-19} \times 5000 \times 10^{17} \frac{10 \cdot 10^{-4} \times 0,1 \cdot 10^{-4}}{1 \cdot 10^{-4}} = 0,008 \text{ }\Omega^{-1}$$

e la corrente di saturazione per $V_G = 0$

$$\begin{aligned} I_{D,\text{sat}} &= G_0 \left[\frac{1}{3}(\phi_i - V_P) - \phi_i \left\{ 1 - \frac{2}{3} \left[\frac{\phi_i}{\phi_i - V_P} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \right] \\ &= 0,008 \left[\frac{1}{3}0,09 - 0,86 \left\{ 1 - \frac{2}{3} \left[\frac{0,86}{0,09} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \right] = 7,5 \text{ mA} \end{aligned}$$

d)

Si usa la (7.14)

$$\begin{aligned} f_T &\leq \frac{G_0}{\pi Z \varepsilon_s L / a} = \frac{0,016}{\pi \times 10^{-3} \times 1,16 \cdot 10^{-12} / (2 \times 0,2 \cdot 10^{-4})} = 2,46 \cdot 10^{11} \text{ Hz} \\ f_T &\leq 246 \text{ GHz} \end{aligned}$$

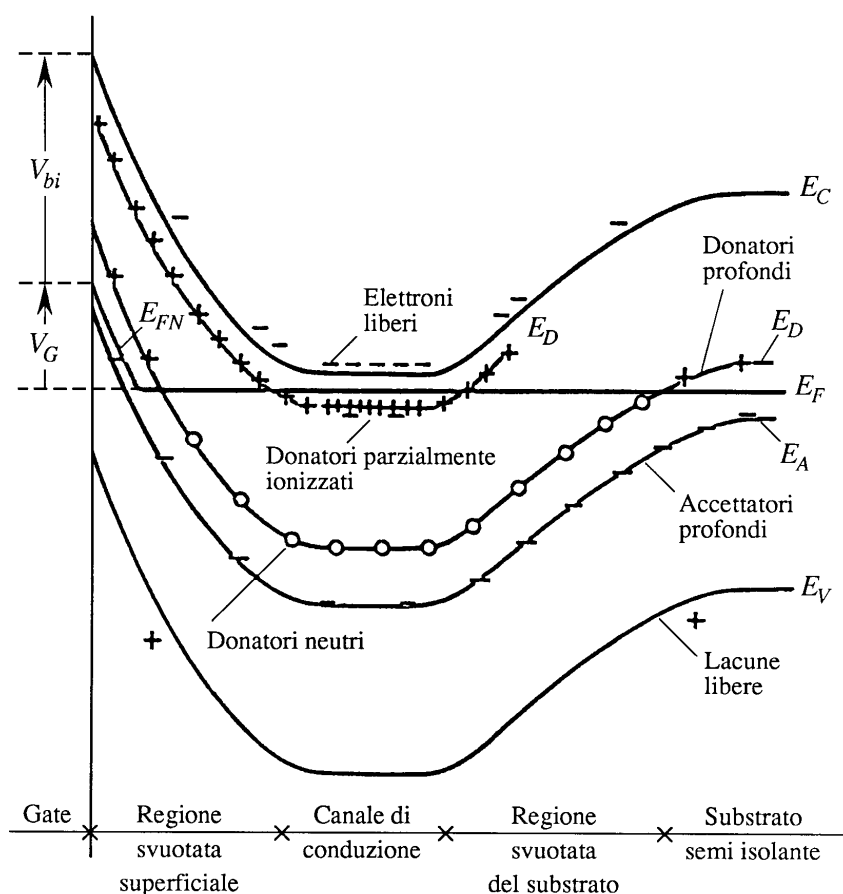


Figura 7.44: Diagramma a bande di un MESFET sotto il gate.

7.8.3

Si consideri una sezione sotto il gate di un MESFET formato da un contatto Ti/Pt/Au con $\phi_i = 0,8$ V su di uno strato attivo di tipo n^+ sopra il substrato semiisolante. Sia applicata una tensione gate-canale V_{GC} .

1. Si disegni qualitativamente il diagramma a bande per una polarizzazione inversa V_G sul gate a 300 K.
2. Sapendo che nel GaAs i donatori introducono livelli discreti a 0,12 eV sotto la banda di conduzione, che vi sono impurità che introducono livelli di tipo accettore 0,62 eV sopra la banda di conduzione, e discontinuità reticolari che introducono livelli profondi (EL2) di tipo donatore 0,42 eV sotto la banda di conduzione, si riportino tali livelli nel diagramma a bande mettendo in evidenza, per confronto con il livello di Fermi, il grado di ionizzazione.

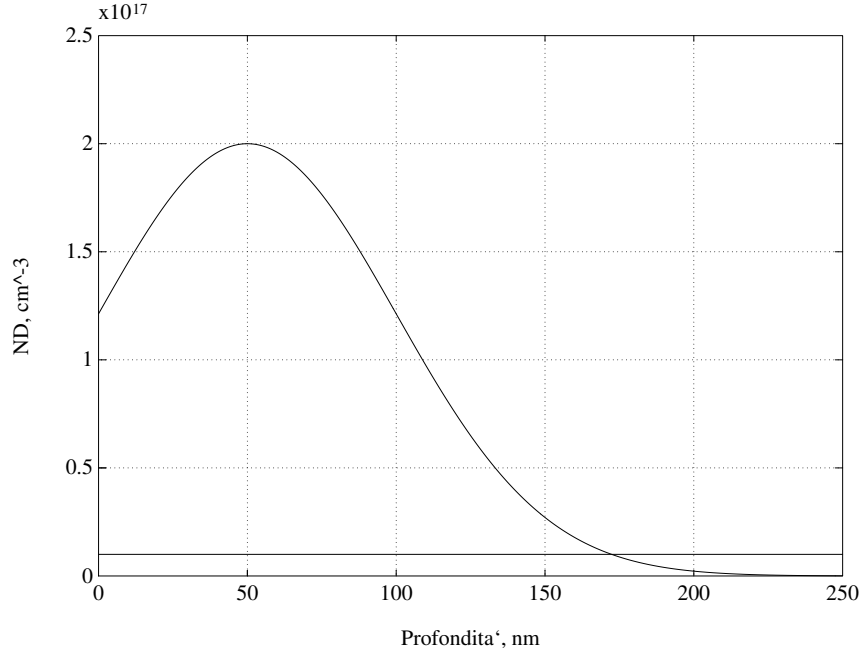
7.8.4

Si consideri un MESFET il cui canale sia ottenuto per impiantazione con una dose di $N' = 2,51 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$. Il profilo di drogaggio è approssimativamente gaussiano con un massimo alla profondità di 50 nm. La deviazione standard è $\Delta R_p = 50$ nm. Se il

potenziale interno è $\phi_i = 0,8 \text{ V}$, si determini la tensione di soglia V_T assumendo che l'impiantazione avvenga entro un substrato di tipo p con $N_a = 1 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$.

Il profilo di drogaggio (fig. 7.45) si può esprimere come

Figura 7.45: Profilo di drogaggio in un MESFET con canale ottenuto per impiantazione ionica.



$$N_d(x) = C_p \exp \left[-\frac{(x - R_p)^2}{2\Delta R_p^2} \right]$$

dove il valore massimo si ottiene dalla dose impiantata

$$C_p = \frac{N'}{\Delta R_p \sqrt{2\pi}} = 2 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$$

Dato che il drogaggio non è costante con la profondità, per determinare la tensione di giunzione in funzione dello spessore della regione svuotata x_d occorre integrare l'equazione di Poisson con una carica funzione di x . Nell'ipotesi di completo svuotamento, la carica è non nulla solo per $x \leq x_d$ si ha

$$V(x=0) = -\frac{q}{\varepsilon} \int_0^{x_d} \left(\int_0^{x'} N_d(x) dx \right) dx'$$

Con un cambio nell'ordine di integrazione si ha

$$V(x=0) = -\frac{q}{\varepsilon} \int_0^{x_d} x N_d(x) dx$$

Per trovare la tensione di soglia si deve considerare il caso in cui la regione di svuotamento si estende per tutto il canale: $x_d = a$. Il canale termina dove si ha la giunzione

con il substrato p, cioè lo spessore a del canale è la profondità a cui il drogaggio dei donatori impiantati è pari a quello degli accettori del substrato.

$$\begin{aligned} a &= R_p + \sqrt{2\Delta R_p^2 \ln\left(\frac{C_p}{N_a}\right)} = 50 \text{ nm} + \sqrt{2 \times 50^2 \text{ nm}^2 \times \ln\left(\frac{2 \cdot 10^{17}}{1 \cdot 10^{16}}\right)} \\ a &= 172 \text{ nm} \end{aligned}$$

Si ha allora

$$V_T = \phi_i - \frac{qC_p}{\varepsilon} \int_0^a x \exp\left[-\frac{(x-R_p)^2}{2\Delta R_p^2}\right] dx$$

L'integrale può essere risolto in forma chiusa usando la funzione errore, ma si possono anche usare i metodi integrazione numerica riassunti in appendice. Si trova $V_T = -1,06 \text{ V}$.

Capitolo 8

La giunzione p-n

In un semiconduttore in cui il drogaggio non è uniforme il potenziale all'equilibrio termodinamico non è costante ma varia in corrispondenza a ogni passaggio tra regioni con concentrazioni di drogaggio differenti. Nel caso in cui si abbia una discontinuità nel tipo di drogaggio, da una zona in cui prevalgono droganti di tipo donatore a una dominata da accettori, si origina una doppio strato di cariche fisse di segno opposto, dovuto a uno svuotamento di portatori mobili, che costituisce il nucleo della giunzione p-n.

In questo capitolo si esaminano la carica, il campo elettrico, il potenziale e il diagramma a bande all'interno della giunzione p-n, per profili di drogaggio differenti, che bene approssimano quelli reali.

In particolari condizioni di tensione applicata dall'esterno il campo elettrico può essere di elevata intensità, vengono studiati pertanto i meccanismi di rottura della giunzione.

Dallo studio della giunzione p-n risulta infine naturale passare all'esame di un altro interessante dispositivo, la giunzione p-i-n, che si ottiene introducendo uno strato intrinseco tra il lato n e il lato p.

Condizione di equilibrio della giunzione p-n

In un semiconduttore con profilo di drogaggio qualsiasi, ma non degenerare, vale la distribuzione di Boltzmann e quindi l'equazione di Shockley

$$n = n_i e^{(E_F - E_{Fi})/kT}$$

La non omogeneità del drogaggio comporta una situazione di non neutralità della carica elettrica, dovuta al moto per diffusione dei portatori dalle regioni in cui a parità di energia sono in maggior numero verso quelle meno popolate.

Il potenziale può essere espresso mediante il livello di Fermi del semiconduttore intrinseco E_i , che ha lo stesso andamento dei livelli che delimitano le bande di conduzione e di valenza (E_{rif} è un'energia di riferimento costante e di valore arbitrario)

$$\phi = -\frac{1}{q} (E_{Fi} - E_{rif})$$

Si può quindi esprimere il campo elettrico in funzione dall'andamento delle bande di energia

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = +\frac{1}{q} \frac{\partial E_{Fi}}{\partial x}$$

All'equilibrio $J_{tot} = J_n + J_p = 0$, e in particolare, per il principio dell'equilibrio dettagliato (capitolo 5), è $J_n = 0$ e $J_p = 0$. Si scrive la relazione per gli elettroni

$$q \mu_n n \mathcal{E} + q D_n \frac{\partial n}{\partial x} = 0$$

L'equazione di Shockley consente di esprimere il gradiente dei portatori mediante il livello di Fermi riferito al livello di Fermi del semiconduttore intrinseco $\bar{E}(x) = E_F(x) - E_{Fi}(x)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial x} &= \frac{\partial n}{\partial \bar{E}} \frac{\partial \bar{E}}{\partial x} \\ \frac{\partial n}{\partial x} &= n_i \exp \left[\frac{E_F(x) - E_{Fi}(x)}{kT} \right] \cdot \frac{1}{kT} \cdot \left(\frac{\partial E_F}{\partial x} - \frac{\partial E_{Fi}}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Pertanto la condizione $J_n = 0$ diventa

$$\begin{aligned} 0 &= q \mu_n n_i \exp \left[\frac{E_F(x) - E_{Fi}(x)}{kT} \right] \frac{1}{q} \frac{\partial E_{Fi}}{\partial x} + \\ &+ q D_n \left\{ n_i \exp \left[\frac{E_F(x) - E_{Fi}(x)}{kT} \right] \left(\frac{1}{kT} \left(\frac{\partial E_F}{\partial x} - \frac{\partial E_{Fi}}{\partial x} \right) \right) \right\} \\ 0 &= n_i \exp \left[\frac{E_F(x) - E_{Fi}(x)}{kT} \right] \left\{ q \mu_n \frac{1}{q} \frac{\partial E_{Fi}}{\partial x} + \right. \\ &+ q \frac{kT}{q} \mu_n \frac{1}{kT} \left(\frac{\partial E_F}{\partial x} - \frac{\partial E_{Fi}}{\partial x} \right) \left. \right\} \\ 0 &= n_i \exp \left[\frac{E_F(x) - E_{Fi}(x)}{kT} \right] \cdot \mu_n \cdot \left(\frac{\partial E_F}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Quindi all'equilibrio deve essere $E_F(x) = \text{costante}$ ¹.

¹Anche in questo caso la condizione di equilibrio non è strettamente necessaria, essendo sufficiente la condizione $J_{tot} = 0$.

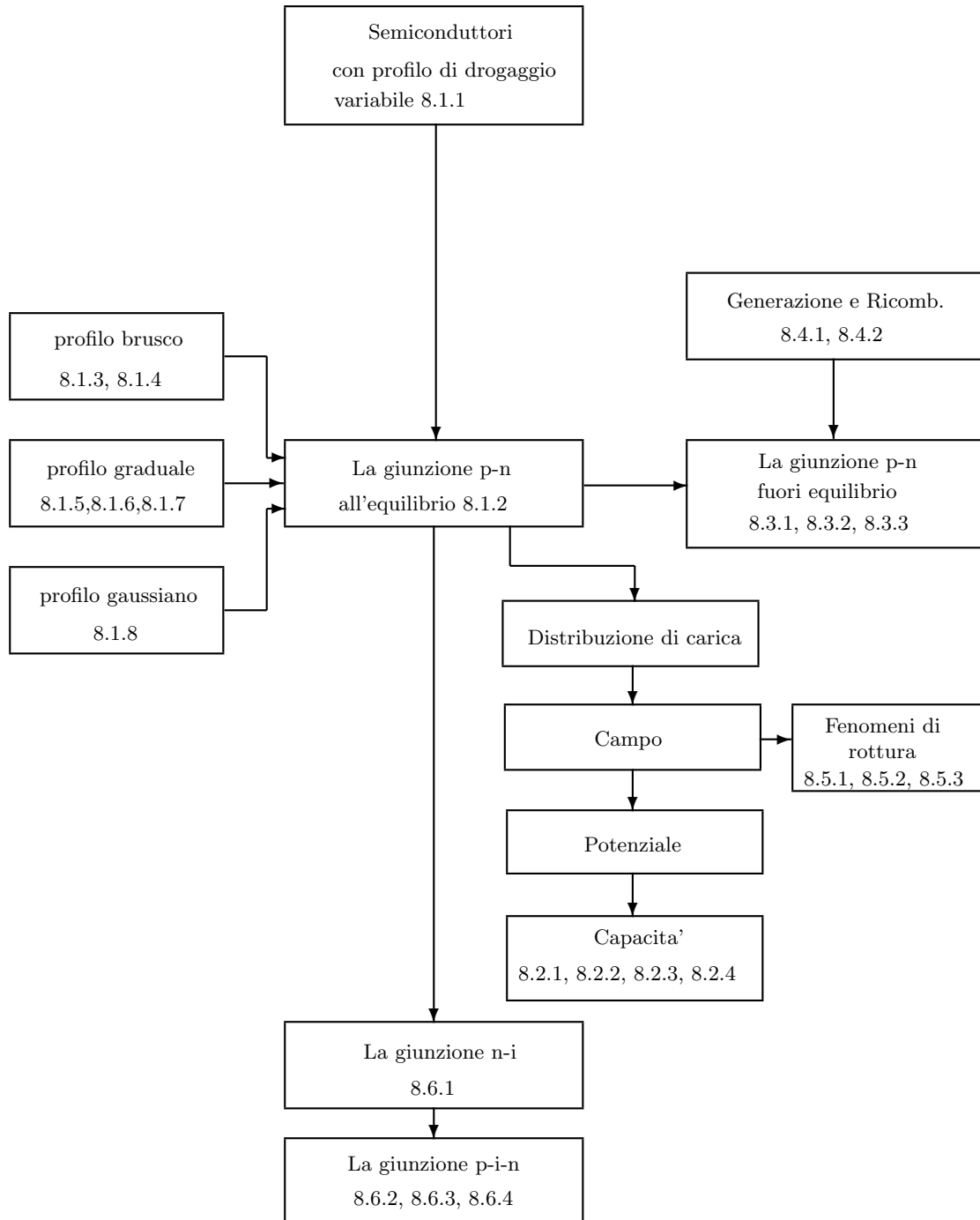


Figura 8.1: Struttura del capitolo 8.

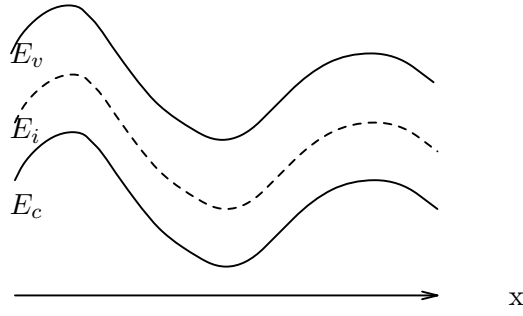


Figura 8.2: Andamento delle bande di energia per un profilo di drogaggio generico.

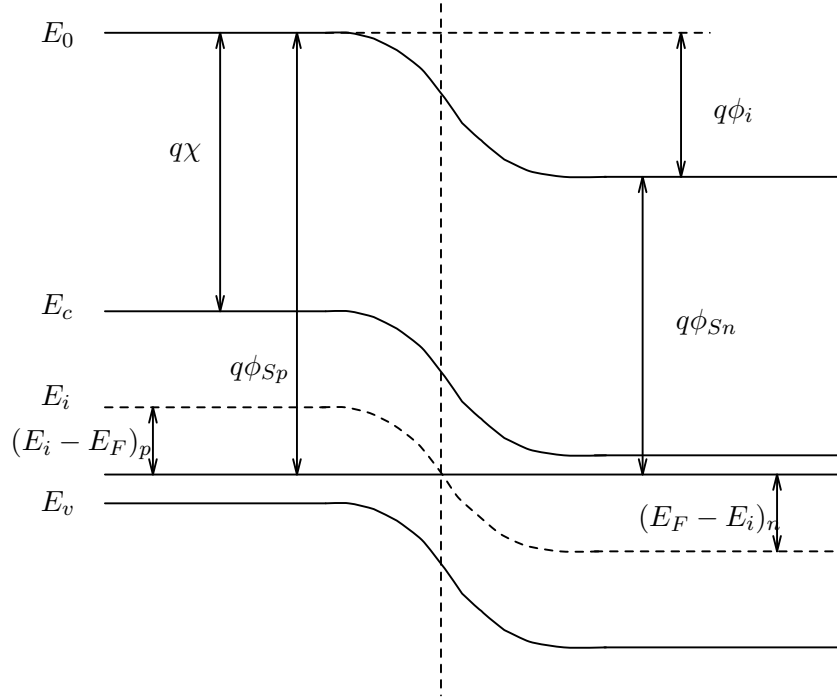


Figura 8.3: Giunzione p-n: diagramma a bande.

Potenziale intrinseco della giunzione

Il diagramma della giunzione p-n è riportato nella figura 8.3; indipendentemente dal profilo di drogaggio (brusco o lineare), il potenziale intrinseco ϕ_i (spesso anche indicato V_{bi} o V_0) si può esprimere come

$$q\phi_i = q\phi_{Sp} - q\phi_{Sn} = (E_i - E_F)_p + (E_F - E_i)_n$$

dove le grandezze con i pedici p e n si riferiscono alle sezioni in cui, nei due lati, ha fine la regione di carica spaziale. Introducendo le equazioni di Shockley, si ha

$$\phi_i = \frac{kT}{q} \ln \frac{N_a}{n_i} + \frac{kT}{q} \ln \frac{N_d}{n_i} = \frac{kT}{q} \ln \frac{N_a N_d}{n_i^2}$$

Giunzione p-n asimmetrica

Se, come spesso avviene, il drogaggio di un lato della giunzione prevale sull'altro, le

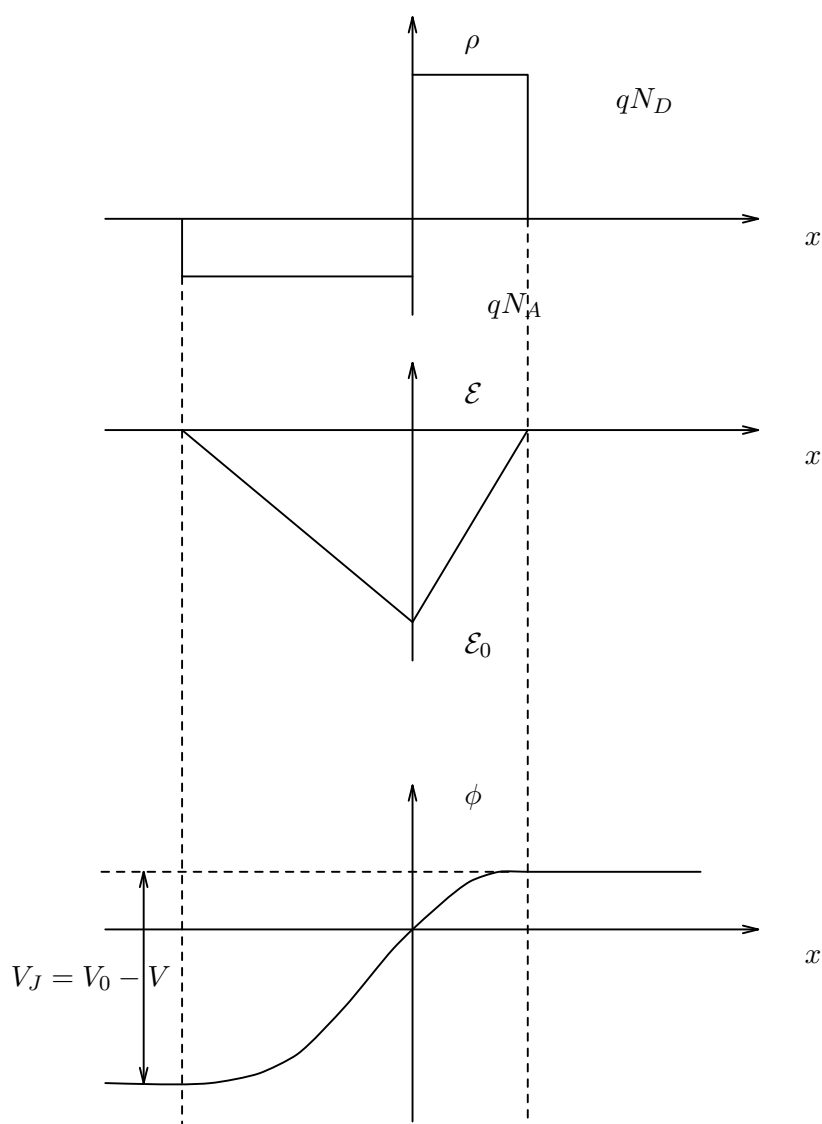


Figura 8.4: Giunzione p-n: carica elettrica, campo elettrico e potenziale.

formule si semplificano.

$$[p^+ - n] \rightarrow \phi_i = \frac{E_g}{2q} + \frac{kT}{q} \ln \frac{N_d}{n_i}$$

$$[p - n^+] \rightarrow \phi_i = \frac{E_g}{2q} + \frac{kT}{q} \ln \frac{N_a}{n_i}$$

Campo elettrico e potenziale. Si impiega l'equazione di Poisson

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon}$$

Se la giunzione è brusca e se A è l'area della sezione trasversale, integrando il legame

campo-carica, si ha in sequenza

$$\text{Lato p} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}(x) = \int_{-x_p}^x -\frac{qN_a}{\epsilon_s} dx + \underbrace{\mathcal{E}(-x_p)}_0 \\ \quad = -\frac{qN_a}{\epsilon_s} x - \frac{qN_a}{\epsilon_s} x_p = -\frac{qN_a}{\epsilon_s} (x + x_p) \\ \phi(x) = -\int_{-x_p}^x \mathcal{E}(x) dx + \phi_p = -\int_{-x_p}^x -\frac{qN_a}{\epsilon_s} (x + x_p) dx + \phi_p \\ \quad = \frac{qN_a}{2\epsilon_s} (x + x_p)^2 + \phi_p \end{array} \right.$$

$$\text{Lato n} \quad \phi(x) = -\frac{qN_d}{2\epsilon_s} (x_n - x)^2 + \phi_n = \phi_n - \frac{qN_d}{2\epsilon_s} (x_n - x)^2$$

Per la continuità del potenziale in $x = 0$

$$\phi(0) = \frac{qN_a}{2\epsilon_s} x_p^2 + \phi_p = \phi_n - \frac{qN_d}{2\epsilon_s} x_n^2$$

da cui si ottiene l'espressione della tensione intrinseca $V_0 = \phi_i$

$$\phi_i = \phi_n - \phi_p = \frac{qN_a}{2\epsilon_s} x_p^2 + \frac{qN_d}{2\epsilon_s} x_n^2 = \frac{q}{2\epsilon_s} (N_a x_p^2 + N_d x_n^2)$$

La neutralità della carica impone che $qAN_a x_p = qAN_d x_n \rightarrow x_p = (N_d/N_a) x_n$, per cui

$$\begin{aligned} \phi_i &= \frac{q}{2\epsilon_s} (N_a x_p^2 + N_d x_n^2) = \frac{q}{2\epsilon_s} N_d x_n (x_n + x_p) \\ &= \frac{q}{2\epsilon_s} N_d x_n^2 \left(1 + \frac{N_d}{N_a} \right) \end{aligned}$$

Larghezza della regione svuotata. Dall'espressione del potenziale intrinseco si trova

$$\begin{aligned} x_n &= \sqrt{\frac{2\epsilon_s}{qN_d} \frac{N_a}{N_a + N_d} \phi_i} \quad ; \quad x_p = \frac{N_d}{N_a} x_n = \sqrt{\frac{2\epsilon_s}{qN_a} \frac{N_d}{N_a + N_d} \phi_i} \\ x_d &= x_n + x_p = \sqrt{\frac{2\epsilon_s}{q} \phi_i} \sqrt{\frac{1}{N_a + N_d}} \left(\sqrt{\frac{N_a}{N_d}} + \sqrt{\frac{N_d}{N_a}} \right) \\ &= \sqrt{\frac{2\epsilon_s}{q} \left(\frac{1}{N_a} + \frac{1}{N_d} \right) \phi_i} = \sqrt{\frac{2\epsilon_s}{qN_{eq}} (\phi_i - V_a)} \end{aligned}$$

Intensità massima del campo elettrico. Il campo elettrico è negativo e, nel caso di drogaggio costante nelle due regioni p e n, ha andamento triangolare con lati tanto più pendenti quanto maggiore è il drogaggio. Il valore massimo è

$$\frac{1}{2} \mathcal{E}_{\max} x_d = (\phi_i - V_a) \longrightarrow \mathcal{E}_{\max} = \frac{2(\phi_i - V_a)}{x_d}$$

La tensione ai capi della regione in cui il campo è nullo è l'area sotto la curva del campo, mutata di segno.

8.1 Condizioni di equilibrio

8.1.1

Si vuole esaminare la condizione di equilibrio in una giunzione p-n, limitandosi a una descrizione monodimensionale.

a) In un semiconduttore come si può esprimere il campo elettrico in funzione del livello di Fermi intrinseco?

b) Trovare la condizione di equilibrio per la giunzione esprimendo la condizione di equilibrio dettagliato per le correnti degli elettroni mediante l'equazioni di Shockley e la relazione del punto a).

a)

L'intensità di campo elettrico per definizione è

$$\mathcal{E} \equiv -\frac{dV}{dx}$$

e passando all'energia potenziale

$$\mathcal{E} = +\frac{1}{q} \frac{dE}{dx}$$

Il campo elettrico è dunque proporzionale al gradiente dell'energia potenziale degli elettroni

$$\mathcal{E} = +\frac{1}{q} \frac{dE_C}{dx}$$

Ovviamente si può usare per il calcolo del gradiente ogni curva del diagramma a bande che sia ottenibile da $E_C(x)$ mediante una semplice traslazione; in particolare si può usare $E_V(x) = E_C(x) - E_g$ oppure $E_i(x) = E_C(x) - E_g/2$

$$\mathcal{E} = +\frac{1}{q} \frac{dE_i}{dx}$$

b)

In una giunzione all'equilibrio il flusso della corrente di diffusione degli elettroni va dal lato n al lato p, mentre la corrente di trascinamento legata al campo elettrico fluisce nella direzione opposta. All'equilibrio termodinamico, cioè a una data temperatura e in assenza di qualunque sollecitazione esterna, il flusso netto della corrente attraverso la giunzione deve essere nullo, pertanto la corrente dovuta al campo elettrico viene compensata esattamente dalla corrente di diffusione dovuta al gradiente della concentrazione². Per la densità di corrente totale degli elettroni si ha

$$J_n = J_{n,\text{trasc.}} + J_{n,\text{diff}} = q\mu_n n \frac{1}{q} \frac{dE_i}{dx} + qD_n \frac{dn}{dx} = 0$$

dalle equazioni di Shockley si ha

$$n = n_i e^{(E_F - E_i)/kT} \longrightarrow \frac{dn}{dx} = \frac{n}{kT} \left(\frac{dE_F}{dx} - \frac{dE_i}{dx} \right)$$

²Ciò deve valere, separatamente, per ciascuno dei due tipi di portatori: principio dell'equilibrio dettagliato (problema ??).

e introducendo la relazione di Einstein $D_n = kT\mu_n/q$, si ottiene

$$\begin{aligned} J_n &= q\mu_n n \frac{1}{q} \frac{dE_i}{dx} + \frac{qkT\mu_n}{q} \frac{n}{kT} \left(\frac{dE_F}{dx} - \frac{dE_i}{dx} \right) = 0 \\ &= \mu_n n \left(\frac{dE_i}{dx} + \frac{dE_F}{dx} - \frac{dE_i}{dx} \right) = 0 \\ &= \mu_n n \frac{dE_F}{dx} = 0 \end{aligned}$$

Risultato identico si trova imponendo l'equilibrio delle lacune. Pertanto, nella condizione che siano nulle separatamente le correnti totali degli elettroni e delle lacune, il livello di Fermi deve essere costante, cioè indipendente da x , attraverso tutta la giunzione.

8.1.2

Calcolare il campo elettrico all'equilibrio in un campione di silicio con una distribuzione delle impurità del tipo:

$$N(x) = N_0 e^{-x/\lambda}$$

Con $N_0 = 5 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ e $\lambda = 0,5 \text{ }\mu\text{m}$. Si giustifichino tutte le ipotesi necessarie per arrivare al risultato numerico.

La distribuzione dei portatori $n(x)$ inizialmente coincide in ogni sezione con la concentrazione degli atomi di drogaggio ionizzati, in armonia con l'ipotesi di quasi neutralità. Assumendo la completa ionizzazione degli atomi droganti, tale concentrazione si identifica con il profilo di drogaggio $N(x)$.

All'equilibrio termodinamico la densità di corrente totale è nulla

$$\begin{aligned} q\mu_n n(x) \mathcal{E}(x) + qD_n \frac{\partial n(x)}{\partial x} + q\mu_p p \mathcal{E}(x) - qD_p \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ q\mu_n n(x) \mathcal{E}(x) + qD_n \frac{\partial n(x)}{\partial x} + q\mu_p \frac{n_i^2}{n(x)} \mathcal{E}(x) - qD_p \frac{\partial \left(\frac{n_i^2}{n(x)} \right)}{\partial x} &= 0 \\ q\mu_n n(x) \left[1 + \frac{\mu_p}{\mu_n} \frac{n_i^2}{n^2(x)} \right] \mathcal{E}(x) + qD_n \left[1 + \frac{D_p}{D_n} \frac{n_i^2}{n^2(x)} \right] \frac{\partial n(x)}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

Dato che $D_p/D_n = \mu_p/\mu_n$, si ha

$$q\mu_n n(x) \mathcal{E}(x) + qD_n \frac{\partial n(x)}{\partial x} = J_n = 0$$

cioè all'equilibrio $J = 0$ comporta separatamente $J_n = 0$ e $J_p = 0$ (principio dell'equilibrio dettagliato, problema ??). La condizione di equilibrio consente il calcolo del campo

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x) &= -\frac{D_n}{\mu_n} \frac{1}{n(x)} \frac{dn(x)}{dx} = -\frac{kT}{q} \frac{1}{n(x)} \frac{dn(x)}{dx} \\ \frac{dn(x)}{dx} &= n(x) \left(-\frac{1}{\lambda} \right) \\ \mathcal{E}(x) &= -\frac{kT}{q} \frac{1}{n(x)} n(x) \left(-\frac{1}{\lambda} \right) = \frac{kT}{q\lambda} = \frac{0,026}{0,5 \cdot 10^{-4}} = 520 \text{ V cm}^{-1} \end{aligned}$$

Il campo non dipende da N_0 , ma assume valori non trascurabili tali da porre in discussione l'ipotesi iniziale di quasi neutralità; del resto, come si è osservato nel capitolo 5, un semiconduttore con drogaggio non uniforme presenta una carica spaziale dovuta allo spostamento di portatori per diffusione.

8.1.3

Una giunzione p-n brusca presenta dai due lati drogaggi $N_a = 1 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ e $N_d = 2 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$.

1. Si determini il potenziale di contatto ϕ_i a temperatura ambiente.
2. Utilizzando l'approssimazione di completo svuotamento, si calcoli la larghezza della zona di carica spaziale e il campo \mathcal{E}_{\max} per tensioni applicate V_a di 0 V e di -10 V.

a)

$$\phi_i = \frac{kT}{q} \ln \frac{N_a N_d}{n_i^2} = 0,026 \times \ln \frac{2 \cdot 10^{32}}{(1,45 \cdot 10^{10})^2} = 0,72 \text{ V}$$

b) Con $V_a = 0 \text{ V}$ si ha

$$\begin{aligned} x_d &= x_n + x_p = \sqrt{\frac{2\epsilon_s}{q} \left(\frac{1}{N_a} + \frac{1}{N_d} \right) (\phi_i - V_a)} \\ x_d &= \sqrt{\frac{2 \times 11,7 \times 8,854 \cdot 10^{-14}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \times \left(\frac{1}{10^{15}} + \frac{1}{2 \cdot 10^{17}} \right) \times 0,72} \\ &= \sqrt{\frac{1,294 \cdot 10^7}{9,95 \cdot 10^{14}}} \times 0,72 = 9,6 \cdot 10^{-5} \text{ cm} = 0,96 \mu\text{m} \\ \mathcal{E}_{\max} &= \frac{2(\phi_i - V_a)}{x_d} = \frac{2 \times 0,72}{9,6 \cdot 10^{-5}} = 1,5 \cdot 10^4 \text{ V cm}^{-1} \end{aligned}$$

Con $V_a = -10 \text{ V}$ si ha

$$\begin{aligned} x_d &= \sqrt{1,301 \cdot 10^{-8} \times 10,72} = 3,73 \cdot 10^{-4} \text{ cm} = 3,73 \mu\text{m} \\ \mathcal{E}_{\max} &= \frac{2 \times 10,72}{3,73 \cdot 10^{-4}} = 5,74 \cdot 10^4 \text{ V cm}^{-1} \end{aligned}$$

8.1.4

Una giunzione p-n brusca di silicio, ha concentrazioni di drogante $N_a = 2 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ e $N_d = 0,5 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$.

1. Calcolare il potenziale interno ϕ_i a temperatura ambiente.
2. Nell'ambito dell'approssimazione di completo svuotamento, calcolare la larghezza dello strato di carica spaziale e il campo elettrico massimo per tensioni di giunzione $V_a = 0$ e $V_a = -10 \text{ V}$.
3. Disegnare le due curve del campo elettrico, controllando sul disegno che esse corrispondano effettivamente al valore di tensione previsto.

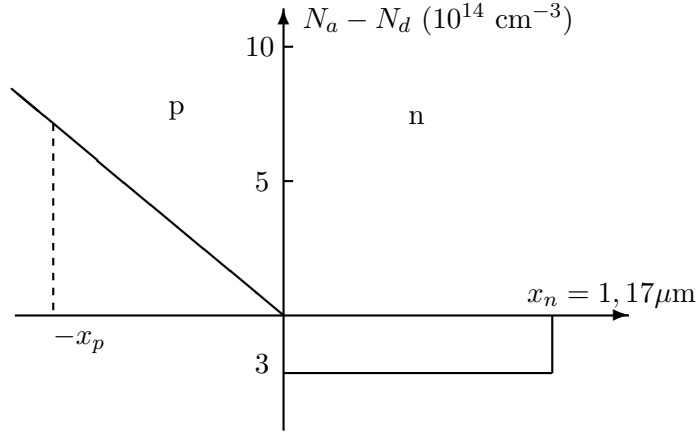


Figura 8.5: Profilo di drogaggio.

8.1.5

Si studi una giunzione p - n su silicio con un drogaggio a profilo lineare nel lato p con $N_a = -ax$ ($a = 10^{19} \text{ cm}^{-4}$) e un drogaggio uniforme nel lato n con $N_d = 3 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$. Sapendo che in assenza di polarizzazione la larghezza dello strato di svuotamento nel lato n è $x_n = 1,07 \mu\text{m}$, si determinino a) l'ampiezza complessiva dello strato di svuotamento, b) il campo massimo a polarizzazione nulla e c) la tensione di contatto V_{bi} .

a) Per neutralità della carica totale

$$\begin{aligned} qN_d x_n &= \frac{1}{2} qa x_p^2 \rightarrow x_p = \sqrt{2 \frac{N_d}{a} x_n} = 0,80 \mu\text{m} \\ w &= x_n + x_p = 1,87 \mu\text{m} \end{aligned}$$

b)

Nel lato p ($-x_p \leq x \leq 0$), dalla legge di Gauss, con la condizione al contorno $\mathcal{E}(-x_p) = 0$, si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x) &= \int_{-x_p}^x \frac{1}{\epsilon} qax \, dx = \frac{1}{2\epsilon} qa(x^2 - x_p^2) \\ \mathcal{E}(0) &= \mathcal{E}_{\max} = -\frac{1}{2\epsilon} qax_p^2 = -4,949 \cdot 10^{-5} \text{ V/m} = -4,949 \text{ kV/cm} \end{aligned}$$

Nel lato n , ($0 \leq x \leq x_n$)

$$\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}(0) + \int_0^x \frac{1}{\epsilon} qN_d \, dx = \mathcal{E}(0) + \frac{1}{\epsilon} qN_d x$$

c)

Per calcolare il potenziale di contatto si integra il campo elettrico

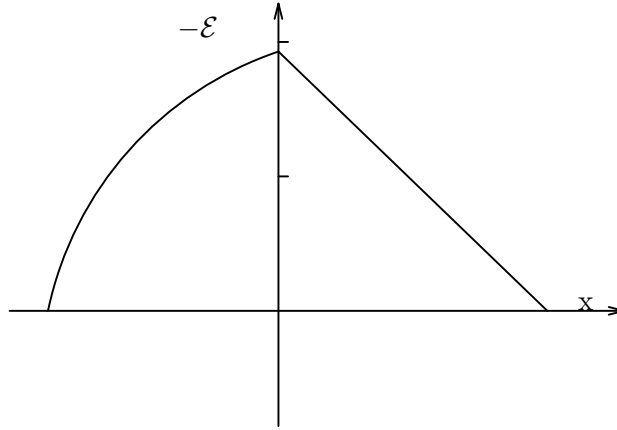


Figura 8.6: Andamento del campo elettrico.

$$\begin{aligned}
 -x_p \leq x \leq 0 & \longrightarrow \left\{ \begin{aligned} \phi(x) &= - \int_{-x_p}^x \frac{1}{2\epsilon} qa (x^2 - x_p^2) dx = \\ &= -\frac{1}{6\epsilon} qa (x^3 + x_p^3) + \frac{1}{2\epsilon} qa x_p^2 (x + x_p) \\ \phi(0) &= \phi_p = \frac{1}{3\epsilon} qa x_p^3 = 264 \text{ mV} \end{aligned} \right. \\
 0 \leq x \leq x_n & \longrightarrow \left\{ \begin{aligned} \phi(x) &= \phi(0) - \int_0^x \left[\mathcal{E}(0) + \frac{1}{\epsilon} qN_d \right] dx = \\ &= \phi(0) + \frac{1}{2\epsilon} qa x_p^2 x - \frac{1}{2\epsilon} qN_d x^2 \\ \phi_i &= \phi_p + \frac{1}{2\epsilon} qa x_p^2 x_n - \frac{1}{2\epsilon} qN_d x_n^2 \\ &= 264 + 263,9 = 527,9 \text{ mV} \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Il potenziale nel lato n si può calcolare più semplicemente come $1/2 \mathcal{E}_{\max} x_n$.

8.1.6

Nel problema 8.1.5 la ricerca della soluzione è stata agevolata dalla conoscenza a priori dell'ampiezza della regione di svuotamento nel lato n all'equilibrio termodinamico. Rimuovendo tale informazione si determini l'ampiezza della regione svuotata nei due lati e il valore del potenziale di contatto che si instaura all'equilibrio termodinamico ai capi delle regioni svuotate.

In generale lo studio di giunzioni con profilo di drogaggio arbitrario³ all'equilibrio termodinamico si basa sulla soluzione di un sistema costituito dalle equazioni ottenute imponendo le condizioni (V. anche problema ??)

1. eguaglianza tra cariche negative e positive all'interno della regione svuotata;
2. eguaglianza tra il potenziale ottenuto integrando due volte la distribuzione di carica all'equilibrio termico e il potenziale di contatto;
3. eguaglianza tra il potenziale di contatto e la differenza dei livelli di Fermi ai capi della regione svuotata.

³Si considerano solo soluzioni per le quali valga l'ipotesi di completo svuotamento.

Si applicano tali condizioni nel caso della giunzione p-n con profilo di drogaggio lineare nel lato p e uniforme nel lato n.

Neutralità:

$$qN_dx_n = \frac{1}{2}qax_p^2; \quad x_n = \frac{a}{2N_d}x_p^2$$

Distribuzione di carica:

$$\begin{array}{l} \text{lato p} \\ \text{lato n} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\frac{qax}{\epsilon_s} \\ \mathcal{E}(x) = \mathcal{E}(-x_p) + \frac{qa}{\epsilon_s} \int_{-x_p}^x x \, dx = 0 + \frac{qa}{\epsilon_s} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x_p^2}{2} \right) \\ \phi(x) = \phi(-x_p) - \frac{qa}{2\epsilon_s} \int_{-x_p}^x (x^2 - x_p^2) \, dx \\ \quad = 0 + \frac{qa}{2\epsilon_s} \left[x_p^2(x + x_p) - \frac{1}{3}(x^3 + x_p^3) \right] \\ \phi(0) = \frac{1}{3\epsilon_s}qax_p^3 \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\frac{qN_d}{\epsilon_s} \\ \mathcal{E}(x) = \mathcal{E}(x_n) + \frac{qN_d}{\epsilon_s} \int_x^{x_p} dx = 0 + \frac{qN_d}{\epsilon_s} (x - x_n) \\ \phi(x) = \phi(0) - \frac{qN_d}{\epsilon_s} \int_x^0 (x - x_n) \, dx = \phi(0) - \frac{qN_d}{\epsilon_s} \left(\frac{x^2}{2} - x_n x \right) \\ \phi(x_n) = \phi_i = \frac{qa}{3\epsilon_s}x_p^3 + \frac{qN_d}{2\epsilon_s}x_n^2 \end{array} \right.$$

Sostituendo l'espressione per x_n ricavata dalla condizione di neutralità, si ottiene

$$\phi_i = \frac{qa}{3\epsilon_s}x_p^3 + \frac{qa^2}{8\epsilon_s N_d}x_p^4$$

Differenza dei lavori di estrazione:

$$\phi_s(-x_p) - \phi_s(x_n) = \frac{kT}{q} \ln \left(\frac{N_d a x_p}{n_i^2} \right)$$

Sostituendo $\phi_s(-x_p)$ e $\phi_s(x_n)$ si ha l'equazione in x_p

$$\frac{qa^2}{8\epsilon_s N_d}x_p^4 + \frac{qa}{3\epsilon_s}x_p^3 = \frac{kT}{q} \ln \left(\frac{N_d a x_p}{n_i^2} \right)$$

Con i valori relativi all'esercizio precedente si ottiene

$$x_p = 0,8065 \, \mu\text{m}; \quad x_n = 1,084 \, \mu\text{m}; \quad \phi_i = 0.542 \, \text{V}$$

8.1.7

Si consideri una giunzione p-n a profilo di drogaggio lineare con gradiente a . Si traccino il potenziale di contatto e l'ampiezza della regione svuotata in funzione del gradiente a , variabile tra 10^{19} cm^{-4} e 10^{23} cm^{-4} .

La distribuzione di drogante viene rappresentata con una funzione lineare: $N_a - N_d = ax$, e coincide con la distribuzione della carica spaziale nella regione svuotata. Si usa il metodo di soluzione proposto nel problema 8.1.6.

Neutralità:

$$-qax_p = qax_n; \quad x_n = -x_p = \frac{w}{2}$$

Distribuzione di carica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= -\frac{qax}{\epsilon_s} \\ \mathcal{E}(x) &= \mathcal{E}(-w/2) + \int_{-w/2}^x \frac{qax}{\epsilon_s} dx = 0 - \frac{qa}{2\epsilon_s} \left(\frac{w^2}{4} - x^2 \right) \\ \phi(x) &= \phi(-w/2) + \int_{-w/2}^x \frac{qa}{2\epsilon_s} \left(\frac{w^2}{4} - x^2 \right) dx \\ &= 0 + \frac{qa}{2\epsilon_s} \left(\frac{w^2}{4}x - \frac{x^3}{3} + \frac{w^3}{12} \right) \\ \phi(+w/2) &= \phi_i = qa12\epsilon_s w^3 \end{aligned}$$

Differenza dei lavori di estrazione:

$$\phi_i = \frac{kT}{q} \ln \left[\frac{(aw/2)(aw/2)}{n_i^2} \right]$$

Combinando le ultime due equazioni si ottiene

$$\frac{qaw^3}{12\epsilon_s} = \frac{2kT}{q} \ln \left(\frac{aw}{2n_i} \right)$$

che risolta in funzione di w per i valori di a nel campo prescelto, permette di ottenere l'andamento dell'ampiezza della regione svuotata e del potenziale di contatto, come riportato nelle figure 8.7 e 8.8.

8.1.8

Si consideri una giunzione p-n ottenuta introducendo su di un substrato di tipo p drogato uniformemente ($N_a = d$) impurità donatrici con profilo gaussiano: $C(x) = C_p \exp[-(x/\sqrt{2}\sigma)^2]$, con massimo alla superficie.

Si approssimi la gaussiana con la funzione $N_d(x) = a - be^{cx}$, imponendo che la nuova funzione coincida con quella originaria in $x = 0, \sigma, 2\sigma$.

Mantenendo costanti $d = 1 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ e $C_p = 1 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$, si traccino gli andamenti di $N_d - N_a$, del campo elettrico e del potenziale all'interno della giunzione (con l'ipotesi di completo svuotamento) facendo variare la varianza σ nel campo $0,1 \mu\text{m} \div 0,5 \mu\text{m}$. La giunzione può essere approssimata con una giunzione a profilo lineare?

Dai risultati del problema ?? si ha per l'approssimazione del profilo gaussiano che a, b, c possono essere calcolate come

$$\begin{aligned} c &= 0,1803/\sigma \\ b &= C_p \frac{1 - e^{-1/2}}{e^{c\sigma} - 1} \\ a &= C_p + b \end{aligned}$$

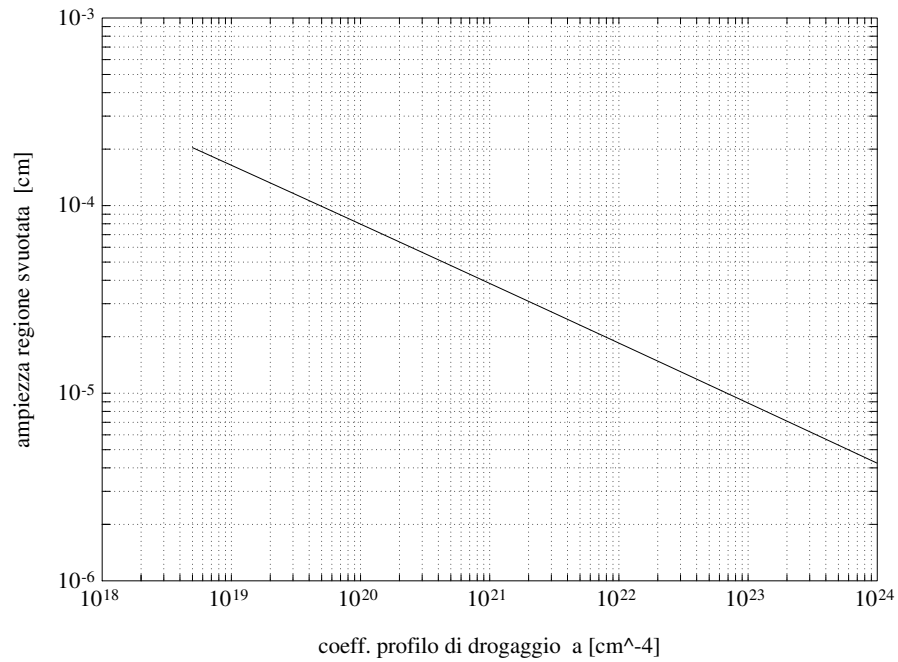


Figura 8.7: Ampiezza della regione svuotata in funzione di a .

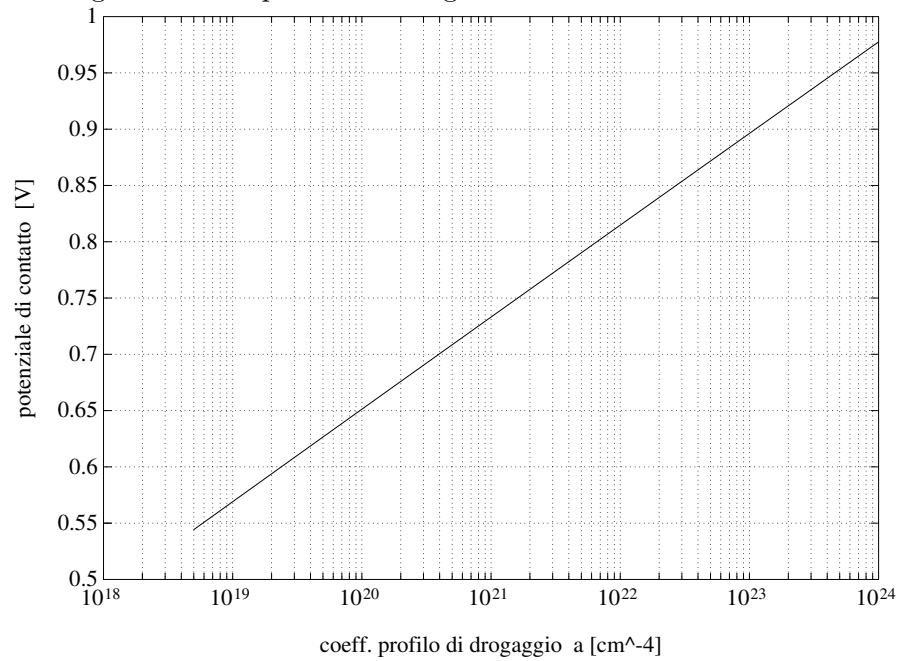


Figura 8.8: Potenziale di contatto in funzione di a .

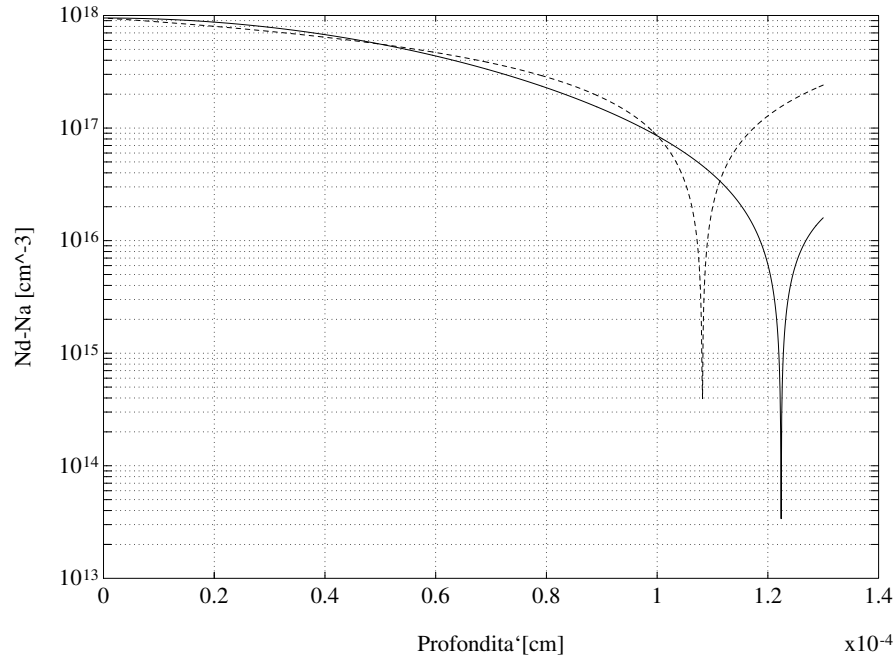


Figura 8.9: Profilo di drogaggio gaussiano per $\sigma = 0,5 \mu\text{m}$ (linea continua) e approssimazione esponenziale (linea tratteggiata).

L'espressione per il profilo di drogaggio è quindi data da

$$N_d - N_a = (a - d) - be^{cx}$$

che eguagliata a 0 porta alla valutazione della profondità di giunzione

$$x_j = \frac{1}{c} \ln \left(\frac{a - d}{b} \right)$$

Nella figura 8.9 sono illustrati gli andamenti dei profili di drogaggio al variare di σ . Applicando il metodo generale per lo studio della giunzione p-n, illustrato nei problemi precedenti, si ottiene (nell'ipotesi di completo svuotamento) un sistema di 3 equazioni non lineari nelle 3 incognite x_n , x_p , e ϕ_i :

Neutralità:

$$\int_{x_j - x_n}^{x_j} q(a - d) - qb e^{cx} dx = - \int_{x_j}^{x_j + x_p} q(a - d) - qb e^{cx} dx$$

$$q(a - d)x_n - q\frac{b}{c} e^{cx_j} + q\frac{b}{c} e^{c(x_j - x_n)} = - \left[q(a - d)x_p - q\frac{b}{c} e^{c(x_j + x_p)} + q\frac{b}{c} e^{cx_j} \right]$$

$$q(a - d)x_n + q\frac{b}{c} e^{cx_j} (e^{-cx_n} - 1) = - \left[q(a - d)x_p - q\frac{b}{c} e^{cx_j} (e^{cx_p} - 1) \right]$$

Sostituendo per x_j l'espressione sopra scritta, si ha

$$\left[x_n + \frac{1}{c} (e^{-cx_n} - 1) \right] = - \left[x_p - \frac{1}{c} (e^{cx_p} - 1) \right]$$

Distribuzione di carica:

$$\text{lato n} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}(x) = \int_{x_j-x_n}^x \frac{q}{\epsilon_s} [(a-d) - b e^{cx}] dx + \mathcal{E}(x_j - x_n) \\ = \frac{q}{\epsilon_s} \left[(a-d)(x - x_j + x_n) - \frac{b}{c} e^{cx} + \frac{b}{c} e^{c(x_j-x_n)} \right] + 0 \\ = \frac{q}{\epsilon_s} \left[(a-d)(x_n - x_j) + \frac{b}{c} e^{c(x_j-x_n)} + (a-d)x - \frac{b}{c} e^{cx} \right] \\ \phi(x) = \int_{x_j-x_n}^x -\frac{q}{\epsilon_s} \left[(a-d)(x_n - x_j) + \frac{b}{c} e^{c(x_j-x_n)} + (a-d)x - \frac{b}{c} e^{cx} \right] dx + \phi(x_j - x_n) \\ = -\frac{q}{\epsilon_s} \left\{ \left[(a-d)(x_n - x_j) + \frac{b}{c} e^{c(x_j-x_n)} \right] (x - x_j + x_n) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (a-d) [x^2 - (x_j - x_n)^2] - \frac{b}{c^2} (e^{cx} - e^{c(x_j-x_n)}) \right\} \end{array} \right.$$

Si calcola il potenziale alla giunzione ($x = x_j$) e si sostituisce l'espressione di x_j :

$$\begin{aligned} \phi(x_j) &= -\frac{q}{\epsilon_s} \left\{ (a-d) \frac{x_n^2}{2} + \frac{b}{c} e^{cx_j} \left[e^{-cx_n} \left(x_n + \frac{1}{c} \right) - \frac{1}{c} \right] \right\} \\ &= -\frac{q}{\epsilon_s} (a-d) \left\{ \frac{x_n^2}{2} + \frac{1}{c} \left[e^{-cx_n} \left(x_n + \frac{1}{c} \right) - \frac{1}{c} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\text{lato p} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}(x) = \int_{x_j+x_p}^x \frac{q}{\epsilon_s} [(a-d) - b e^{cx}] dx + \mathcal{E}(x_j + x_p) \\ = \frac{q}{\epsilon_s} \left[(a-d)(x - x_j - x_p) - \frac{b}{c} e^{cx} + \frac{b}{c} e^{c(x_j+x_p)} \right] + 0 \\ = \frac{q}{\epsilon_s} \left[-(a-d)(x_j + x_p) + \frac{b}{c} e^{c(x_j+x_p)} + (a-d)x - \frac{b}{c} e^{cx} \right] \\ \phi(x) = \int_{x_j}^x -\frac{q}{\epsilon_s} \left[-(a-d)(x_j + x_p) + \frac{b}{c} e^{c(x_j+x_p)} + \right. \\ \left. + (a-d)x - \frac{b}{c} e^{cx} \right] dx + \phi(x_j) \\ = -\frac{q}{\epsilon_s} \left\{ \left[-(a-d)(x_j + x_p) + \frac{b}{c} e^{c(x_j+x_p)} \right] (x - x_j) + \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (a-d) [x^2 - x_j^2] - \frac{b}{c^2} (e^{cx} - e^{cx_j}) \right\} + \phi(x_j) \end{array} \right.$$

Si calcola il potenziale per $x = x_j + x_p$: di x_j ,

$$\begin{aligned} \phi(x_j + x_p) &= \phi(x_j) - \frac{q}{\epsilon_s} \left\{ (a-d) \frac{-x_p^2}{2} + \frac{b}{c} e^{cx_j} \left[e^{cx_p} \left(x_p - \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{c} \right] \right\} \\ &= \phi(x_j) - \frac{q}{\epsilon_s} (a-d) \left\{ -\frac{x_p^2}{2} + \frac{1}{c} \left[e^{cx_p} \left(x_p - \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{c} \right] \right\} \end{aligned}$$

Sostituendo il valore di $\phi(x_j)$ si arriva all'espressione per il potenziale di contatto

$$\phi_i = -\frac{q}{\epsilon_s} (a-d) \left\{ \frac{x_n^2 - x_p^2}{2} + \frac{1}{c} \left[e^{-cx_n} \left(x_n + \frac{1}{c} \right) + e^{cx_p} \left(x_p - \frac{1}{c} \right) \right] \right\}$$

Differenza dei lavori di estrazione:

$$\begin{aligned}\phi_i &= -\frac{kT}{q} \ln \left\{ -\frac{[(a-d) - b e^{c(x_j-x_n)}] [(a-d) - b e^{c(x_j+x_p)}]}{n_i^2} \right\} \\ &= -\frac{kT}{q} \ln \left\{ -\frac{[(a-d)^2 (1 - e^{-cx_n}) (1 - e^{cx_p})]}{n_i^2} \right\}\end{aligned}$$

Riassumendo i risultati ottenuti, si ha un sistema non lineare con le incognite x_n, x_p, ϕ_i nelle equazioni

$$\begin{cases} x_n + \frac{1}{c} e^{-cx_n} + x_p - \frac{1}{c} e^{cx_p} & = 0 \\ \frac{q}{\epsilon_s} (a-d) \left\{ \frac{x_n^2 - x_p^2}{2} + \frac{1}{c} \left[e^{-cx_n} \left(x_n + \frac{1}{c} \right) + e^{cx_p} \left(x_p - \frac{1}{c} \right) \right] \right\} + \phi_i & = 0 \\ V_T \cdot \ln \left\{ -\frac{[(a-d)^2 (1 - e^{-cx_n}) (1 - e^{cx_p})]}{n_i^2} \right\} + \phi_i & = 0 \end{cases}$$

Si applicano i metodi proposti nell'appendice di analisi numerica per la soluzione di sistemi di equazioni non lineari e si scrive lo Jacobiano

$$\underline{A} = \begin{vmatrix} 1 - e^{-cx_n} & 1 - e^{cx_p} & 0 \\ \frac{q(a-d)}{\epsilon_s} \left\{ x_n + e^{-cx_n} \left(\frac{1}{c} - x_n \right) \right\} & \frac{q(a-d)}{\epsilon_s} \left\{ -x_p + e^{cx_p} \left(\frac{1}{c} + x_p \right) \right\} & +1 \\ +V_T \cdot \frac{c e^{-cx_n}}{(1 - e^{-cx_n})} & -V_T \cdot \frac{c e^{-cx_n}}{(1 - e^{-cx_n})} & +1 \end{vmatrix}$$

dove x_n, x_p, ϕ_i sono i valori correnti delle tre variabili; se si indicano con x'_n, x'_p, ϕ'_i i valori al passo di iterazione successivo, il vettore delle incognite è

$$\begin{vmatrix} x'_n - x_n \\ x'_p - x_p \\ \phi'_i - \phi_i \end{vmatrix}$$

e il vettore dei termini noti è

$$-\begin{bmatrix} x_n + \frac{1}{c} e^{-cx_n} + x_p - \frac{1}{c} e^{cx_p} \\ \frac{q}{\epsilon_s} (a-d) \left\{ \frac{x_n^2 - x_p^2}{2} + \frac{1}{c} \left[e^{-cx_n} \left(x_n + \frac{1}{c} \right) + e^{cx_p} \left(x_p - \frac{1}{c} \right) \right] \right\} + \phi_i \\ V_T \cdot \ln \left\{ -\frac{[(a-d)^2 (1 - e^{-cx_n}) (1 - e^{cx_p})]}{n_i^2} \right\} + \phi_i \end{bmatrix}$$

Si riporta il nucleo del programma C che risolve il sistema.

```
PROGRAMMA C
#define q          1.6e-19
#define es         1.0359e-12
#define ni         1.45e10
main(argc, argv)
int argc;
Char *argv[];
{
.....
c = 0.1803 / sigma;
b = cp * ((1 - exp(-1.0 / 2)) / (exp(c * sigma) - 1));
a = cp + b;
xj = 1 / c * log((a - d) / b);
XE1 = xn;
XE2 = xp;
XE3 = phi;
xnn = xn;
xpn = xp;
phin = phi;
N = 0;
while (XE1 + XE2 + XE3 > 1e-8) {
xn = xnn;
xp = xpn;
phi = phin;
N++;
j11 = 1 - exp(-c * xn);
j12 = 1 - exp(c * xp);
j13 = 0.0;
j21 = q * (a - d) / es * (xn + exp(-c * xn) * (1 / c - xn));
j22 = q * (a - d) / es * (exp(c * xp) * (1 / c + xp) - xp);
j23 = 1.0;
j31 = 0.026 * c * exp(-c * xn) / (1 - exp(-c * xn));
j32 = -0.026 * c * exp(c * xp) / (1 - exp(c * xp));
j33 = 1.0;
f1 = xn + 1 / c * exp(-c * xn) + xp - 1 / c * exp(c * xp);
f21 = exp(-c * xn) * (xn + 1 / c);
f22 = exp(c * xp) * (xp - 1 / c);
f23 = (xn * xn - xp * xp) / 2;
f2 = q * (a - d) / es * (f23 + 1 / c * (f21 + f22)) + phi;
f3 = 0.026 * log((d - a) / ni * ((a - d) / ni) * (1 - exp(-c * xn)) *
(1 - exp(c * xp))) + phi;
n1 = j11 * xn + j12 * xp + j13 * phi - f1;
n2 = j21 * xn + j22 * xp + j23 * phi - f2;
n3 = j31 * xn + j32 * xp + j33 * phi - f3;
det = j11 * j22 * j33 - j11 * j23 * j32 - j12 * j21 * j33 +
j12 * j23 * j31 + j13 * j21 * j32 - j13 * j22 * j31;
detxn = n1 * j22 * j33 - n1 * j23 * j32 - j12 * n2 * j33 +
j12 * j23 * n3 + j13 * n2 * j32 - j13 * j22 * n3;
detxp = j11 * n2 * j33 - j11 * j23 * n3 - n1 * j21 * j33 +
n1 * j23 * j31 + j13 * j21 * n3 - j13 * n2 * j31;
detphi = j11 * j22 * n3 - j11 * n2 * j32 - j12 * j21 * n3 +
j12 * n2 * j31 + n1 * j21 * j32 - n1 * j22 * j31;
xnn = detxn / det;
xpn = detxp / det;
phin = detphi / det;
if (xnn - xn > 0) XE1 = xnn - xn; else XE1 = xn - xnn;
if (xpn - xp > 0) XE2 = xpn - xp; else XE2 = xp - xpn;
```



```

if (phin - phi > 0) XE3 = phin - phi; else XE3 = phi - phin;
}
printf(xn=% .5Exp=% .5Ephi=% .5EN= exit(0);
}

```

Risolvendo con il metodo di Cramer il sistema lineare ottenuto e iterando si ottengono, al variare di σ , i seguenti risultati⁴

σ	x_j	x_n	x_p	$w = x_n + x_p$	ϕ
0.1	0,216	0,0551	0,0534	0,1085	-0,873
0.2	0,432	0,0684	0,0670	0,1354	-0,848
0.3	0,648	0,0777	0,0765	0,1542	-0,834
0.4	0,865	0,0850	0,0840	0,1690	-0,824
0.5	1,081	0,0912	0,0902	0,1814	-0,816

σ	$a(\text{cm}^{-4})$	w_{lin}	ϕ_{lin}
0.1	4,398e22	0,1152	-0,867
0.2	2,199e22	0,1438	-0,842
0.3	1,466e22	0,1637	-0,828
0.4	1,098e22	0,1795	-0,818
0.5	8,788e21	0,1927	-0,810

Nella seconda tabella sono riportati i valori delle larghezze delle regioni svuotate w_{lin} e dei potenziali di contatto ϕ_{lin} nel caso si approssimi la giunzione studiata con un profilo lineare con gradiente pari ad a e con lo stesso valore del drogaggio reale in superficie. Nelle figure 8.10 e 8.11 sono illustrati gli andamenti del campo elettrico e del potenziale all'interno della giunzione al variare di σ .

8.2 Effetti capacitivi

8.2.1

Calcolare la capacità di transizione di una giunzione p-n con profilo di drogaggio graduale a variazione lineare.

8.2.2

È dato un substrato di silicio drogato di tipo p con $N_a = 9 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$. Si effettua una diffusione di fosforo con $N_d = 3 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ per realizzare una giunzione p-n con profilo di drogaggio lineare, $N(x) = N_d - N_a = ax$ con $a = 0,8 \text{ cm}^{-4}$.

Si calcolino e si riportino su di un grafico a) il profilo di drogaggio, b) l'intensità del campo elettrico, c) il potenziale e d) la capacità di svuotamento in funzione della tensione applicata esternamente alla giunzione.

8.2.3

Si calcoli la capacità per piccolo segnale di un diodo al silicio, ideale, a base lunga, in cui $N_d = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$, $N_a = 3 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$, $\tau_n = \tau_p = 5 \cdot 10^{-8} \text{ s}$. L'area della sezione trasversale è $A = 10^{-4} \text{ cm}^2$.

Si considerino due polarizzazioni dirette di 0,1 V e 0,6 V e due polarizzazioni inverse di 0,5 V e 15 V alla temperatura $T = 300 \text{ K}$.

⁴Le lunghezze sono espresse in micron, i potenziali in volt.

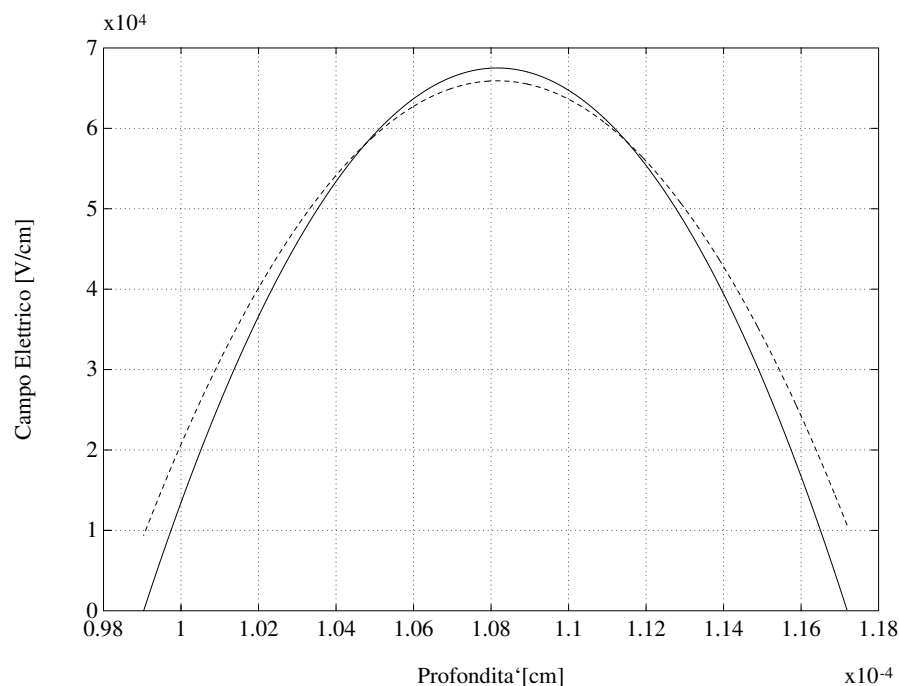


Figura 8.10: Intensità del campo elettrico per $\sigma = 0,5 \mu\text{m}$ nel caso gaussiano (curva continua) e del campo ottenuto approssimando la distribuzione in modo lineare (curva tratteggiata).

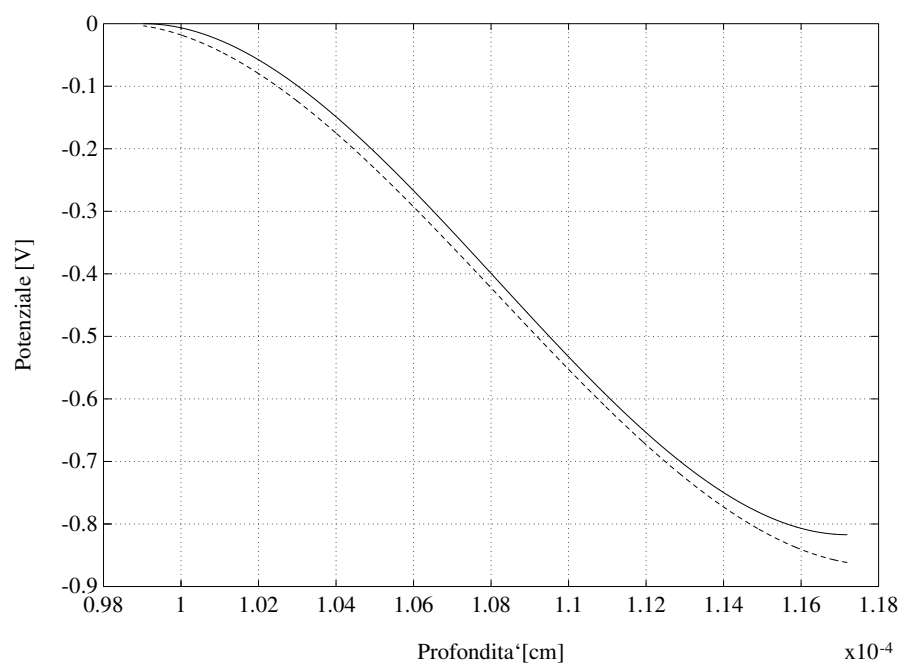


Figura 8.11: Andamento del potenziale per $\sigma = 0,5 \mu\text{m}$ nel caso gaussiano (curva continua) e del campo ottenuto approssimando la distribuzione in modo lineare (curva tratteggiata).

8.2.4

Si progetti un varactor, usato come dispositivo a capacità variabile accordabile in tensione per la sintonia in circuiti a microonde, usando un diodo p^+-n al silicio con drogaggio uniforme. Il circuito richiede una variazione di capacità tra 1 pF e 3 pF. Il campo massimo che si può applicare è $-\mathcal{E}_{\max} = 300 \text{ kV/cm}$ e la tensione inversa deve essere al massimo $V_{a\max} = 5 \text{ V}$.

Se il potenziale di contatto è $\phi_i = 0,8 \text{ V}$, si determini la concentrazione di drogaggio e l'area della giunzione.

Se il drogaggio è uniforme e asimmetrico la carica spaziale positiva si estende per una profondità x_d dalla giunzione unicamente entro il lato n del semiconduttore. La carica è costante con x , quindi il campo elettrico presenta una pendenza costante cioè ha una variazione lineare

$$\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_{\max} \left(1 - \frac{x}{x_d} \right)$$

il suo valore massimo in $x = 0$ è

$$\mathcal{E}_{\max} = -\frac{qN_d x_d}{\epsilon_S}$$

L'area della curva del campo elettrico rappresenta la tensione $\phi_i - V_a$ localizzata ai capi della regione svuotata, per cui

$$\phi_i - V_a = -\frac{1}{2} \mathcal{E}_{\max} x_d \quad \text{e} \quad x_d = \sqrt{\frac{2\epsilon_S (\phi_i - V_a)}{qN_d}}$$

La capacità differenziale in una giunzione p-n è legata alla variazione della carica di svuotamento in funzione della tensione applicata.

$$C = \left| \frac{dQ_S}{dV_a} \right| = \frac{1}{2} A \frac{2qN_d \epsilon_S}{\sqrt{2qN_d \epsilon_S (\phi_i - V_a)}} = A \sqrt{\frac{qN_d \epsilon_S}{2(\phi_i - V_a)}}$$

Le condizioni di tensione e di campo massimo concernono il valore di capacità più piccolo. Dall'espressione dello spessore della regione svuotata, che in tale situazione è massimo, si scrive

$$\frac{qN_d}{2\epsilon_S} x_{d,\max}^2 \leq \phi_i + V_{\max}$$

e nello stesso tempo si ha

$$\frac{qN_d x_{d,\max}}{\epsilon_S} \leq -\mathcal{E}_{\max}$$

Da queste due equazioni si ottiene

$$N_d \geq \frac{\epsilon_S \mathcal{E}_{\max}^2}{2q(\phi_i + V_{\max})} = \frac{11,7 \times 8,854 \cdot 10^{-14} \times (3 \cdot 10^4)^2}{2 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times 5,8} = 5,02 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$$

Di conseguenza vale

$$x_{d,\max} \leq \frac{\epsilon_S |\mathcal{E}_{\max}|}{qN_d} = 0,387 \text{ } \mu\text{m}$$

da cui

$$C = \epsilon_S \frac{A}{x_d} \longrightarrow A = C \frac{x_{d,\max}}{\epsilon_S} = 3,73 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-2}$$

Resta da verificare che il valore maggiore sia raggiungibile; dividendo le espressioni delle capacità per due diversi valori di tensione, si ottiene

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{x_{d2}}{x_{d1}} = \sqrt{\frac{\phi_i - V_2}{\phi_i - V_1}}$$

nel caso in esame

$$\begin{aligned} \frac{C_1}{C_2} &= \frac{1}{3} = \sqrt{\frac{\phi_i - V_2}{5,8}} \longrightarrow \phi_i - V_2 = 0,644 \text{ V} \\ V_2 &= 0,156 \text{ V} \end{aligned}$$

Il valore massimo della capacità si ottiene in polarizzazione diretta: questo è accettabile soltanto perché la tensione necessaria risulta piccola rispetto alla tensione di soglia del dispositivo.

8.3 Giunzione fuori equilibrio

8.3.1

Usando il concetto di pseudo-livello di Fermi, ricordato nel capitolo 5, si trovi il legame tra la tensione applicata a una giunzione e la concentrazione in eccesso di portatori minoritari ai suoi capi.

L'applicazione di un potenziale esterno modifica l'aspetto del diagramma a bande rispetto a quello presentato all'equilibrio termodinamico e non è più possibile introdurre un livello di Fermi. In condizioni di basso livello di iniezione, si possono definire uno *pseudo-livello di Fermi* per gli elettroni E_{Fn} e uno per le lacune E_{Fp} , immaginando che sussista per ciascuna delle due popolazioni, considerate separatamente, una condizione di equilibrio.

$$\begin{aligned} n &= n_i \exp\left(\frac{E_{Fn} - E_{Fi}}{kT}\right) \\ p &= n_i \exp\left(\frac{E_{Fi} - E_{Fp}}{kT}\right) \end{aligned}$$

La giunzione è polarizzata inversamente se si applica il polo negativo sul lato p e quello positivo sul lato n; ciò comporta che i livelli energetici del lato n del semiconduttore si abbassino rispetto a quelli del lato p. In polarizzazione diretta si hanno versi opposti e la barriera diminuisce.

Il salto energetico tra i due pseudolivelli di Fermi degli elettroni è esattamente pari a qV_a , dove V_a è la tensione applicata esternamente.

$$qV_a = E_{Fn} - E_{Fp}$$

La legge dell'azione di massa diventa

$$pn = n_i^2 \exp\left(\frac{E_{Fn} - E_{Fp}}{kT}\right) = n_i^2 \exp\left(\frac{V_a}{V_T}\right)$$

Se nel lato p la regione svuotata si estende fino a $x = -x_p$ e dato che in condizioni di basso livello di iniezione è $p_p(x) \simeq p_{p0}$, si ha

$$\begin{aligned} p_p(-x_p)n_p(-x_p) &= p_{p0}n_{p0} \exp\left(\frac{V_a}{V_T}\right) \\ n_p(-x_p) &= n_{p0} \exp\left(\frac{V_a}{V_T}\right) \end{aligned}$$

Analogamente nel lato n, se x_n è la sezione in cui termina la regione svuotata,

$$\begin{aligned}n_n(x_n)p_n(x_n) &= n_{n0}p_{n0} \exp\left(\frac{V_a}{V_T}\right) \\p_n(x_n) &= p_{n0} \exp\left(\frac{V_a}{V_T}\right)\end{aligned}$$

Le equazioni trovate costituiscono la *legge della giunzione*.

8.3.2

Si abbia una giunzione p-n brusca con i parametri

- lato p: livello di drogaggio $N_a = 5 \times 10^{16} \text{ cm}^{-3}$, lunghezza $w_p = 10 \text{ }\mu\text{m}$;
 - lato n: livello di drogaggio $N_d = 3 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$, lunghezza $w_n = 1000 \text{ }\mu\text{m}$;
 - $\tau_n = \tau_p = 2,5 \text{ }\mu\text{s}$.
1. Si valutino le grandezze che permettono di tracciare il diagramma a bande in condizioni di equilibrio termodinamico.
 2. Si determinino, a partire dall'equazione di continuità, le espressioni delle concentrazioni dei portatori minoritari e delle correnti attraverso la giunzione.
 3. Si calcoli la densità di corrente inversa della giunzione e si valutino gli andamenti delle densità di corrente per una tensione diretta $V_a = 0,6 \text{ V}$.
 4. Come si modificano le correnti, se all'interno della regione di svuotamento si ha una ricombinazione pari al 30 % della corrente di elettroni iniettata nel lato n?

Dalla conoscenza del drogaggio si ottengono i livelli energetici che delimitano della banda di valenza nel lato p e della banda di conduzione nel lato n

$$\begin{aligned}E_F - E_{Vp} &= kT \ln \frac{N_V}{N_a} = 0,026 \times \ln \frac{1,04 \cdot 10^{19}}{5 \cdot 10^{16}} = 0,138 \text{ eV} \\E_{Cn} - E_F &= kT \ln \frac{N_C}{N_d} = 0,026 \times \ln \frac{2,8 \times 10^{19}}{3 \cdot 10^{17}} = 0,1179 \text{ eV}\end{aligned}$$

e i potenziali

$$\begin{aligned}q\phi_i &= kT \ln \frac{N_a N_d}{n_i^2} = 0,026 \times \ln \frac{5 \cdot 10^{16} \times 3 \cdot 10^{17}}{(1,45 \cdot 10^{10})^2} = 0,829 \text{ eV} \\q\phi_{sn} &= q\chi + kT \ln \frac{N_C}{N_d} = 4,05 + 0,1179 = 4,168 \text{ eV} \\q\phi_{sp} &= q\phi_i + q\phi_{sn} = 4,997 \text{ eV}\end{aligned}$$

da cui si hanno le estensioni della regione svuotata nei due lati della giunzione

$$\begin{aligned}
 N_{\text{eq}} &= \frac{1}{\frac{1}{N_a} + \frac{1}{N_d}} = \frac{1}{\frac{1}{5 \cdot 10^{16}} + \frac{1}{3 \cdot 10^{17}}} = 4,28 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3} \\
 x_d |_{V_a=0} &= \sqrt{\frac{2\epsilon_s}{q} \frac{1}{N_{\text{eq}}} \phi_i} = \sqrt{\frac{2 \times 11,7 \times 8,854 \cdot 10^{-14}}{1,6 \cdot 10^{-19} \times 4,28 \cdot 10^{16}}} \times 0,829 \\
 &= 1,58 \cdot 10^{-5} = 0,158 \mu\text{m} \\
 x_n &= \sqrt{\frac{2\epsilon_s}{q} \frac{N_a + N_d}{N_a N_d} \frac{N_a^2}{(N_a + N_d)^2} \phi_i} = \sqrt{\frac{2\epsilon_s}{q} \frac{1}{N_a + N_d} \frac{N_a}{(N_d)}} \phi_i \\
 &= \sqrt{\frac{2 \times 11,7 \times 8,854 \cdot 10^{-14}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \frac{1}{(5 \cdot 10^{16} + 3 \cdot 10^{17})} \frac{5 \cdot 10^{16}}{3 \cdot 10^{17}}} 0,829 \\
 &= 0,0224 \mu\text{m} \\
 x_p &= \sqrt{\frac{2 \times 11,7 \times 8,854 \cdot 10^{-14}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \frac{3 \cdot 10^{17}/5 \cdot 10^{16}}{(5 \cdot 10^{16} + 3 \cdot 10^{17})}} 0,829 = 0,135 \mu\text{m}
 \end{aligned}$$

Per la valutazione delle correnti, si mettono in tabella le proprietà dei due lati semiconduttori, partendo dai valori della mobilità, che si ottiene dal drogaggio, e della diffusività, ottenuta tramite la relazione di Einstein:

	<u>Lato n</u>		<u>Lato p</u>
μ_p	$= 471 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$	μ_n	$= 1417 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$
D_p	$= kT/q \mu_p = 12,24 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$	D_n	$= kT/q \mu_n = 36,84 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$
τ_p	$\simeq 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ s}$	τ_n	$\simeq 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ s}$
L_p	$= \sqrt{D_p \tau_p} = \sqrt{12,24 \times 2,5 \cdot 10^{-6}}$ $= 55,31 \mu\text{m}$	L_n	$= \sqrt{D_n \tau_n} = \sqrt{36,84 \times 2,5 \cdot 10^{-6}}$ $= 95,96 \mu\text{m}$
w_n	$= 1000 \mu\text{m} \rightarrow w_n \gg L_p$	w_p	$= 10 \mu\text{m} \rightarrow w_p \ll L_n$
$p'(x)$	$= p'(x_n) \exp\left(-\frac{x-x_n}{L_p}\right)$	$n'(x)$	$= n'(-x_p) \left[1 + \frac{x+x_p}{w_p-x_p}\right]$
$p'(x_n)$	$= p_{n0} \exp(V_a/V_T - 1)$	$n'(-x_p)$	$= n_{p0} \exp(V_a/V_T - 1)$
$J_{p,\text{diff}}$	$= -qD_p \text{ dp}'/\text{dx}$	$J_{n,\text{diff}}$	$= qD_n \text{ dn}'/\text{dx}$

La corrente totale nella giunzione si può approssimare come somma delle correnti di diffusione ai capi della giunzione (si trascurano le correnti di generazione e ricombinazione nella regione svuotata)

$$\begin{aligned}
 J_n(-x_p) &= q n_i^2 \frac{D_n}{N_a} \frac{1}{w_p - x_p} \left(e^{V_a/V_T} - 1 \right) \\
 J_p(x_n) &= q n_i^2 \frac{D_p}{N_d} \frac{1}{L_p} \left(e^{V_a/V_T} - 1 \right) \\
 J_{\text{tot}} &= J_p(x_n) + J_n(-x_p) = q n_i^2 \left[\frac{D_n}{N_a} \frac{1}{w_p - x_p} + \frac{D_p}{N_d} \frac{1}{L_p} \right] \left(e^{V_a/V_T} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

In assenza di polarizzazione la corrente è nulla. Con polarizzazione inversa l'esponenziale diventa trascurabile e la corrente tende al valore costante $I = -I_0$ (corrente di

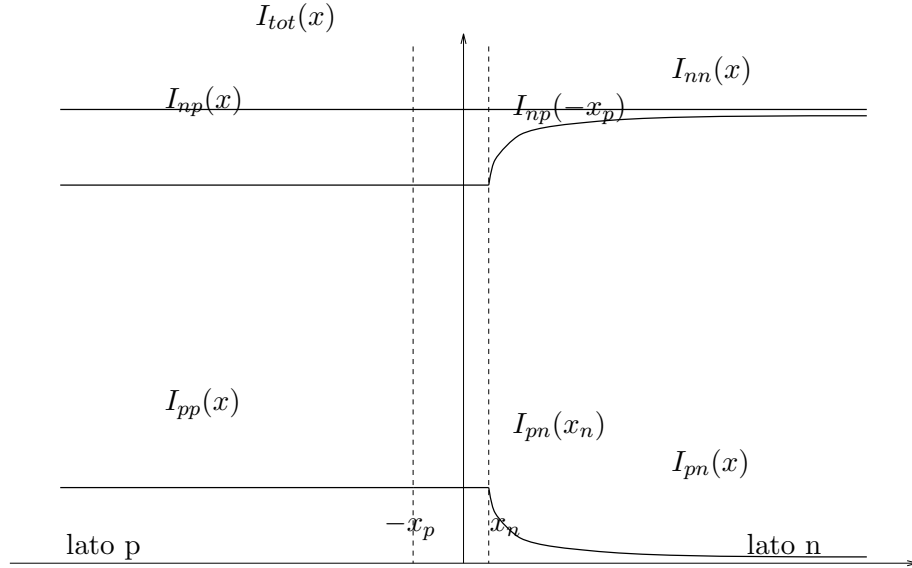


Figura 8.12: Andamento delle correnti all'interno della giunzione.

saturazione inversa)

$$\begin{aligned} I_0 &= q n_i^2 \left[\frac{1}{N_a} \frac{D_n}{w_p - x_p} + \frac{1}{N_d} \frac{D_p}{L_p} \right] = \frac{2,47 \cdot 10^{-14}}{9,92 \cdot 10^{-4}} + \frac{1,372 \cdot 10^{-15}}{55,31 \cdot 10^{-4}} \\ &= 2,5 \cdot 10^{-11} \text{ A/cm}^2 = 25 \text{ pA/cm}^2 \end{aligned}$$

Con polarizzazione diretta e, in particolare con $V_a = 0,6 \text{ V}$, cambia l'estensione x_p della regione svuotata nel lato p che interviene nella formula della corrente

$$\begin{aligned} x_p |_{V_a \neq 0} &= \sqrt{\frac{2\epsilon_s}{q} \frac{1}{N_a + N_d} \frac{N_d}{N_a} (\phi_i - V_a)} \\ x_p |_{V_a = 0,6} &= \sqrt{2,20 \cdot 10^{-10} \times (0,829 - 0,6)} \\ &= \sqrt{2,20 \cdot 10^{-10} \times (0,229)} = 0,071 \mu\text{m} \end{aligned}$$

e la corrente totale

$$\begin{aligned} J_n(-x_p) &= 1,6 \cdot 10^{-19} \times (1,45 \cdot 10^{10})^2 \times \frac{36,84}{5 \cdot 10^{16}} \times \\ &\times \frac{1}{(10 - 0,071) \times 10^{-4}} \times \left[\exp\left(\frac{0,6}{0,026}\right) - 1 \right] = 285 \text{ mA/cm}^2 \\ J_p(x_n) &= 1,6 \cdot 10^{-19} \times (1,45 \cdot 10^{10})^2 \times \frac{12,24}{3 \cdot 10^{17}} \times \\ &\times \frac{1}{55,31 \cdot 10^{-4}} \times \left[\exp\left(\frac{0,6}{0,026}\right) - 1 \right] = 2,85 \text{ mA/cm}^2 \end{aligned}$$

La densità di corrente totale, in assenza di ricombinazione vale

$$J_{\text{tot}} = 0,290 \text{ A/cm}^2$$

Il diagramma delle correnti è riportato nella figura 8.12. Imponendo che la corrente di ricombinazione sia pari al 30% della corrente di elettroni nel lato p, si ha

$$\begin{aligned} J_n(-x_p) &= 0,3 \times 0,287 = 0,0855 \text{ A/cm}^2 \\ J_{\text{tot}} &= 0,287 + 0,0855 + 0,00285 = 0,3753 \text{ A/cm}^2 \end{aligned}$$

8.3.3

Si abbia un diodo a giunzione brusca e asimmetrica p^+-n , l'area della sezione trasversale è $A = 2 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-2}$ e le due regioni sono lunghe in modo eguale $w_n = w_p = 6 \text{ }\mu\text{m}$. La regione p ha drogaggio uniforme, con $N_a = 10^{19} \text{ cm}^{-3}$, mentre nella regione di tipo n si ha un profilo di drogaggio di tipo esponenziale

$$N_d(x) = N_d(0) e^{-\alpha x/w_n}$$

con $N_d(0) = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ e, all'estremità del diodo, $N_d(w_n) = 10^{14} \text{ cm}^{-3}$.

1. Discutere la validità del concetto di quasi neutralità nella regione n: si verifichi se esiste un campo elettrico.
2. Con una polarizzazione diretta $V_a = 550 \text{ mV}$ si determinino
 - la densità di corrente e , in particolare nella regione n, la densità di corrente di diffusione degli elettroni;
 - l'espressione della densità della corrente di portatori minoritari nel lato n, osservando che il drogaggio non è costante e si deve integrare l'espressione della corrente lungo l'intera regione neutra;
 - le intensità delle due correnti di portatori minoritari (elettroni I_{np} nel lato p e lacune I_{pn} nel lato n) ai due lati della zona di carica spaziale e il loro rapporto $\gamma = I_{pn}/I_{np}$, detto "efficienza di iniezione" della giunzione per le lacune;
 - l'espressione dei portatori minoritari nel lato n, usando l'espressione della densità di corrente del punto precedente e integrando tra la sezione x sino alla fine della regione;
 - la carica totale iniettata nella regione n e il tempo di transito τ_p .
3. Con una polarizzazione inversa si determini
 - l'espressione del campo elettrico, immaginando che la regione svuotata si estenda in tutta la regione neutra;
 - la massima tensione applicabile alla giunzione in tale situazione limite;
 - il tempo di immagazzinamento, supponendo che il diodo commuti dalla polarizzazione diretta del punto precedente alla tensione inversa dello stesso valore: $V_r = 0,55 \text{ V}$.

Si assuma che le mobilità siano costanti: nel lato p $\mu_n = 100 \text{ cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$ e $\mu_p = 30 \text{ cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$, nel lato n $\mu_n = 500 \text{ cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$ e $\mu_p = 100 \text{ cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$

a)

Secondo l'ipotesi di quasi neutralità, in ogni sezione x il numero degli elettroni è pari al numero di donatori ionizzati: $n_n(x) = N_d^+(x) \simeq N_d(x)$. Se esiste un campo elettrico questo è espresso da

$$\mathcal{E}(x) = \frac{1}{q} \frac{dE_C}{dx}$$

e dall'espressione del livello di Fermi si ha

$$E_F = E_C - kT \ln \frac{N_C}{N_d} ; \quad E_C(x) = E_F + kT \ln \frac{N_C}{N_d(x)}$$

$$\mathcal{E}(x) = -\frac{kT}{q} \frac{1}{N_d(x)} \frac{dN_d(x)}{dx} = -\frac{V_T}{N_d(x)} \frac{dN_d(x)}{dx} = -\frac{V_T \alpha}{w_n}$$

Il valore di α si trova conoscendo la concentrazione in due punti

$$\alpha = \ln \left(\frac{N_d(0)}{N_d(w_n)} \right) = 6,91$$

Il profilo di impurità esponenziale induce nella regione quasi neutra n un campo elettrico costante diretto dalla giunzione verso la regione n. Si noti che questo campo facilita lo spostamento delle lacune di minoranza verso il lato n.

$$\mathcal{E} = -\frac{V_T \alpha}{w_n} = 298,3 \text{ V/cm}$$

b)

La densità di corrente dei portatori maggioritari è

$$J_n(x) = qn_n\mu_n\mathcal{E} + qD_n \frac{dn_n}{dx} = qN_d(x)\mu_n\mathcal{E} + qD_n \frac{dN_d(x)}{dx}$$

dove si è fatta l'ipotesi di basso livello di iniezione: $n_n \simeq n_{n0} \simeq N_d(x)$. La densità di corrente dei portatori minoritari è

$$J_p(x) = qp_n\mu_p\mathcal{E} - qD_p \frac{dp_n}{dx}$$

A causa del profilo di drogaggio non uniforme e quindi della presenza di un campo elettrico, sono presenti contemporaneamente nella regione n quattro componenti di corrente. Sostituendo al campo il valore trovato, si ha

$$J_n(x) = qN_d(x)\mu_n \left(-\frac{V_T}{N_d(x)} \frac{dN_d(x)}{dx} \right) + qD_n \frac{dN_d(x)}{dx} = 0$$

La corrente totale dei portatori di maggioranza è nulla⁵: a ogni corrente di diffusione corrisponde una corrente, dovuta al campo elettrico locale, eguale e contraria. Il valore di ciascuna delle due componenti della corrente di elettroni alla giunzione è

$$qN_d(x)\mu_n\mathcal{E} = -qD_n \frac{dN_d}{dx} = 1,16 \cdot 10^{-19} \times 500 \times 10^{17} \times 298,3 = 2386,4 \text{ A/cm}^2$$

da cui

$$I_{n,\text{diff}} = 2386,4 \text{ A/cm}^2 \times 2 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2 = 0,48 \text{ A}$$

Si noti come si siano trascurate le correnti dei portatori maggioritari in eccesso che danno comunque luogo a correnti che si compensano. In conclusione, la corrente nella regione neutra n si riduce alla sola componente dei portatori minoritari, che sarà costante.

⁵Si mantiene, anche in presenza di una polarizzazione, la situazione di equilibrio.

Dall'espressione della corrente dei portatori di maggioranza si ha

$$\mathcal{E}(x) = -\frac{V_T}{n_n} \frac{dn_n}{dx}$$

La corrente dei portatori minoritari (che è costante) è

$$\begin{aligned} J_p &= qp_n\mu_p \left(-\frac{V_T}{n_n} \frac{dn_n}{dx} \right) - qD_p \frac{dp_n}{dx} \\ &= -q\mu_p V_T \frac{p_n}{n_n} \frac{dn_n}{dx} - qD_p \frac{dp_n}{dx} = -\frac{qD_p}{n_n} \left(p_n \frac{dn_n}{dx} + n_n \frac{dp_n}{dx} \right) \\ &= -\frac{qD_p}{n_n} \frac{d(p_n n_n)}{dx} \end{aligned}$$

Si integra la corrente nella regione neutra n tra $x = 0$ e x ($J_p = \text{cost}$)

$$J_p \int_0^x \frac{n_n}{qD_p} dx = - \int_0^x \frac{d(p_n n_n)}{dx} dx = p_n(0)n_n(0) - p_n(x)n_n(x) \quad (8.1)$$

Per $x = w_n$, cioè considerando l'intera regione n sino al contatto ohmico,

$$J_p \int_0^{w_n} \frac{n_n}{qD_p} dx = - \int_0^{w_n} \frac{d(p_n n_n)}{dx} dx = p_n(0)n_n(0) - p_n(w_n)n_n(w_n)$$

La corrente dei portatori minoritari dipende dalla differenza dei prodotti delle densità degli elettroni e delle lacune ai capi della regione neutra, divisa per la concentrazione dei portatori maggioritari integrata nella stessa regione. La legge della giunzione e il fatto che il diodo sia lungo consentono di scrivere

$$\begin{aligned} p_n(0)n_n(0) &= n_i^2 e^{V_a/V_T} \\ p_n(w_n)n_n(w_n) &\simeq 0 \end{aligned}$$

per cui, in condizioni di basso livello di iniezione, si ha

$$J_p = \frac{p_n(0)n_n(0) - p_n(w_n)n_n(w_n)}{\int_0^{w_n} \frac{n_n}{qD_p} dx} \simeq \frac{qn_i^2 e^{V_a/V_T}}{\int_0^{w_n} \frac{N_d(x)}{D_p} dx}$$

La diffusività presenta una debole dipendenza dal drogaggio, $D_p = D_p(x)$, perché la mobilità varia con il drogaggio. Assumendo per D_p un valor medio, indicato con $\overline{D_p}$, si ha in definitiva

$$J_p \simeq \frac{q\overline{D_p}n_i^2 e^{V_a/V_T}}{\int_0^{w_n} N_d(x) dx}$$

Si noti come nel caso di drogaggio costante si ottenga la solita espressione.

Le intensità di corrente di portatori minoritari nel lato n e nel lato p sono

$$\begin{aligned} I_p &= A \frac{q\overline{D_p}n_i^2 e^{V_a/V_T}}{\int_0^{w_n} N_d(x) dx} \\ I_n &= A \frac{qD_n n_i^2 e^{V_a/V_T}}{N_a w_p} \end{aligned}$$

Dato che

$$\begin{aligned}\int_0^{w_n} N_d(x) \, dx &= -\frac{w_n}{\alpha} N_d(x) \Big|_0^{w_n} = \frac{w_n}{\alpha} [N_d(0) - N_d(w_n)] \\ &= 8,67 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}\end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned}I_p &= 2 \cdot 10^{-4} \frac{1,16 \cdot 10^{-19} \times 0,026 \times 100 \times (1,45 \cdot 10^{10})^2 e^{0,55/0,026}}{8,67 \cdot 10^{12}} \\ &= 3,35 \, \mu\text{A} \\ I_n &= 2 \cdot 10^{-4} \frac{1,16 \cdot 10^{-19} \times 0,026 \times 100 \times (1,45 \cdot 10^{10})^2 e^{0,55/0,026}}{10^{19} \times 6 \cdot 10^{-4}} \\ &= 4,85 \, \text{nA}\end{aligned}$$

L'efficienza di iniezione della giunzione per le lacune vale allora

$$\gamma = \frac{I_{pn}}{I_{np}} = \frac{\bar{\mu}_p}{\mu_n} \frac{N_a w_p}{\int_0^{w_n} N_d(x) \, dx} = 691$$

Dalla (8.1), integrata⁶ tra x e w_n

$$\begin{aligned}J_p \int_x^{w_n} \frac{n_n}{qD_p} \, dx &= - \int_x^{w_n} \frac{d(p_n n_n)}{dx} \, dx = p_n(x) n_n(x) - p_n(w_n) n_n(w_n) \\ &\simeq p_n(x) N_d(x) \simeq p'(x) N_d(x)\end{aligned}$$

da cui

$$p'(x) = J_p \frac{1}{qD_p} \frac{1}{N_d(x)} \int_x^{w_n} N_d(x) \, dx$$

Nel caso in esame

$$\begin{aligned}p'(x) &= \frac{J_p}{qD_p} \frac{1}{N_d(0)} \frac{w_n N_d(0)}{\alpha} \left(e^{-\alpha x/w_n} - e^{-\alpha} \right) = \\ &= \frac{J_p}{qD_p} \frac{w_n}{\alpha} \left(1 - e^{\alpha(x-w_n)/w_n} \right) = \\ &= \frac{1,675 \cdot 10^{-2}}{1,6 \cdot 10^{-19} \times 0,026 \times 100 \times 1,15 \cdot 10^4} \left(1 - e^{1,15 \cdot 10^4(x-w_n)} \right) = \\ &= 3,5 \cdot 10^{12} \left(1 - e^{1,15 \cdot 10^4(x-w_n)} \right)\end{aligned}$$

Si può verificare come sia $p'(0) = 3,51 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ in perfetto accordo con la legge della giunzione $p'(0) = n_i^2/N_d(0) (\exp(V_a/V_T) - 1) \simeq n_i^2/N_d(0) \exp(V_a/V_T) = 3,51 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$. Conoscendo la concentrazione in eccesso delle lacune, si possono conoscere i singoli contributi di corrente, di trascinamento e di diffusione:

$$\begin{aligned}J_{p,\text{diff.}}(0) &= qD_p \frac{dp'_n}{dx} \Big|_{x=0} = 1,69 \cdot 10^{-5} \text{ A/cm}^2 \\ J_{p,\text{trasc.}}(0) &= qp_n(0)\mu_p \mathcal{E} = 1,67 \cdot 10^{-2} \text{ A/cm}^2\end{aligned}$$

⁶In polarizzazione diretta si assume $p' \simeq p$.

Come si vede è la componente legata al campo elettrico che domina.

La carica accumulata vale

$$\begin{aligned} Q_p &= qA \int_0^{w_n} p'(x) dx = \frac{I_p}{D_p} \frac{w_n}{\alpha} \int_0^{w_n} (1 - e^{\alpha(x-w_n)/w_n}) dx = \\ &= \frac{I_p}{D_p} \frac{w_n}{\alpha} \left(w_n [1 - e^{-\alpha}] + \frac{w_n}{\alpha} [e^{\alpha} - 1] \right) \\ &= \frac{I_p}{D_p} \frac{w_n^2}{\alpha^2} (\alpha - 1 - \alpha e^{-\alpha} + e^{\alpha}) = 9,83 \text{ pC} \end{aligned}$$

Il tempo di transito si ottiene a partire dall'equazione a controllo di carica, nella condizione stazionaria

$$\tau_p = \frac{Q_p}{I_p} = \frac{9,83 \cdot 10^{-12}}{3,35 \cdot 10^{-6}} = 2,9 \text{ ps}$$

c)

Il campo elettrico nella regione svuotata si trova ricorrendo alla legge di Gauss

$$\frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{q}{\epsilon_s} N_d(x)$$

Integrando

$$\mathcal{E}(x) = -\frac{qw_n N_d(0)}{\epsilon_s \alpha} e^{-\alpha x/w_n} + K$$

Se la regione svuotata si estende per tutta la regione n, allora per $x = w_n$ dove si trova il contatto ohmico il campo elettrico è nullo, e ciò consente di determinare la costante

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(w_n) &= 0 = -\frac{qw_n N_d(0)}{\epsilon_s \alpha} e^{-\alpha} + K \\ K &= \frac{qw_n N_d(0)}{\epsilon_s \alpha} e^{-\alpha} \end{aligned}$$

In definitiva

$$\mathcal{E}(x) = -\frac{qw_n N_d(0)}{\epsilon_s \alpha} (e^{-\alpha x/w_n} - e^{-\alpha})$$

Il valore massimo si ha per $x = 0$

$$\mathcal{E}_{\max} = \mathcal{E}(0) = -\frac{qw_n N_d(0)}{\epsilon_s \alpha} (1 - e^{-\alpha}) \simeq -\frac{qw_n N_d(0)}{\epsilon_s \alpha} = -1,34 \cdot 10^6 \text{ V/cm}$$

Si può scrivere

$$\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_{\max} + \frac{qw_n N_d(0)}{\epsilon_s \alpha} (1 - e^{-\alpha x/w_n})$$

La massima tensione applicabile si ottiene integrando il campo elettrico tra $x = 0$ e $x = w_n$

$$V(w_n) - V(0) = -\left(\mathcal{E}_{\max} + \frac{qw_n N_d(0)}{\epsilon_s \alpha} \right) w_n - \frac{qw_n^2 N_d(0)}{\epsilon_s \alpha^2} (1 - e^{-\alpha})$$

Sul contatto è $V(w_n) = 0$

$$V_{\max} = V(w_n) - V(0) \simeq 116,45 \text{ V}$$

Il tempo di accumulo, cioè il ritardo introdotto dal fenomeno di svuotamento delle cariche in eccesso accumulate nella regione neutra quando si passa da polarizzazione diretta a polarizzazione inversa, vale

$$t_s = \tau_p \ln \left(1 + \frac{V_f}{V_r} \right) = 2,9 \text{ ps} \ln \left(1 + \frac{0,55}{0,55} \right) = 2 \text{ ps}$$

Se invece si commuta alla tensione inversa massima

$$t_s = \tau_p \ln \left(1 + \frac{V_f}{V_r} \right) = 2,9 \text{ ps} \ln \left(1 + \frac{0,55}{116,45} \right) = 0,027 \text{ ps}$$

8.4 Effetti di generazione e ricombinazione sulla caratteristica del diodo

8.4.1

Si desidera studiare l'effetto dei fenomeni di generazione-ricombinazione nella regione svuotata di una giunzione nella condizione di polarizzazione inversa.

1. *Quale di questi due fenomeni prevale? Si assuma che il processo dominante sia quello che avviene mediante i centri di generazione-ricombinazione nella banda proibita e si modifichi l'espressione della velocità netta di ricombinazione descritta nel capitolo 5 per adattarla alla situazione in esame, facendo le approssimazioni che si ritengono accettabili. Si esamini per semplicità il caso in cui le sezioni di cattura per elettroni e lacune siano eguali.*
2. *Assumendo che il livello energetico della trappola sia quello per cui il fenomeno ha il massimo effetto, si scriva un'espressione per la densità di corrente corrispondente.*
3. *Si confronti, nel caso di una giunzione p^+-n , la corrente trovata con quella di diffusione della giunzione ideale.*

a)

Nella condizione di polarizzazione inversa le concentrazioni dei portatori nella regione svuotata sono molto più basse delle corrispondenti concentrazioni all'equilibrio, quindi tra i processi di generazione-ricombinazione, ora dominano quelli di generazione, con emissione nella banda di conduzione di elettroni da parte dei centri trappola nella banda proibita e con passaggio di elettroni dalla banda di valenza verso le trappole. Il processo di ricombinazione non è molto importante, dato che la sua velocità è proporzionale alle densità dei portatori liberi, molto piccole nella regione svuotata di un diodo polarizzato inversamente.

La velocità netta di ricombinazione è

$$U^t = \frac{p n - n_i^2}{\tau_{n0} \left[p + n_i \exp \left(\frac{E_i - E_t}{kT} \right) \right] + \tau_{p0} \left[n + n_i \exp \left(\frac{E_t - E_i}{kT} \right) \right]}$$

dove N_t è la concentrazione delle trappole, E_t è il loro livello energetico e

$$\tau_{n0} = (N_t v_{th} \sigma_n)^{-1} ; \quad \tau_{p0} = (N_t v_{th} \sigma_p)^{-1}$$

σ_n e σ_p sono le aree che i centri di cattura presentano agli elettroni e alle lacune rispettivamente.

Nel caso in esame è $p < n_i$ e $n < n_i$ e $\sigma_n = \sigma_p = \sigma_0$, inoltre il fenomeno è di generazione, pertanto

$$\begin{aligned} G &= -U = \frac{N_t v_{th} \sigma_p \sigma_n n_i}{\sigma_p \exp\left(\frac{E_i - E_t}{kT}\right) + \sigma_n \exp\left(\frac{E_t - E_i}{kT}\right)} \\ &= \frac{N_t v_{th} \sigma_0 n_i}{2 \cosh\left(\frac{E_t - E_i}{kT}\right)} = \frac{n_i}{\tau_g} \end{aligned}$$

τ_g è il tempo di vita di generazione.

b)

La velocità netta di generazione G raggiunge un massimo per $E_i = E_t$ e scende molto rapidamente per valori diversi.

Per trovare un'espressione della densità della corrente prodotta dal fenomeno della generazione si considera che, se G è il numero delle coppie generate per unità di volume e di tempo, $qG dx$ è la carica generata nell'unità di tempo in un tratto dx di regione svuotata (carica per unità di superficie e di tempo). Sommando tutti i contributi dell'intera regione svuotata che si estende tra $x = 0$ e $x = w$, si ha

$$J_{\text{gen}} = \int_0^w qG dx \simeq \frac{qn_i w}{\tau_g}$$

In polarizzazione inversa la corrente della giunzione ideale di un diodo p^+-n è

$$\begin{aligned} J_s &\equiv \frac{qD_p p_{n0}}{L_p} + \frac{qD_n n_{p0}}{L_p} \simeq \frac{qD_p p_{n0}}{L_p} = \\ &= \frac{qD_p n_i^2/N_D}{\sqrt{D_p \tau_p}} = q \sqrt{\frac{D_p}{\tau_p}} \frac{n_i^2}{N_D} \end{aligned}$$

Dal confronto si vede che il termine di diffusione è proporzionale a n_i^2 , mentre quello di generazione tramite centri intermedi nella banda proibita è proporzionale a n_i . Per i semiconduttori con valori elevati di n_i , quali il germanio, a temperatura ambiente la corrente di diffusione domina e la corrente inversa segue l'equazione ideale del diodo. Per i semiconduttori con banda proibita più grande (silicio, arseniuro di gallio, fosforo di indio) il valore di n_i è piccolo e la corrente di generazione nella regione di svuotamento può essere dominante.

8.4.2

Per una giunzione p^+-n brusca ideale al silicio con $N_A = 5 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$, $N_D = 5 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ e con un'area della sezione trasversale $A = 10^{-4} \text{ cm}^2$,

1. *si calcoli alla temperatura di 300 K la tensione sulla giunzione e la larghezza della regione svuotata per $V_R = 0,5 \text{ V}$;*
2. *se il semiconduttore contiene 10^{15} cm^{-3} centri di generazione-ricombinazione con un livello situato a 0,02 eV sopra il livello intrinseco del silicio con $\sigma_n = \sigma_p = \sigma_0 = 10^{-15} \text{ cm}^{-2}$, si calcoli l'intensità della corrente di generazione e di ricombinazione a $-0,5 \text{ V}$;*
3. *si determinino la corrente inversa di saturazione della giunzione ideale e l'intensità totale di quella inversa.*

a)

Si calcola il potenziale interno

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{kT}{q} \ln \left(\frac{N_A N_D}{n_i^2} \right) = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \times 300}{1,6 \cdot 10^{-19}} \ln \left(\frac{5 \cdot 10^{17} \times 5 \cdot 10^{15}}{3,34 \cdot 10^{20}} \right) \\ &= 0,0259 \ln \left(\frac{25 \cdot 10^{32}}{3,34 \cdot 10^{20}} \right) = 0,0259 \ln 7,485 \cdot 10^{12} = 0,765 \text{ V} \end{aligned}$$

La tensione ai capi della giunzione con polarizzazione inversa di 0,5 V vale

$$V_j = V_0 - (-0,5 \text{ V}) = 1,265 \text{ V}$$

e la regione di carica spaziale si estende praticamente nel solo lato n, per un tratto

$$w \simeq w_n = \sqrt{\frac{2\epsilon_s}{qN_{eq}} V_j}$$

dove

$$\frac{1}{N_{eq}} = \frac{N_a + N_d}{N_a N_d} = \frac{5 \cdot 10^{17} + 5 \cdot 10^{15}}{5 \cdot 10^{17} \times 5 \cdot 10^{15}} = \frac{1}{4,95 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}} \simeq \frac{1}{N_d}$$

In conclusione

$$w = \sqrt{\frac{2 \times 11,7 \times 8,8544 \cdot 10^{-12}}{1,6 \cdot 10^{-19} 4,95 \cdot 10^{21}}} 1,265 = 5,75 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 0,575 \mu\text{m}$$

b)

Dato che la regione svuotata occupa prevalentemente il lato n,

$$\tau_p = \tau_{p0} = (N_t v_{th} \sigma_0)^{-1} = (10^{15} \times v_{th} \times 10^{-15})^{-1}$$

dove la velocità termica si determina dalla relazione: $\frac{1}{2} m^* v_{th}^2 = \frac{3}{2} kT$. A 300 K

$$v_{th} = \sqrt{\frac{3kT}{m^*}} = \sqrt{\frac{3 \times 0,0258 \times 1,6 \cdot 10^{-19}}{0,97 \times 9,10910^{-31}}} = 118,4 \text{ km/s} = 1,184 \cdot 10^7 \text{ cm/s}$$

da cui

$$\tau_p = \tau_r = (N_t v_{th} \sigma_0)^{-1} = 8,45 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

Il tempo di vita di generazione è

$$\tau_g = \frac{2 \cosh \left(\frac{E_t - E_i}{kT} \right)}{N_t v_{th} \sigma_0} = 2 \cosh \left(\frac{0,02}{0,0258} \right) \times 8,45 \cdot 10^{-8} = 2,2 \cdot 10^{-7} \text{ s}$$

La densità di corrente di generazione entro la regione svuotata vale

$$J_{gen} \simeq \frac{q n_i w}{\tau_g} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \times 1,45 \cdot 10^{10} \times 5,75 \cdot 10^{-5}}{2,2 \cdot 10^{-7}} = 6,06 \cdot 10^{-7} \text{ A/cm}^2$$

Nota l'area della sezione trasversale, si ottiene la corrente

$$I_{gen} = J_{gen} \times A = 6,06 \cdot 10^{-7} \times 10^{-4} = 6,06 \cdot 10^{-11} \text{ A}$$

c)

La corrente di diffusione della giunzione ideale è

$$\begin{aligned} I_s &= q \sqrt{\frac{D_p}{\tau_p}} \frac{n_i^2}{N_D} A = 1,6 \cdot 10^{-19} \sqrt{\frac{0,0258 \times 437,5}{8,45 \cdot 10^{-8}}} \frac{(1,45 \cdot 10^{10})^2}{5 \cdot 10^{15}} \times 10^{-4} \\ &= 8,75 \cdot 10^{-9} \times 10^{-4} = 8,75 \cdot 10^{-13} \text{ A} \end{aligned}$$

Si osserva che la corrente di generazione nella regione svuotata è superiore di circa due ordini di grandezza rispetto a quella ottenuta nell'approssimazione della giunzione ideale

$$I_{\text{tot}} = I_{\text{gen}} + I_s = 6,06 \cdot 10^{-11} \text{ A} + 8,75 \cdot 10^{-13} \text{ A} \simeq 6,06 \cdot 10^{-11} \text{ A} = I_{\text{gen}}$$

8.5 Fenomeni di rottura della giunzione

Processo di moltiplicazione a valanga In una giunzione p-n polarizzata inversamente un portatore generato termicamente può acquisire dal campo elettrico energia sufficiente da rompere, nell'urto contro una discontinuità reticolare, legami covalenti generando una coppia elettrone-lacuna (*ionizzazione per urto*, vedi capitolo 5). L'elettrone e la lacuna così creati acquisiscono entrambi dal campo elettrico energia cinetica e generano ulteriori coppie elettrone-lacuna. Il processo prende il nome di *moltiplicazione a valanga*.

Se α_n e α_p sono rispettivamente le velocità di ionizzazione degli elettroni e delle lacune e se per semplicità si assume $\alpha_n = \alpha_p = \alpha$, la rottura per valanga si verifica quando

$$\int_0^w \alpha \, dx = 1$$

Nel capitolo 5 si trova descritto il legame tra α e campo elettrico.

Effetto tunnel In una giunzione p-n al crescere della concentrazione di drogaggio del lato meno drogato la larghezza della regione svuotata diminuisce sino a divenire trasparente per effetto tunnel. In una giunzione polarizzata inversamente, con campi dell'ordine di 10^6 kV/cm, un portatore in un lato può attraversare la barriera dato che, dall'altro lato della barriera, trova posti liberi ad accoglierlo (*effetto Zener*).

8.5.1

L'attraversamento per effetto tunnel di una banda proibita da parte di un elettrone in una giunzione p-n è formalmente identico all'attraversamento di una barriera di potenziale studiato nei capitoli 1 e 2.

1. *Nell'ipotesi che la barriera di potenziale da attraversare per effetto tunnel sia di tipo triangolare e considerando solo elettroni diretti verso la giunzione⁷, si determini la probabilità di attraversamento.*
2. *Si ottenga un'espressione della corrente per effetto tunnel, basata sul fenomeno fisico dell'attraversamento della barriera.*
3. *Si fornisca un'espressione della corrente per effetto tunnel che descriva fenomenologicamente l'andamento al variare della tensione applicata.*

⁷Per elettroni con componente di velocità parallela alla giunzione occorrerebbe imporre la conservazione della quantità di moto.

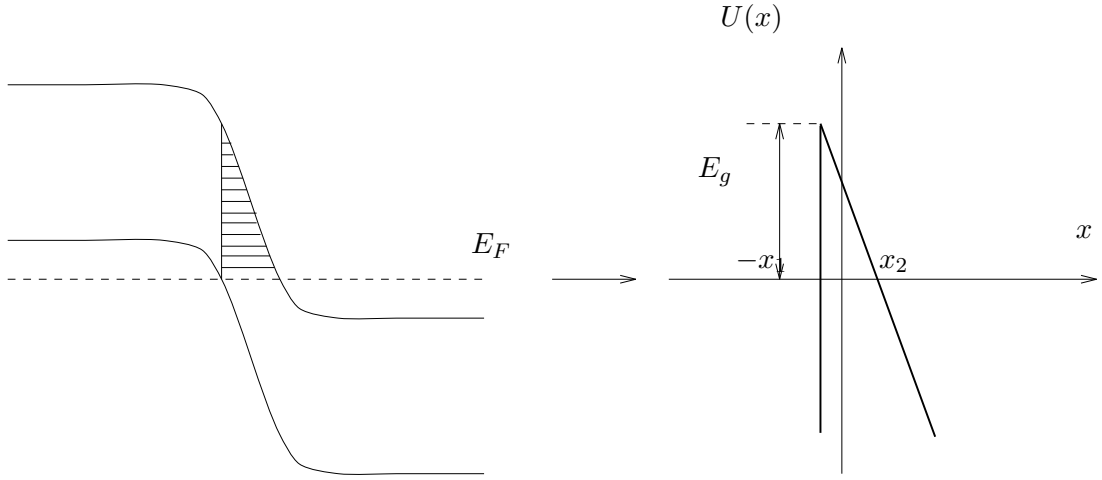


Figura 8.13: Barriera di potenziale in corrispondenza della giunzione e sua schematizzazione mediante una barriera triangolare.

a)

Si usa il metodo WKB illustrato nel capitolo 1. Si consideri un elettrone di energia E e si indichino con x_2 e $-x_1$ i punti in cui entra e esce dalla barriera, il cui valore massimo di altezza è E_g . L'elettrone incontra una barriera di tipo triangolare⁸ $U(x) - E$, dove $U(x)$ è l'energia potenziale, che scende dal valore massimo E_g per $x = -x_1$ a zero per $x = x_2$; La pendenza dell'energia potenziale è il campo elettrico \mathcal{E} , si ha pertanto

$$U(x) - E = a - q\mathcal{E}x \longrightarrow \begin{cases} [U(x) - E]_{x=-x_1} = E_g \\ [U(x) - E]_{x=x_2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T(E) &\simeq \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \int_{-x_1}^{x_2} [2m^* (U(x) - E)]^{\frac{1}{2}} dx \right\} = \\ &= \exp \left\{ \frac{4}{3} \frac{\sqrt{2} m^*}{q\hbar\mathcal{E}} \left[(a - q\mathcal{E}x)^{\frac{3}{2}} \right]_{-x_1}^{x_2} \right\} \\ T(E) &\simeq \exp \left(\frac{4}{3} \frac{\sqrt{2} m^*}{q\hbar\mathcal{E}} E_g^{\frac{3}{2}} \right) \end{aligned}$$

b)

La corrente di elettroni dalla banda di conduzione verso quella di valenza all'energia E è proporzionale al numero degli elettroni nella banda di conduzione in grado di compiere il passaggio, alla probabilità di attraversamento e al numero di posti liberi nella banda di valenza in grado di accoglierli. Si continua a usare anche fuori equilibrio la probabilità di occupazione di Fermi-Dirac, $f(E)$, ma si sostituisce al livello di Fermi gli pseudolivelli di Fermi. Nel lato n si usano lo pseudolivello di Fermi degli elettroni e la probabilità di occupazione $f_C(E)$, nel lato p lo pseudolivello di Fermi delle lacune e la probabilità di occupazione $f_V(E)$. Pertanto, se si indica con $N(E)$ la densità degli stati, si ha

⁸Si incontra ora una situazione assai simile a quella esaminata nel capitolo 1 a proposito della emissione termoelettronica.

	<u>Banda di conduzione</u>	<u>Banda di valenza</u>
	lato n	lato p
Elettroni liberi	$f_C(E)N_C(E)$	$f_V(E)N_V(E)$
Posti liberi	$[1 - f_C(E)]N_C(E)$	$[1 - f_V(E)]N_V(E)$

La corrente totale è la somma dei contributi di tutte le energie per cui le bande sono affacciate ($E_{C(\text{lato n})} \leq E \leq E_{V(\text{lato p})}$). Assumendo che $T(E)$ sia eguale nelle due direzioni

$$I_{BC \rightarrow BV} = K \int_{E_{Cn}}^{E_{Vp}} N_C(E) f_C(E) \times T(E) \times [1 - f_V(E)] N_V(E) dE$$

$$I_{BV \rightarrow BC} = K \int_{E_{Cn}}^{E_{Vp}} N_V(E) f_V(E) \times T(E) \times [1 - f_C(E)] N_C(E) dE$$

All'equilibrio termodinamico la corrente per effetto tunnel è nulla

$$I_t = I_{BC \rightarrow BV} - I_{BV \rightarrow BC} = 0$$

Con una polarizzazione si ha

$$I_t = K \int_{E_{Cn}}^{E_{Vp}} [f_C(E) - f_V(E)] \cdot T(E) \cdot N_C(E) N_V(E) dE$$

Disegnando i vari fattori dell'integranda, si si può convincere dell'andamento della corrente tunnel con la tensione applicata.

c)

In forma chiusa si può scrivere

$$I_t = I_p \frac{V_a}{V_p} \exp\left(1 - \frac{V_a}{V_p}\right)$$

Infatti, come è illustrato nella figura 8.14, in polarizzazione inversa con tensione applicata V_a negativa, l'esponente è positivo e cresce con la tensione; il fattore che lo precede è però negativo. Nell'intorno dell'origine l'andamento è quasi lineare con pendenza I_p/V_p . In polarizzazione diretta, al crescere della tensione applicata positiva, oltre $V_a = V_p$, l'esponente diventa negativo e prevale un andamento esponenziale decrescente. Per ottenere la caratteristica totale del diodo occorre poi sommare alla componente di tunnel la corrente di diffusione.

$$I_t = I_p \frac{V_a}{V_p} \exp\left(1 - \frac{V_a}{V_p}\right) + I_0 \exp\left(\frac{V_a}{\eta V_T} - 1\right)$$

8.5.2

1. Si determini la tensione di rottura per moltiplicazione a valanga di una giunzione p^+-n in arseniuro di gallio con uno strato con un drogaggio di $2 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ nel lato meno drogato (si veda anche il problema 8.6.3).

Per la velocità di moltiplicazione per urto si usi per maggiore semplicità di calcolo l'approssimazione

$$\alpha = 0,1465 \cdot 10^4 \left(\frac{\mathcal{E}}{4 \cdot 10^5}\right)^6 \text{ cm}^{-1} \quad (8.2)$$

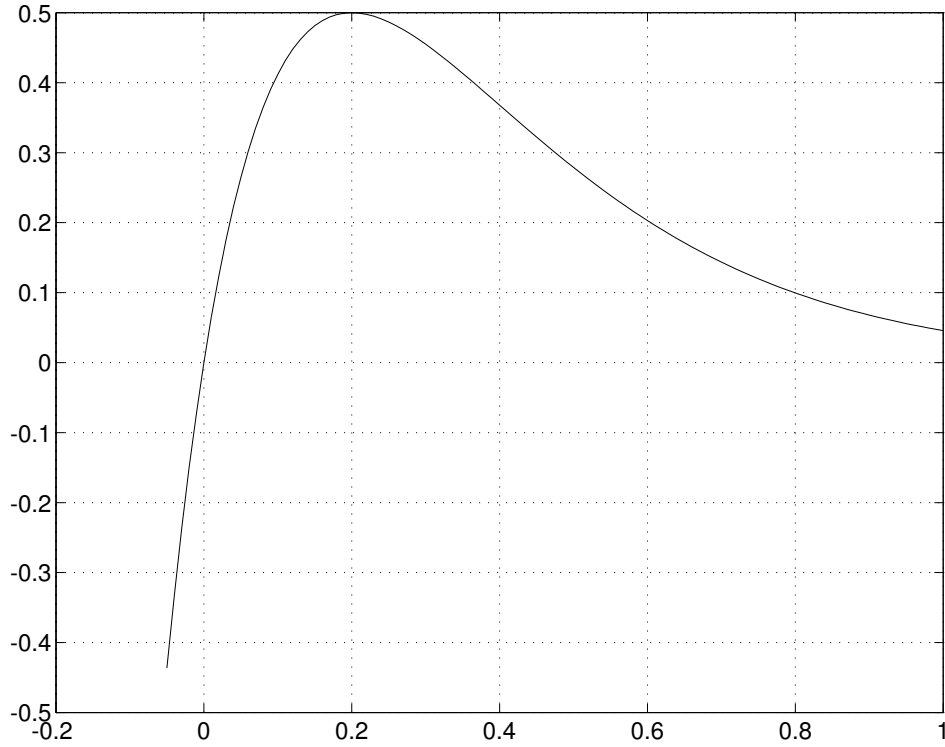


Figura 8.14: Corrente per effetto tunnel di una giunzione p-n in funzione della tensione, come espresso nel modello (8.2).

2. Si confronti questa espressione per $\alpha_n = \alpha_p$ con l'approssimazione (??) del capitolo 5

$$\alpha = A \exp[-(b/\mathcal{E})^m] \quad (8.3)$$

dove, esprimendo \mathcal{E} in V/cm e alla temperatura ambiente, per il GaAs nell'intervallo di campo elettrico $(3,33 \div 5,56) \cdot 10^5$ V/cm è

elettroni	lacune
$A = 7,76 \cdot 10^4$	$A = 6,31 \cdot 10^6$
$b = 4,45 \cdot 10^5$	$b = 2,31 \cdot 10^6$
$m = 6,91$	$m = 1$

a)

In una giunzione p^+-n il campo elettrico ha andamento lineare e si svolge quasi esclusivamente nella zona n. Se la larghezza della zona svuotata si estende da $x = 0$ a $x = w_n \simeq w$ e se \mathcal{E}_c è il campo elettrico massimo, si ha

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_c \left(1 - \frac{x}{w}\right) \quad \text{dove} \quad \mathcal{E}_c = -\frac{qN_D w}{\epsilon_s}$$

la condizione di rottura per moltiplicazione a valanga diventa

$$1 = \int_0^w \alpha \, dx = \int_0^w 0.1465 \cdot 10^4 \left(\frac{\mathcal{E}}{4 \cdot 10^5}\right)^6 dx = \frac{0.1465 \cdot 10^4 w \mathcal{E}_c^6}{(4 \cdot 10^5)^6} \int_0^1 (1 - \eta)^6 d\eta$$

$$1 = -\frac{0.1465 \cdot 10^4 w \mathcal{E}_c^6}{(4 \cdot 10^5)^6} \frac{1}{7} = -\frac{0.1465 \cdot 10^4}{7(4 \cdot 10^5)^6} \frac{\epsilon_s}{qN_D} \mathcal{E}_c^7$$

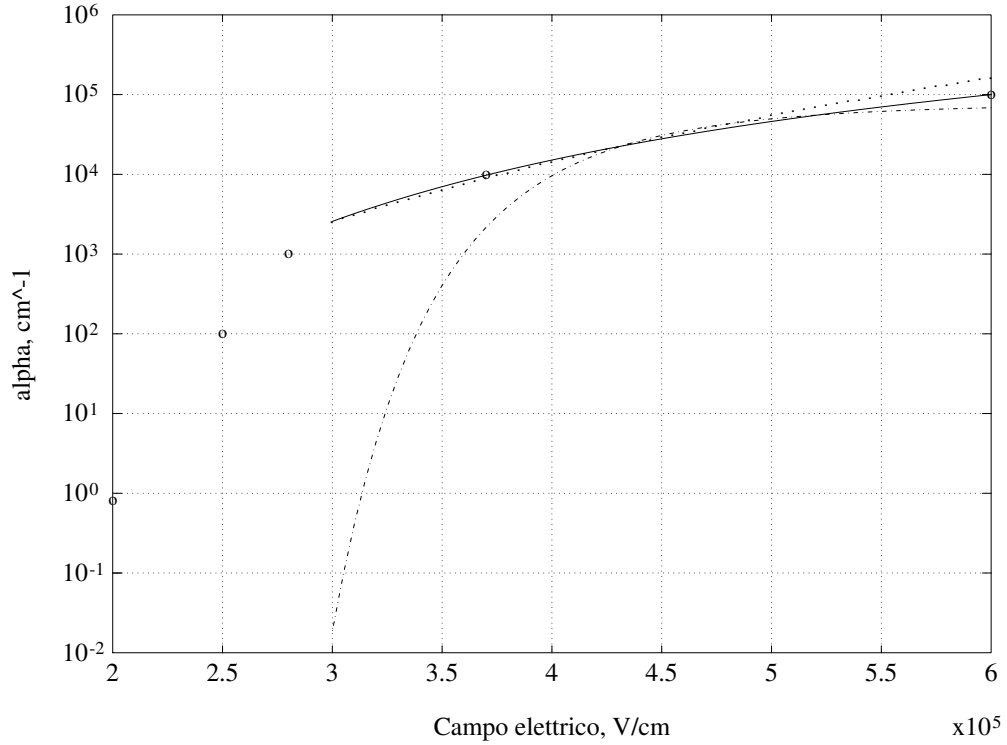


Figura 8.15: Coefficiente di ionizzazione α per gli elettroni con tre diverse approssimazioni: eq. (8.4) linea continua, eq. (8.3) linea tratto-punto, eq. (8.2) linea tratteggiata. I punti sono valori sperimentali.

In questa relazione unica incognita è il campo massimo alla rottura; si trova

$$\mathcal{E}_c = -6,58 \cdot 10^5 \text{ V/cm} ; \quad w = -\frac{\epsilon_s}{qN_D} \mathcal{E}_c = 2,37 \text{ } \mu\text{m}$$

Infine la tensione è l'area del rettangolo individuato dal campo elettrico

$$V_B = -\frac{1}{2} w \mathcal{E}_c = 77,9 \text{ V}$$

b)

Nella figura 8.15 è dato l'andamento del coefficiente di moltiplicazione per gli elettroni α_n in funzione di \mathcal{E} , secondo le approssimazioni (8.2), (8.3) e la seguente

$$\alpha = A\mathcal{E} \exp[-(b/\mathcal{E})] \quad (8.4)$$

con $A = 3,2432$, $b = 1,781 \cdot 10^6$ e $m = 1$. Si vede che nel campo di tensioni considerato le approssimazioni sono accettabili.

8.5.3

Si consideri una giunzione p-n⁺ brusca e asimmetrica in silicio con il lato n fortemente drogato. Si faccia variare il drogaggio del lato p (drogaggio di base $N_B = N_{eq}$) a passi di decade da $N_a = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ a $N_d = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$.

1. Per ciascuna concentrazione si determini il massimo campo elettrico \mathcal{E}_{\max} che può essere applicato prima di avere il fenomeno del breakdown. Si trovi anche la

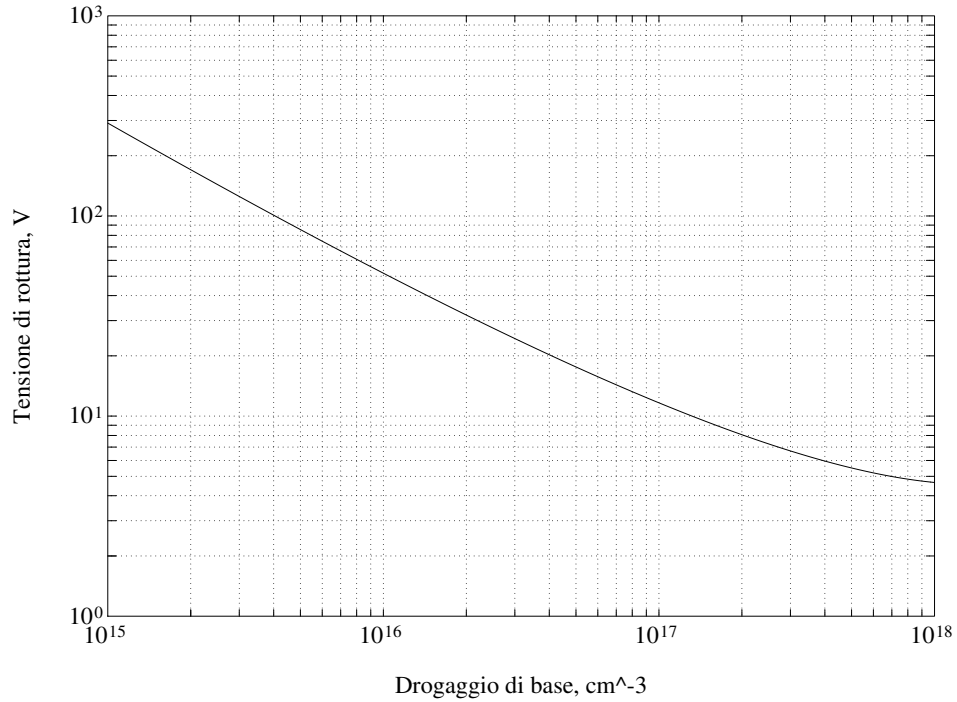


Figura 8.16: Tensione di rottura (breakdown).

corrispondente larghezza della zona di svuotamento. La tensione di rottura della giunzione è riportata nella figura 8.16 in funzione del drogaggio del lato meno drogato.

- b) Commentare l'entità delle variazioni del campo elettrico massimo a confronto con quelle della tensione.

a)

Si traggono dalla figura 8.16 i valori della tensione di rottura della giunzione, $V_a = V_B$, e si calcolano x_d e il campo massimo⁹ con le espressioni

$$\begin{aligned}\phi_i &= \frac{kT}{q} \ln \frac{N_a}{n_i} + \frac{E_g}{2q}; \quad x_d = \sqrt{\frac{2\epsilon_s}{qN_{eq}} (\phi_i - V_a)} \\ \phi_i - V_a &= -\frac{1}{2} \mathcal{E}_{\max} x_d \quad \rightarrow \quad \mathcal{E}_{\max} = -\frac{2(\phi_i - V_a)}{x_d}\end{aligned}$$

Si svolge il calcolo per $N_a = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ e si riportano gli altri risultati nella tabella.

$$\begin{aligned}\phi_i &= 0,56 + 0,026 \times \ln \frac{10^{15}}{1,45 \cdot 10^{10}} = 0,85 \text{ V} \\ x_d &= \sqrt{\frac{2 \times 11,7 \cdot 10^{-12}}{1,602 \cdot 10^{-19}}} \times \sqrt{\frac{(\phi_i - V_a)}{N_{eq}}} = 3,596 \cdot 10^4 \times \sqrt{\frac{(\phi_i - V_a)}{N_{eq}}} \\ &= 19,89 \mu\text{m} \\ \mathcal{E}_{\max} &= -\frac{2 \cdot 0,85}{19,89 \cdot 10^{-6}} = 3,076 \cdot 10^7 \text{ V/m} = 3,076 \cdot 10^5 \text{ V/cm}\end{aligned}$$

⁹ $N_{eq} = N_a = N_B$

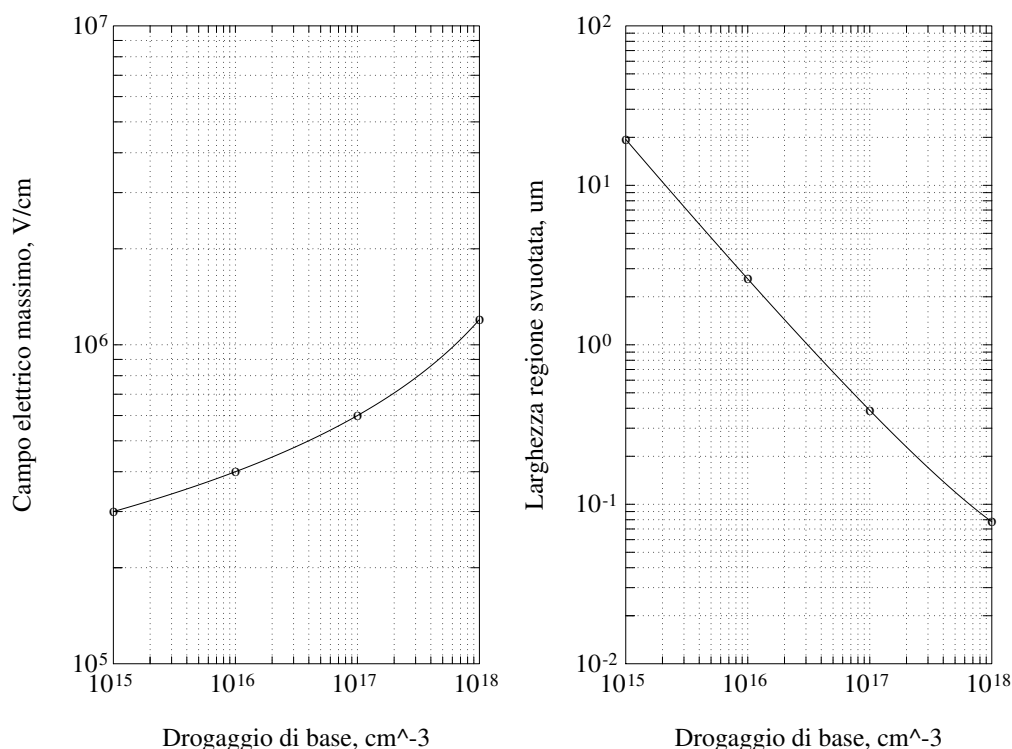


Figura 8.17: a) Campo elettrico massimo \mathcal{E}_{\max} e b) larghezza regione svuotata x_d al breakdown in funzione del drogaggio di base N_B .

N_a cm^{-3}	V_a V	ϕ_i V	x_d μm	\mathcal{E}_{\max} V/cm	effetto
10^{15}	-305,0	0,85	19,890	$3,078 \cdot 10^5$	valanga
10^{16}	-58,0	0,91	2,760	$4,270 \cdot 10^5$	valanga
10^{17}	-12,0	0,97	0,410	$6,330 \cdot 10^5$	valanga
10^{18}	-3,8	1,03	0,079	$12,22 \cdot 10^5$	zener

b)

Si osserva che, per una variazione della densità di drogaggio di 3 decadi, la tensione di rottura varia di 2 decadi, mentre l'intensità di campo massimo varia solo di circa 2 ottave. La scarsa influenza del drogaggio, che determina la pendenza del campo elettrico, indica che il fenomeno sente quasi esclusivamente il valore massimo del campo e assai poco il resto della curva del campo. Inoltre il fenomeno del breakdown è molto sensibile all'intensità di campo massimo, infatti piccole variazioni possono provocare ampie variazioni della tensione di rottura.

8.5.4

Si consideri una giunzione p^+-n brusca asimmetrica con concentrazione del lato n pari a $5 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$. Si calcoli:

- la massima tensione applicabile prima di avere breakdown (si usi il grafico della figura 8.17 del problema 8.5.3);
- supponendo di introdurre uno strato epitassiale intrinseco di $1 \mu\text{m}$ tra il lato p e il lato n, si determini la tensione di breakdown.

8.6 Giunzioni n-i e p-i-n

8.6.1

Si abbia una giunzione realizzata tra silicio drogato $N_d = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ e silicio intrinseco. Si studi come la giunzione raggiunga l'equilibrio valutando l'ampiezza della regione svuotata nel silicio di tipo n.

In una struttura di tipo n-i il potenziale di contatto, dovuto alla differenza tra i lavori di estrazione del silicio drogato e del silicio intrinseco, non può essere legato alla sola carica spaziale della regione svuotata nel lato n, in quanto ciò violerebbe la neutralità totale del sistema. La carica positiva dovuta allo svuotamento del lato n deve essere compensata da un'eguale carica negativa nel silicio intrinseco, carica che non può che essere libera. L'accumulo di elettroni alla giunzione rappresenta per il semiconduttore una non neutralità, che viene riassorbita esponenzialmente con una lunghezza caratteristica pari alla lunghezza di Debye. Si applica il metodo utilizzato nello studio delle giunzioni e si impongono sia la neutralità totale sia che il potenziale determinato dalla distribuzione di carica eguagli la differenza dei lavori di estrazione.

Neutralità totale

$$\begin{aligned} qN_d x_n &= qN_0 \int_0^\infty e^{-x/L_D} dx \\ qN_d x_n &= qN_0 L_D \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$N_0 = \frac{N_d x_n}{L_D}$$

Campo elettrico e potenziale

$$\begin{aligned} \text{lato di tipo n} & \left\{ \begin{aligned} \mathcal{E}(x) &= \mathcal{E}(-x_n) + \int_{-x_n}^x \frac{qN_d}{\epsilon_s} dx = 0 + \frac{qN_d}{\epsilon_s} (x + x_n) \\ \mathcal{E}(0) &= \frac{qN_d}{\epsilon_s} x_n \\ \phi(x) &= \phi(-x_n) - \int_{-x_n}^x \frac{qN_d}{\epsilon_s} (x + x_n) dx \\ &= 0 - \frac{qN_d}{2\epsilon_s} (x + x_n)^2 \\ \phi(0) &= -\frac{qN_d}{2\epsilon_s} x_n^2 \end{aligned} \right. \\ \text{lato intrinseco} & \left\{ \begin{aligned} \mathcal{E}(x) &= \mathcal{E}(0) - \int_0^x \frac{qN_0}{\epsilon_s} e^{-x/L_D} dx \\ &= \frac{qN_d}{\epsilon_s} x_n + \frac{qN_0 L_D}{\epsilon_s} (e^{-x/L_D} - 1) \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

È possibile sostituire N_0 , ottenuto per neutralità, nell'espressione del campo elettrico

nella regione intrinseca

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(x) &= \frac{qN_dx_n}{\epsilon_s} e^{-x/L_D} \\ \phi(x) &= \phi(0) + \int_0^x -\frac{qN_dx_n}{\epsilon_s} e^{-x/L_D} dx \\ \phi(x) &= -\frac{qN_D}{2\epsilon_s} x_n^2 - \frac{qN_d}{\epsilon_s} x_n L_D (1 - e^{-x/L_D}) \\ \phi(\infty) &= -\phi_i = -\frac{qN_d}{\epsilon_s} x_n L_D \left(1 + \frac{x_n}{2L_D}\right)\end{aligned}$$

Dalla differenza dei lavori di estrazione si ottiene

$$\phi_i = \frac{kT}{q} \ln \frac{N_D}{n_i} = 0,409\text{V}$$

Risolvendo il sistema rispetto a x_n si ottiene

$$x_n = -L_D + \sqrt{L_D^2 + 2\frac{\epsilon_s}{qN_D}\phi_i}$$

La lunghezza di Debye in un semiconduttore intrinseco può essere valutata come

$$L_D = \left[\frac{\epsilon_s kT}{2q^2 n_i} \right]^{1/2} = 24 \mu\text{m}$$

Ciò porta a un'ampiezza della regione svuotata pari a $x_n = 0,11034 \text{ nm}$. Il valore della lunghezza di Debye indica che un semiconduttore intrinseco torna in condizioni di neutralità entro alcune decine di micron qualora sia in contatto con un semiconduttore drogato¹⁰.

8.6.2

Si abbia una giunzione p-i-n di silicio in cui il lato p ($x < x_2$), con drogaggio $N_d = 1 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$, è separato dal lato n ($x > x_3$), con drogaggio $N_a = 1 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$, mediante una zona di silicio intrinseco lunga $1,5 \mu\text{m}$.

1. *Si calcoli il campo interno e l'estensione di ciascuna regione di svuotamento; si rappresentino graficamente il campo elettrico, il potenziale e il diagramma a bande.*
2. *Si confrontino i valori del campo elettrico massimo e delle estensioni delle regioni di carica spaziale con quelli di una giunzione p-n con le stesse concentrazioni di drogante.*
3. *Si determini la legge con cui la capacità di svuotamento varia con la tensione, confrontandola con quella relativa a una struttura priva di regione intrinseca; si riportino in grafico i risultati.*
4. *Si indichino quali limiti di validità l'analisi effettuata avrebbe nel caso in cui si aumentasse l'ampiezza della regione intrinseca.*

¹⁰Un'analisi del tutto simile può essere effettuata tra un metallo e un semiconduttore intrinseco.

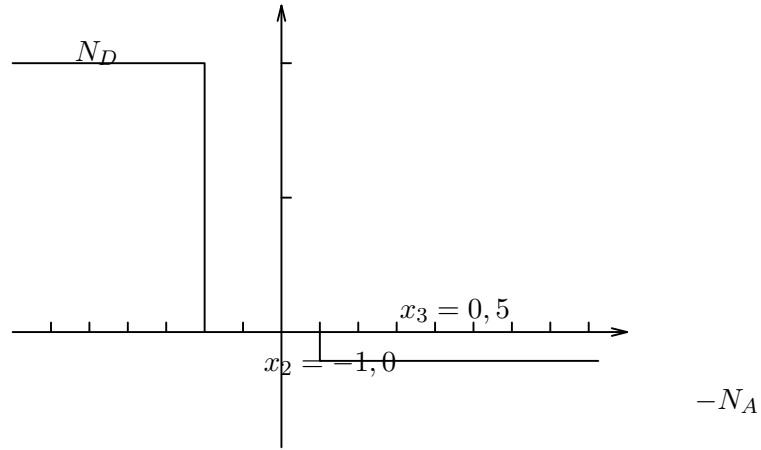


Figura 8.18: Distribuzione delle impurità droganti.

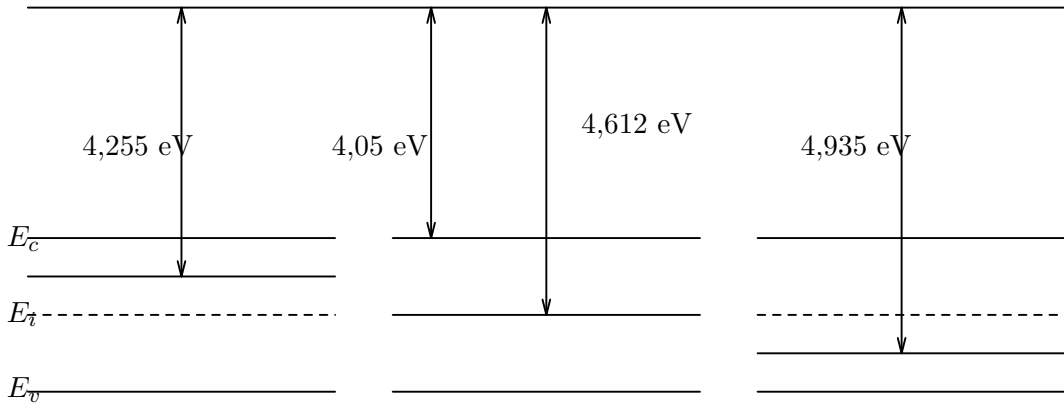


Figura 8.19: Bande con materiali separati.

a)

Per disegnare il diagramma a bande si calcolano i vari livelli energetici rispetto all'energia E_0 dell'elettrone libero

$$N_d = 10^{16} \simeq n = N_C \exp \left[-\frac{E_C - E_F}{kT} \right] \rightarrow E_C - E_F \simeq kT \ln \frac{N_C}{N_d} = 0,205 \text{ eV}$$

$$N_a = 10^{15} \simeq p = N_V \exp \left[-\frac{E_F - E_V}{kT} \right] \rightarrow E_F - E_V \simeq kT \ln \frac{N_V}{N_a} = 0,239 \text{ eV}$$

$$q\phi_{s_n} = q\chi + E_C - E_F = 4,05 + 0,205 = 4,255 \text{ eV}$$

$$q\phi_{s_p} = q\chi + E_g - (E_F - E_V) = 4,05 + 1,124 - 0,293 = 4,935 \text{ eV}$$

$$q\phi_{s_i} = q\chi + \frac{E_g}{2} = 4,05 + 0,562 = 4,612 \text{ eV}$$

Per determinare campo elettrico e potenziale, si usano l'equazione di Gauss $d\mathcal{E}/dx = -\rho/\epsilon$ e la definizione $\mathcal{E} = -d\phi/dx$. Integrando si ottiene nelle tre regioni (x_1 e x_4 sono

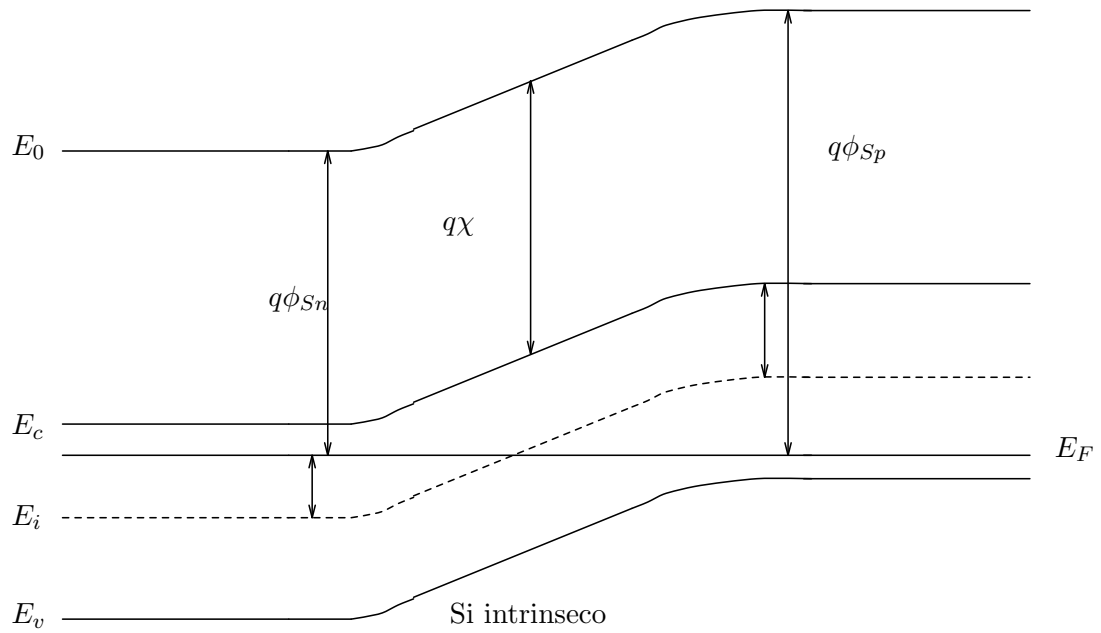


Figura 8.20: Bande di energia all'equilibrio.

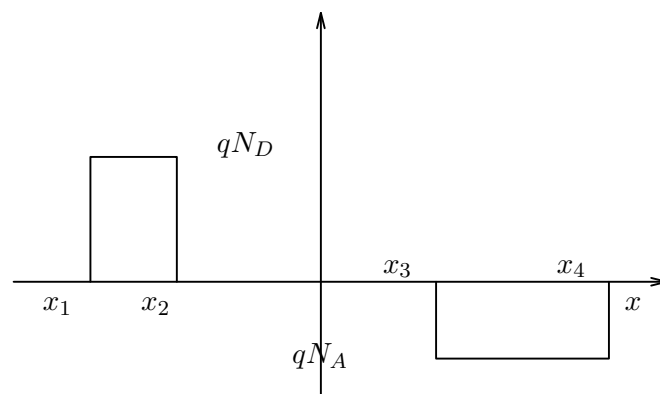


Figura 8.21: Carica elettrica.

le ascisse che delimitano a sinistra e a destra le regioni di carica spaziale):

	$x_1 < x < x_2$	$x_2 < x < x_3$	$x_3 < x < x_4$
$\rho(x)$	qN_d	0	$-qN_a$
$\mathcal{E}(x)$	$\frac{qN_d}{\epsilon}(x - x_1)$	$\mathcal{E}_{\max} = \frac{qN_d}{\epsilon}(x_2 - x_1) =$ $= \frac{qN_a}{\epsilon}(x_4 - x_3)$	$= \frac{qN_a}{\epsilon}(x_4 - x)$
$\phi(x)$	$-\frac{qN_d}{2\epsilon}(x - x_1)^2$	$-\phi_n - \frac{qN_d}{2\epsilon}(x_2 - x_1)(x - x_2)$	$-\phi_n - \phi_0 - \phi_p + \frac{qN_a}{\epsilon}(x_4 - x)^2$

Inoltre, posto $\mathcal{E}(x_1) = 0$ e $\phi(x_1) = 0$, si ha

$$\begin{aligned}\phi_n &= -\phi(x_2) = \frac{qN_d}{2\epsilon}(x_2 - x_1)^2 \\ \phi_0 &= -\phi(x_3) - \phi_n = \frac{qN_d}{\epsilon}(x_2 - x_1)(x_3 - x_2) \\ \phi_p &= \frac{qN_a}{2\epsilon}(x_4 - x_3)^2\end{aligned}$$

Il potenziale intrinseco è

$$\phi_i = \phi(x_1) - \phi(x_4) = \phi_n + \phi_0 + \phi_p = \frac{kT}{q} \ln \frac{N_a N_d}{n_i^2} = 0,637 \text{ V}$$

Si nota che la tensione intrinseca è la stessa che in una giunzione p-n. Imponendo la neutralità di carica si ha

$$\begin{aligned}qN_d(x_2 - x_1) &= qN_a(x_4 - x_3) \\ x_2 - x_1 &= 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ cm} ; \quad x_4 - x_3 = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ cm}\end{aligned}$$

e il campo elettrico massimo è

$$\mathcal{E}_{\max} = \frac{qN_d}{\epsilon_s}(x_2 - x_1) = 3870 \text{ V/cm}$$

b)

Per effettuare il confronto si calcolano ora le grandezze relative alla giunzione p-n

$$\begin{aligned}x_d &= x_n + x_p = \sqrt{\frac{2\epsilon_s}{q} \left(\frac{1}{N_a} + \frac{1}{N_d} \right) \phi_i} = 9,52 \cdot 10^{-5} \text{ cm} \\ x_n &= \frac{N_a}{N_a + N_d} w = 0,865 \cdot 10^{-5} \text{ cm} ; \quad x_p = \frac{N_d}{N_a + N_d} x_d = 8,655 \cdot 10^{-5} \text{ cm} \\ \mathcal{E}_{\max} &= \frac{2\phi_i}{x_d} = 13400 \text{ V/cm}\end{aligned}$$

Nella giunzione p-n il campo massimo è circa 3,5 volte maggiore di quello nella giunzione p-i-n. La rapidità con cui il campo cresce è eguale nei due casi, dato che la pendenza del campo elettrico dipende dalla concentrazione del drogaggio nelle regioni svuotate. Poiché però nella regione intrinseca si ha una caduta di tensione, non presente nella giunzione p-n, le estensioni delle regioni di carica spaziale nei lati p e n sono inferiori e il campo raggiunge valori inferiori. Si noti che l'area sotto la curva del campo è

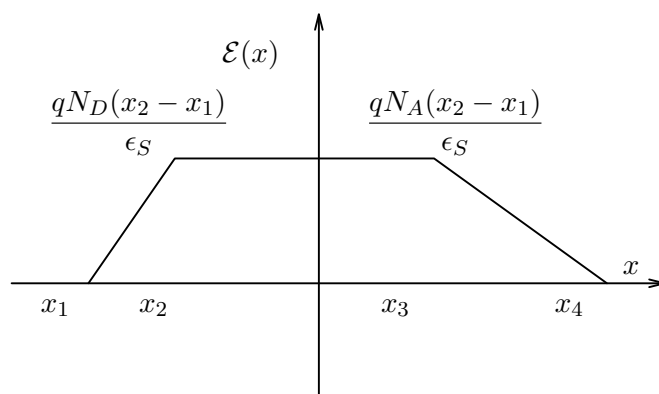


Figura 8.22: Campo elettrico.

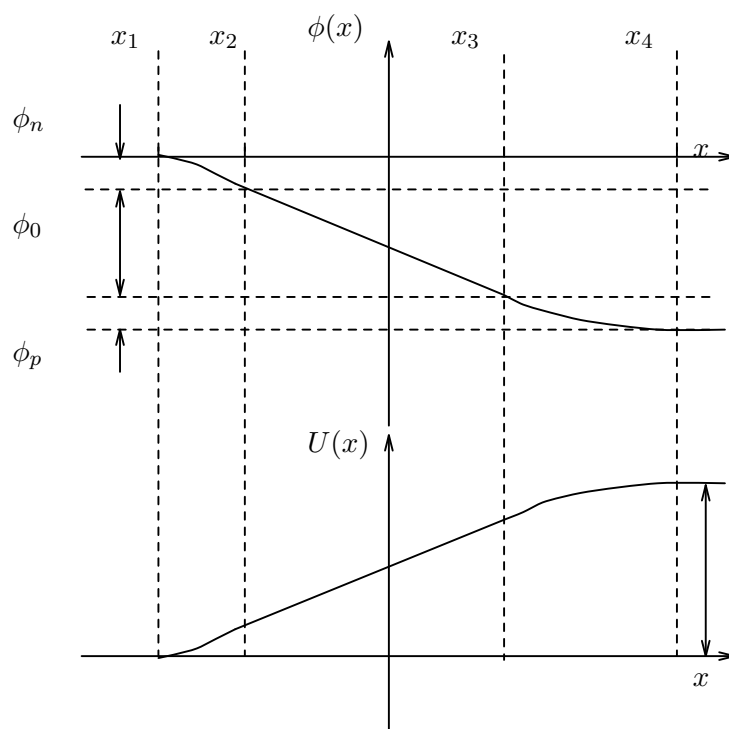


Figura 8.23: Energia potenziale.

la tensione intrinseca, quindi dato che nel caso della giunzione p-i-n l'estensione è maggiore, il campo massimo dovrà essere inferiore.

c)

Per determinare la capacità differenziale occorre determinare il legame tra la carica e la tensione applicata V_a

$$C = \left| \frac{dQ}{dV_a} \right| = qN_d \left| \frac{d(x_2 - x_1)}{dV_a} \right|$$

Il legame tra l'estensione della regione di carica spaziale e la tensione sulla giunzione $\phi_i - V_a$ è stato trovato nel punto a)

$$\begin{aligned} a(x_2 - x_1)^2 + b(x_2 - x_1) - (\phi_i - V_a) &= 0 \\ a &= \frac{qN_d}{2\epsilon} \left(1 + \frac{N_d}{N_a} \right) ; \quad b = \frac{qN_d}{\epsilon} (x_3 - x_2) \\ (x_2 - x_1) &= \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4a(\phi_i - V_a)}}{2a} \\ \frac{d}{dV_a}(x_2 - x_1) &= \frac{1}{4a} \frac{-4a}{\sqrt{b^2 + 4a(\phi_i - V_a)}} = \frac{1}{\sqrt{b^2 + 4a(\phi_i - V_a)}} \end{aligned}$$

In definitiva si ha

$$C = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_3 - x_2}{\epsilon} \right)^2 + \frac{2}{q\epsilon} \left(\frac{1}{N_a} + \frac{1}{N_d} \right) (\phi_i - V_a)}}$$

La dipendenza funzionale della capacità con la tensione è la stessa che per una giunzione p-n, anche se di valore più piccolo perché la regione di svuotamento è più ampia. Dei due termini sotto radice uno si riferisce allo svuotamento della regione intrinseca ed è costante, l'altro all'estensione delle regioni di carica spaziale nelle regioni drogate e dipende dalla tensione applicata. Nel caso della giunzione p-n la capacità vale

$$C = \sqrt{\frac{q\epsilon}{2 \left(\frac{1}{N_a} + \frac{1}{N_d} \right) (\phi_i - V_a)}}$$

Si confrontano nei due casi le relazioni che si hanno per $1/C^2$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{C^2} \right)_{\text{pin}} &= 2,1 \cdot 10^{16} + 1,33 \cdot 10^{16} (\phi_i - V_a) \\ \left(\frac{1}{C^2} \right)_{\text{pn}} &= 1,33 \cdot 10^{16} (\phi_i - V_a) \end{aligned}$$

d) Alla luce dei risultati ottenuti nel caso della giunzione n-i, qualora la larghezza dello strato intrinseco fosse superiore ad alcune lunghezze di Debye, ciascuno delle due interfacce raggiunge la condizione di neutralità separatamente, con un accumulo di elettroni dal lato n e con un accumulo di lacune dal lato p. Si hanno quindi due giunzioni n-i e i-p separate da uno strato intrinseco, dove ovviamente le bande tornano ad essere piatte.

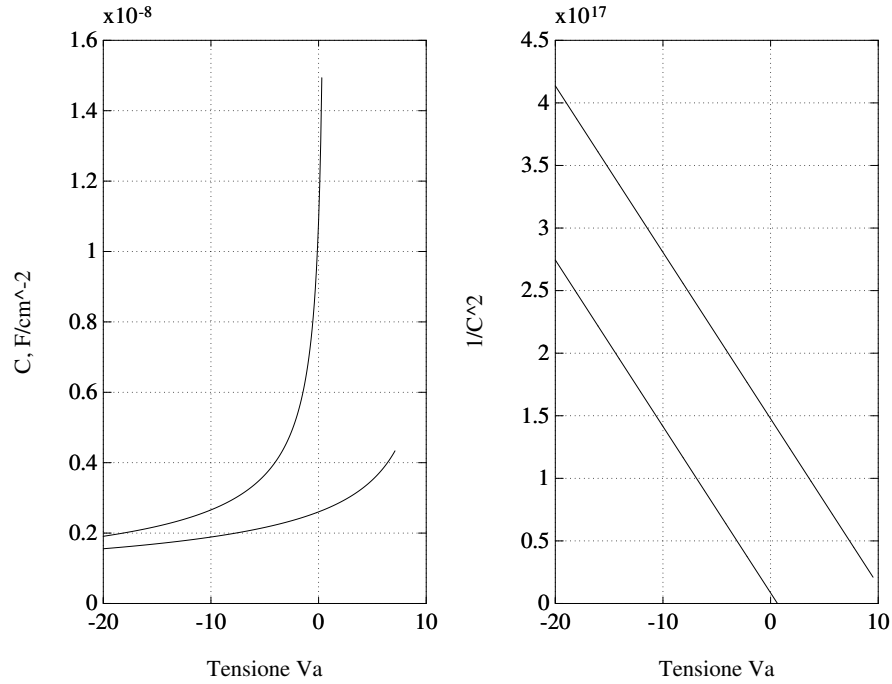


Figura 8.24: Capacità (areica) C e $1/C^2$ in funzione della tensione applicata V_a .

8.6.3

Si determini la tensione di rottura per moltiplicazione a valanga di un diodo p-i-n in arseniuro di gallio con uno strato intrinseco lungo $8 \mu\text{m}$. Si usino per α le approssimazioni del problema 8.5.2, cioè

$$\alpha = 0,1465 \cdot 10^4 \left(\frac{\mathcal{E}}{4 \cdot 10^5} \right)^6 \text{ cm}^{-1}$$

In un diodo p-i-n, essendo il campo elettrico nella regione intrinseca costante, anche le velocità di ionizzazione degli elettroni e delle lacune lo sono in tutta la zona intrinseca che in polarizzazione inversa è svuotata. Pertanto la condizione di valanga diventa

$$\int_0^w \alpha \, dx = \alpha(\mathcal{E}_c) w = 1$$

dove \mathcal{E}_c è il campo elettrico massimo e w è la larghezza della regione intrinseca

$$0,1465 \cdot 10^4 \left(\frac{\mathcal{E}_c}{4 \cdot 10^5} \right)^6 \times 8 \cdot 10^{-4} = 1$$

$$\mathcal{E}_c = 3,58 \cdot 10^5 \text{ V/cm}$$

Dato che il campo è uniforme, la tensione di rottura (*breakdown*) vale

$$V_B = \mathcal{E}_c w = 3,58 \cdot 10^5 \text{ V/cm} \times 8 \cdot 10^{-4} \text{ cm} = 286,5 \text{ V}$$

8.6.4

Si abbia una struttura di tipo p-i-n in silicio con drogaggi uniformi pari a $N_A = 2 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ e $N_D = 3 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$.

1. *Disegnare un diagramma a bande qualitativo.*
2. *Disegnare il valore del campo massimo \mathcal{E}_{\max} in funzione della larghezza b della regione intrinseca.*
3. *Calcolare b in modo da ridurre del 25% il campo massimo rispetto al valore che si avrebbe nella corrispondente giunzione p-n.*
4. *Con il valore di b trovato, si calcolino, all'equilibrio termodinamico, le larghezze x_p e x_n delle regioni di carica spaziale nel lato p e nel lato n rispettivamente.*

Capitolo 9

Il diodo e il FET a giunzione

In questo capitolo si trattano due dispositivi che impiegano le proprietà fisiche della giunzione p-n: il diodo a giunzione e il transistor a effetto di campo a giunzione (JFET). Il diodo è un dispositivo a due morsetti, di tipo bipolare, in cui la conduzione è affidata a portatori di entrambe le polarità, mentre il JFET è un dispositivo a tre morsetti, di tipo unipolare, in cui solo i portatori di un tipo (quelli maggioritari nel canale) contribuiscono alla corrente utile. Malgrado queste differenze, i due dispositivi sono trattati nel medesimo capitolo, in quanto il loro studio richiede gli stessi strumenti, ovvero quelli introdotti nella descrizione delle proprietà della giunzione p-n, trattata nel capitolo precedente.

Nei primi esercizi proposti sono ripresi i processi tecnologici di impiantazione e diffusione e sono applicati alla realizzazione di un diodo integrato. Analiticamente e mediante simulazione di processo con SUPREM si determinano la profondità delle giunzioni e il profilo di drogaggio per due tipici diodi integrati.

Successivamente si esamina il comportamento statico del diodo a giunzione: la caratteristica tensione corrente, la dipendenza dalla temperatura della corrente inversa di saturazione e della tensione di soglia, l'effetto della resistenza di volume del dispositivo e la resistenza differenziale sono i principali punti trattati.

Lo studio del dispositivo è completato con il modello dinamico; si valutano analiticamente i valori delle capacità di transizione e di diffusione e si esamina il loro effetto sul comportamento dinamico del diodo. Allo scopo si fa ricorso al simulatore di circuiti elettrici PSPICE.

In conclusione si propongono alcuni esercizi sul transistor a effetto di campo (FET) a giunzione usato di solito come resistenza variabile, amplificatore o interruttore. In particolare si ricavano la caratteristica tensione corrente e la transcaratteristica mettendo in evidenza le differenti regioni di funzionamento.

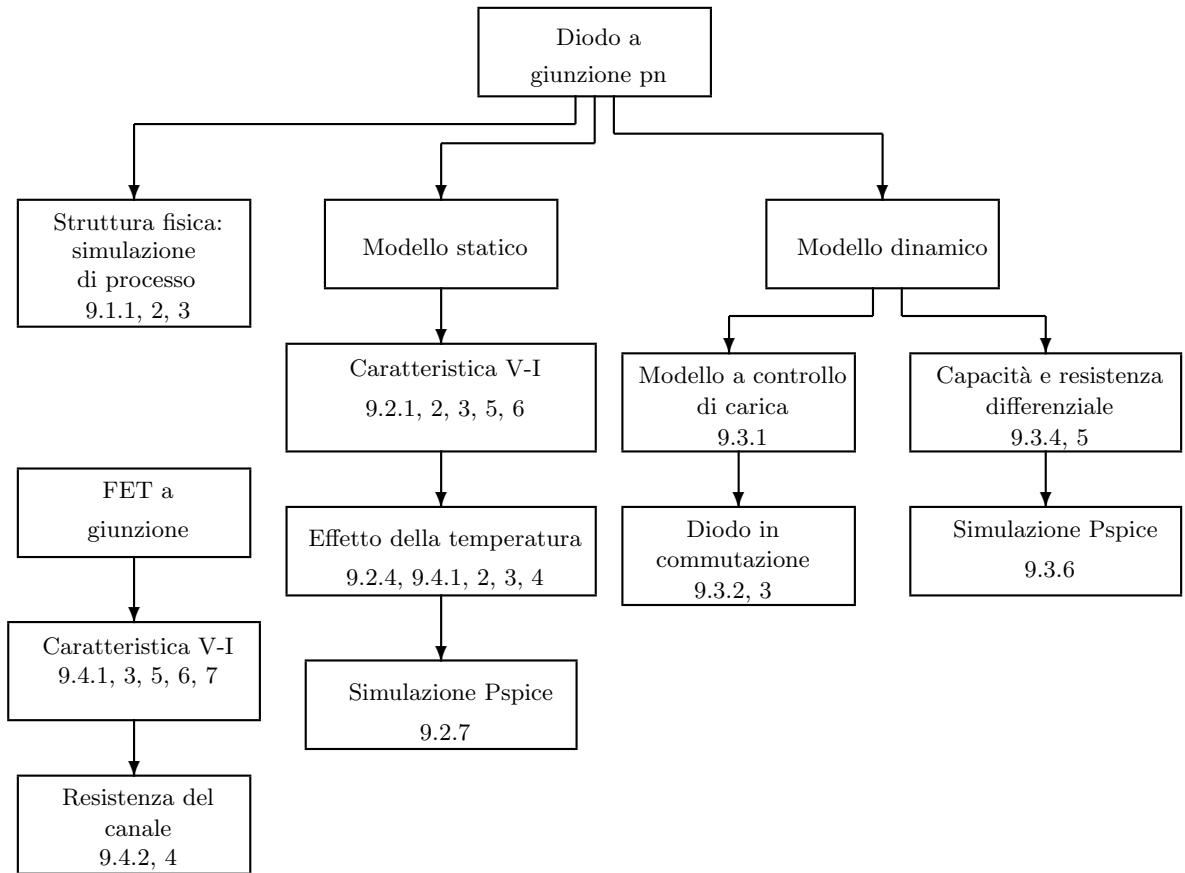


Figura 9.1: Struttura del capitolo 9.

9.1 Realizzazione di processo per una giunzione p-n

9.1.1

Un diodo a giunzione è ottenuto mediante un processo di diffusione a concentrazione superficiale costante di boro, seguito da una ridiffusione termica. La concentrazione iniziale del substrato è $N_{\text{sub}} = 1 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ e i parametri fisici dei due processi sono descritti di seguito.

Diffusione a concentrazione superficiale costante:

- *temperatura, $T_1 = 1100^\circ\text{C}$,*
- *pressione, $P = 1 \text{ atm}$,*
- *durata del processo, $t_1 = 120 \text{ min}$,*
- *diffusività, $D_1 = 1,5 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$,*
- *concentrazione alla superficie, $C_S = 7 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$.*

Ridiffusione:

- *temperatura, $T_2 = 1200^\circ\text{C}$,*

- *pressione*, $P = 1 \text{ atm}$,
- *durata del processo*, $t_2 = 200 \text{ min}$,
- *diffusività*, $D_2 = 1,35 \cdot 10^{-12} \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$.

Si calcoli per via analitica la profondità della giunzione ottenuta; si scriva poi il codice per simulare con SUPREM il processo tecnologico e si confrontino i risultati.

Dopo un passo di diffusione gassosa a concentrazione superficiale costante, il profilo di drogaggio nel substrato viene approssimato con la funzione d'errore complementare

$$C(x, t) = C_s \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{D_1 \cdot t}} \right)$$

Per poter procedere analiticamente nella determinazione del profilo di drogaggio successivo alla fase di ridiffusione, occorre approssimare la distribuzione a funzione complementare di errore con una gaussiana. Allo scopo si calcola la dose N' , ovvero la quantità totale di atomi droganti diffusi nella fetta di silicio per unità di area, integrando la concentrazione $C(x, t)$ nel tempo lungo tutta la durata del processo:

$$N' = \int_0^{t_1} C(x, \tau) d\tau = 2\sqrt{\frac{D_1 \cdot t_1}{\pi}} \cdot C_s = 3,71 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-2}$$

La funzione gaussiana approssimante $C_1(x)$ potrà essere

$$C(x, t = t_1) \simeq C_1(x) = \frac{N'}{\sqrt{\pi D_1 t_1}} e^{-\frac{x^2}{4D_1 t_1}}$$

tale da garantire che, all'istante $t = t_1$ la concentrazione per unità di area sia identica a quella fornita dalla funzione erfc . Tuttavia con tale approssimazione si altera il valore della concentrazione di picco, che risulta pari a

$$\max \{C_1\} = C_1(x = 0) = 1,099 C_s = 6,37 \cdot 10^{19} \text{ atomi/cm}^3$$

La concentrazione di drogante nel substrato dopo la ridiffusione può essere espresso come

$$C(x, t = t_1 + t_2) = C_2(x) = \frac{N'}{\sqrt{\pi L}} e^{-\frac{x^2}{4L^2}} \quad (9.1)$$

dove la lunghezza di diffusione vale

$$L = \sqrt{D_1 t_1 + D_2 t_2} = \sqrt{1,5 \cdot 10^{-13} 12060 + 1,35 \cdot 10^{-12} 20060} = 1,31 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$$

La profondità x_j della giunzione si determina come il valore di x per il quale la concentrazione del drogante espressa da $C_2(x)$ eguaglia quella del substrato

$$\begin{aligned} N_{\text{sub}} &= \frac{N'}{\sqrt{\pi L}} e^{-\frac{x_j^2}{4L^2}} \\ x_j &= \sqrt{4L \ln \left(\frac{N}{N_{\text{sub}} \sqrt{\pi L}} \right)} = 6,79 \text{ } \mu\text{m} \end{aligned}$$

Di seguito è dato il codice per la simulazione con SUPREM del processo:

```

TITLE DIODO 1
INITIALIZE <111> SILICON THICKNES=12
+ DX=0.015 PHOSPHOR=1E16
EXTRACT PREFIX=DIFFUSIONE DI BORO:
+ FILE=pn_diff.out
LOOP STEPS=1
ASSIGN NAME=TEMPB N.VALUE=(1200)
EXTRACT VALUE=@TEMPB
+ PREFIX=TEMPERATURA DI RIDIFFUSIONE =
INITIALIZE <111> SILICON THICKNES=12
+ DX=0.015 PHOSPHOR=1E16
ASSIGN NAME=TIMEB N.VALUE=(120)
DIFFUSION BORON=1E20 TIME=@TIMEB
+ TEMPERAT=@TEMPB PRESSURE=1
EXTRACT CHEMICAL BORON INTEGRAL NAME=N2
ASSIGN NAME=D2
+ N.VALUE=((@N2/1E20)*(@N2/1E20)/(@TIMEB*60*3.1416))
EXTRACT VALUE=@D2
+ PREFIX=DIFFUSIVITA' DEL PROCESSO DUE=
INITIALIZE <111> SILICON THICKNES=12
+ DX=0.015 PHOSPHOR=1E16
ASSIGN NAME=TEMP N.VALUE=(1100)
ASSIGN NAME=TIME N.VALUE=(120)
ASSIGN NAME=P N.VALUE=(1)
DIFFUSION BORON=1E20 TIME=@TIME
+ TEMPERAT=@TEMP PRESSURE=@P
EXTRACT CHEMICAL BORON INTEGRAL NAME=N1
EXTRACT VALUE=@N1 PREFIX=DOSE IMPIANTATA =
PLOT CHEMICAL NET LINE.TYP=1 LEFT=0 RIGHT=9
+ DEVICE=POSTSCRIPT PLOT.OUT=plot1
TITLE DISTRIBUZIONE DI BORO DOPO DIFFUSIONE
PRINT CHEMICAL BORON X.MIN=2 X.MAX=2.5 TERMINAL
ASSIGN NAME=D1
+ N.VALUE=((@N1/1E20)*(@N1/1E20)/(@TIME*60*3.1416))
EXTRACT VALUE=@D1
+ PREFIX=DIFFUSIVITA' DEL PROCESSO UNO=
DIFFUSION TIME=200 TEMPERAT=@TEMPB
+ PRESSURE=@P INERT
TITLE DISTRIBUZIONE DI BORO DOPO RIDIFFUSIONE
PRINT CHEMICAL BORON X.MIN=7 X.MAX=7.5 TERMINAL
PLOT CHEMICAL NET LINE.TYP=2 LEFT=0 RIGHT=9 ADD
+ DEVICE=POSTSCRIPT PLOT.OUT=plot2
ASSIGN NAME=TIMEQ N.VALUE=(@D1/@D2*@TIME)
EXTRACT VALUE=@TIMEQ PREFIX=TEMPO EQUIVALENTE =
ASSIGN NAME=L1
+ N.VALUE=(sqrt(@D2*60*(@TIMEQ+200)))
EXTRACT VALUE=@L1
+ PREFIX=LUNGHEZZA DI DIFFUSIONE =
ASSIGN NAME=TG1
+ N.VALUE=(sqrt(log(@N1/@L1/1.772E16)))
ASSIGN NAME=TG2 N.VALUE=(sqrt(log(2.7182)))
ASSIGN NAME=TG N.VALUE=(@TG1/@TG2)
EXTRACT VALUE=(@TG*@L1/50)
+ PREFIX=PROFONDITA' DI GIUNZIONE
EXTRACT PREFIX=
L.END
EXTRACT CLOSE

```

La simulazione fornisce i seguenti risultati:

diffusione a concentrazione superficiale costante	
temperatura di diffusione	1100 K
diffusività del processo	1,6649E-13 cm ² s ⁻¹
dose impiantata	6,1367E+15 cm ⁻²
ridiffusione termica	
temperatura di ridiffusione	1200 K
diffusività del processo	1,3182E-12 cm ² s ⁻¹
profondità di giunzione	7,3258E-06 m

Il profilo di drogaggio risultante è riportato nella figura 9.2. Le profondità di giunzione corrispondenti a differenti valori di concentrazione del substrato sono

profondità μm	concentrazione atomi/cm ³
7,335	1,05E16
7,350	1,01E16
7,365	9,76E15
7,380	9,35E15

La profondità effettiva della giunzione è quindi $x_j = 7,36 \mu\text{m}$

La differenza riscontrata tra il risultato ottenuto per via analitica e quello fornito dalla simulazione è da attribuirsi principalmente alla maggiore precisione con la quale SUPREM determina la dose impiantata e il coefficiente di diffusione. Infatti, ripetendo il calcolo di x_j con i valori di N' , D_1 e D_2 forniti dal simulatore, si ottiene

$$L = 1,7017 \cdot 10^{-8} \text{ cm} \quad \text{e} \quad x_j = 7,3255 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$$

9.1.2

Entro una fetta di silicio di tipo n con resistività 5 Ωcm viene impiantata una dose di boro di $1 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$ con un'energia di 100 keV, successivamente si effettua un processo di rinvenimento della durata di due ore.

1. *Quanto vale la concentrazione di picco del boro e quanto ampia è la regione di tipo p dopo l'impiantazione?*
2. *Quanto vale la concentrazione di picco del boro dopo il successivo fenomeno di diffusione?*

Si usi SUPREM per simulare il processo tecnologico e si confrontino i risultati con quelli ottenuti analiticamente.

Nota la resistività ρ del substrato e assumendo per la mobilità il valore $\mu = 1200 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$, si ricava la concentrazione di drogante del substrato

$$N_{\text{sub}} = \frac{1}{q \mu \rho} = 1,04 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$$

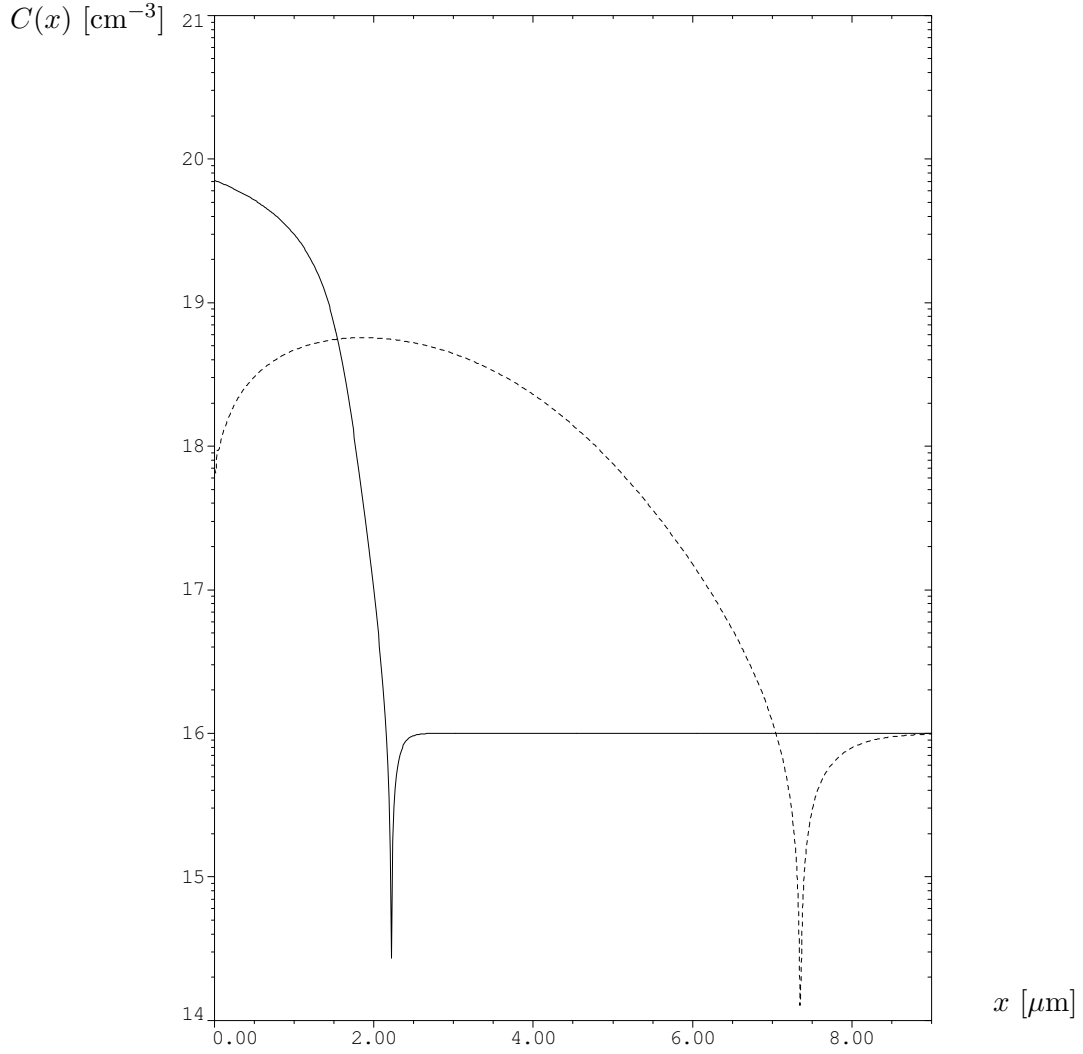


Figura 9.2: Profilo di drogaggio: a tratto continuo è la concentrazione netta di carica dopo la diffusione a concentrazione superficiale costante, tratteggiato è il profilo dopo la ridiffusione (delle varie grandezze è ovviamente rappresentato il modulo).

La distribuzione del drogante dopo l'impiantazione è di tipo gaussiano con $R_p = 290\text{nm}$ e $\Delta R_p = 70\text{ nm}$

$$C(x) = \frac{N}{\sqrt{\pi} L} e^{-\frac{(x - R_p)^2}{L^2}}$$

$$L = \sqrt{2}\Delta R_p = 9,9 \cdot 10^{-6} \text{ cm}$$

Il valore della concentrazione di picco si ottiene per $x = R_p$:

$$\max \{C(x)\} = 5,7 \cdot 10^{16} \text{ atomi/cm}^3$$

La profondità della giunzione ottenuta si trova eguagliando la concentrazione del sub-

strato e il profilo $C(x)$

$$N_{\text{sub}} = 9 \cdot 10^{14} = \frac{1 \cdot 10^{12}}{9,96 \cdot 10^{-6} \sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x_j - 290 \cdot 10^{-7}}{L}\right)^2} = C(x_j)$$

$$x_j = 0,492 \mu\text{m}$$

Per ottenere la concentrazione di picco dopo la ridiffusione, occorre calcolare la nuova lunghezza equivalente, data da

$$L_2 = \sqrt{2(\Delta R_p)^2 + 4Dt}$$

dove $D = 2 \cdot 10^{14} \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$ e $t = 120 \text{ min}$ sono rispettivamente la diffusività e il tempo del processo di ridiffusione. Si ottiene

$$L_2 = \sqrt{1,96 \cdot 10^{-10} + 5,76 \cdot 10^{-10}} = 2,778 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$$

Usando la distribuzione gaussiana con $L = L_2$, il nuovo valore di concentrazione di picco risulta

$$\max\{C(x)\} = \frac{1 \cdot 10^{12}}{\sqrt{\pi} 2,778 \cdot 10^{-5}} = 2,03 \cdot 10^{16} \text{ atomi/cm}^3$$

Codice per la simulazione con SUPREM del processo:

```
TITLE DIODO 2
INITIALIZE <111> SILICON THICKNES=3
+ DX=0.005 RESISTIV PHOSPHOR=5
IMPLANT DOSE=1E12 ENERGY=100 BORON
PLOT CHEMICAL NET RIGHT=1
+ BOTTOM=1E13 TOP=1E18 COLOR=1
TITLE MAX DOPO IMPIANTAZIONE
PRINT CHEMICAL BORON
+ X.MIN=0.28 X.MAX=0.33 TERMINAL
TITLE GIUNZIONE DOPO IMPIANTAZIONE -BORON-
PRINT CHEMICAL BORON
+ X.MIN=0.5 X.MAX=0.6 TERMINAL
TITLE GIUNZIONE DOPO IMPIANTAZIONE -PHOSPHOR-
PRINT CHEMICAL PHOSPHOR
+ X.MIN=0.5 X.MAX=0.55 TERMINAL
DIFFUSION TIME=120 TEMPERAT=1000 INERT
TITLE MAX DOPO DIFFUSIONE
PRINT CHEMICAL BORON
+ X.MIN=0.28 X.MAX=0.32 TERMINAL
TITLE GIUNZIONE DOPO DIFFUSIONE -BORON-
PRINT CHEMICAL BORON
+ X.MIN=0.7 X.MAX=0.75 TERMINAL
PLOT CHEMICAL NET RIGHT=1
+ BOTTOM=1E13 TOP=1E18 COLOR=2 ADD
```

Risultati della simulazione

Concentrazione di fosforo	$9,149 \cdot 10^{14} \text{ atomi/cm}^3$
Concentrazione di picco dopo l'impiantazione	$6,118 \cdot 10^{16} \text{ atomi/cm}^3$
Profondità della giunzione	$0,525 \mu\text{m}$
Concentrazione di picco dopo la ridiffusione	$2,384 \cdot 10^{16} \text{ atomi/cm}^3$

9.1.3

Si ha un substrato di tipo n , con $N_d = 1 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ e si vuole realizzare una giunzione $p-n$ effettuando una impiantazione di ioni di boro attraverso una finestra praticata nell'ossido. L'energia di impiantazione è 80 keV e la dose $2 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-2}$. A quale profondità si verifica la giunzione metallurgica? Supponendo che dai grafici si possa commettere un errore dello stesso segno di $\pm 5\%$ sia su R_p che su ΔR_p , quale errore percentuale si avrà sulla profondità della giunzione?

9.2 Modello statico della giunzione p-n

L'equazione caratteristica del diodo a giunzione contiene una dipendenza di tipo esponenziale della corrente dalla tensione

$$I = I_0 \left(e^{V/\eta V_T} - 1 \right) \quad (9.2)$$

Il parametro η tiene conto dei fenomeni di generazione e ricombinazione nella regione di carica spaziale (problema ??): il suo valore è 1 per il germanio, mentre nel silicio varia tra 1 e 2, a seconda dell'entità della corrente che attraversa il diodo. Trascurando il fenomeno della generazione e ricombinazione nella regione di carica spaziale, la corrente inversa di saturazione I_0 si valuta come

$$I_0 = A q \left(\frac{D_p}{L_p N_d} + \frac{D_n}{L_n N_a} \right) n_i^2 \quad \text{oppure} \quad I_0 = A q \left(\frac{D_p}{W_n N_d} + \frac{D_n}{W_p N_a} \right) n_i^2 \quad (9.3)$$

nei casi rispettivamente di diodo a base lunga e diodo a base corta; A è l'area della giunzione, W_n e W_p sono le lunghezze dei lati n e p della giunzione. Nel silicio, a temperature di funzionamento usuali, la corrente dovuta al fenomeno di generazione nella regione di svuotamento è di più ordini di grandezza superiore alla corrente ideale data dalla (9.3). Una buona stima (problema ??) della corrente inversa di generazione è data dalla

$$I_0 = \frac{q n_i w_d}{2\tau_0} A \quad (9.4)$$

dove w_d è l'ampiezza della regione di svuotamento e τ_0 è il tempo di vita associato alla ricombinazione dell'eccesso di portatori, dipendente dalla densità dei centri di ricombinazione.

L'effetto della resistenza di volume, R_s , è di ridurre la tensione presente sulla giunzione di una quantità $R_s \cdot I$; l'equazione caratteristica che tiene conto di tale effetto è

$$I = I_0 \left(e^{(V - R_s I)/\eta V_T} - 1 \right) \quad (9.5)$$

9.2.1

Un diodo a giunzione brusca e asimmetrica presenta le seguenti caratteristiche:

- concentrazione di atomi di boro $N_a = 2 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$;
- lunghezza del lato p , $W_p = 10 \text{ }\mu\text{m}$;
- lato n , molto drogato, con contributo trascurabile alla resistenza serie;
- area della giunzione, $A = 1 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2$;
- tempo di vita medio degli elettroni, $\tau = 1 \cdot 10^{-10} \text{ s}$.

Si ricavi l'equazione caratteristica tensione-corrente, tenendo conto della caduta resistiva nel silicio.

Si traccino sul medesimo grafico gli andamenti della corrente in funzione della tensione, così come risultano dall'equazione ricavata e dalla (9.2).

Infine si disegni il diagramma a bande attraverso la giunzione e la zona resistiva del dispositivo, in condizioni di equilibrio termodinamico e con una tensione applicata di 0,8 V.

Per valori elevati della corrente che attraversa la giunzione, la tensione applicata dall'esterno è in gran parte persa come caduta resistiva sulla resistenza di volume del semiconduttore. In questo caso, la tensione presente ai capi della giunzione è

$$V_j = V - I R_s$$

dove V è la tensione applicata al diodo, I la corrente e R_s la resistenza del materiale semiconduttore. L'equazione caratteristica del dispositivo, trascurando η , viene allora modificata

$$I = I_0 \left(e^{V_j/V_T} - 1 \right) = I_0 \left(e^{(V - I R_s)/V_T} - 1 \right) \quad (9.6)$$

Considerato che, per tensioni dirette, che è $I \gg I_0$, si può scrivere

$$V = V_T \ln \left(\frac{I}{I_0} + 1 \right) + I R_s \simeq -V_T \ln(I_0) + V_T \ln(I) + R_s I$$

Con la concentrazione di impurità indicata, risulta

$$\begin{aligned} \mu_n &= 1150 \text{ cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1} & ; & & \mu_p &= 360 \text{ cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1} \\ D_n &= 29,9 \text{ cm}^2 \text{s}^{-1} & ; & & L_n &= 5,47 \cdot 10^{-5} \text{ cm} \end{aligned}$$

Nel caso in esame, trascurando la corrente di generazione nella regione di svuotamento, poiché la giunzione è asimmetrica e il diodo è lungo ($L_n \ll W_p$), si ha

$$\begin{aligned} I_0 &= A q \left(\frac{D_p}{L_p N_d} + \frac{D_n}{L_n N_a} \right) n_i^2 \simeq A q \frac{D_n}{L_n N_a} n_i^2 \\ I_0 &\simeq 1 \cdot 10^{-4} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \frac{29,9}{5,47 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^{16}} (1,45 \cdot 10^{10})^2 = 9,2 \cdot 10^{-14} \text{ A} \end{aligned}$$

La resistenza del lato p della giunzione vale

$$R_s = \frac{1}{q \mu_p N_a} \frac{W_p}{A} = \frac{1}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 360 \cdot 2 \cdot 10^{16}} \frac{10 \cdot 10^{-4}}{1 \cdot 10^{-4}} = 8,68 \Omega$$

Nella figura 9.3 sono tracciate le caratteristiche tensione-corrente del diodo, con e senza l'effetto della resistenza R_s .

Assumendo che il lato n della giunzione, molto più drogato, sia degenerare, la barriera di energia che si trova sulla giunzione vale

$$E_g - (E_F - E_V) = E_g - k T \ln \left(\frac{N_V}{N_a} \right) = 0,961 \text{ eV}$$

Il diagramma a bande della giunzione in condizioni di equilibrio termodinamico è quello riportato nella figura 9.4. La struttura è simile a quella di un diodo metallo - semiconduttore di tipo p .

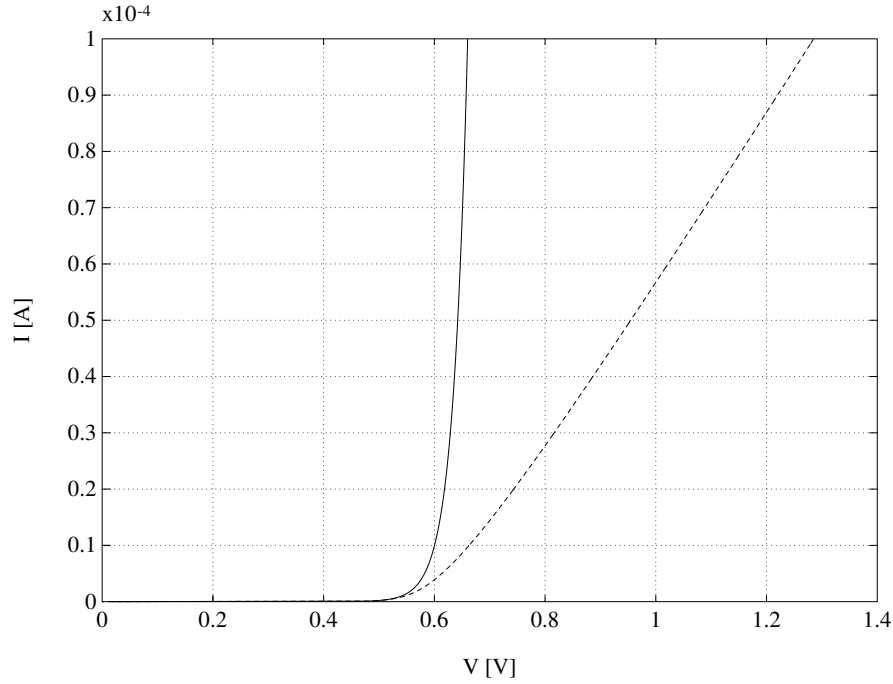


Figura 9.3: Influenza della resistenza di volume del semiconduttore sulla caratteristica tensione-corrente del diodo: la curva a tratto pieno si riferisce al caso di resistenza nulla, quella tratteggiata corrisponde a $R_s = 8,68 \Omega$.

Risolvendo iterativamente l'equazione caratteristica (9.6) con una tensione di polarizzazione diretta di 0,8 V, si trova che la corrente attraverso il diodo vale $I = 14,8$ mA. La caduta di tensione sulla resistenza di volume del semiconduttore è quindi pari a $\Delta V = 0,128$ V, mentre sulla giunzione si hanno $V_j = 0,672$ V; la barriera di energia risulta abbassata dal lato n^+ a $q\phi_i - qV_j = 0,288$ eV e dal lato p al valore $q\Delta V = qR_s I = 0,128$ eV. Con questi valori e sapendo che nella zona resistiva il campo elettrico è costante e che quindi il potenziale varia linearmente, il diagramma a bande può essere completato come indicato nella figura 9.5, dove con linea tratteggiata è anche tracciato l'andamento nel caso di equilibrio termodinamico.

9.2.2

Un diodo di area della sezione trasversale $A = 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^2$ ha una corrente inversa di saturazione pari a $I_0 = 1 \cdot 10^{-9} \text{ A}$ e una resistenza serie $R_s = 8 \Omega$; si calcoli il valore di tensione diretta per il quale il dispositivo “brucia”, sapendo che la massima densità di corrente sostenibile è $J_{\max} = 10^5 \text{ Acm}^{-2}$.

La corrente che attraversa il dispositivo nelle condizioni limite vale

$$I_{\max} = J_{\max} A = 25 \text{ mA}$$

la caduta di tensione sulla resistenza di volume del diodo è

$$\Delta V = I_{\max} R_s = 0,2 \text{ V}$$

mentre la tensione sul diodo si trova con

$$V = V_T \ln \left(\frac{I_{\max}}{I_0} + 1 \right) + I_{\max} R_s = 0,5 + 0,2 = 0,7 \text{ V}$$

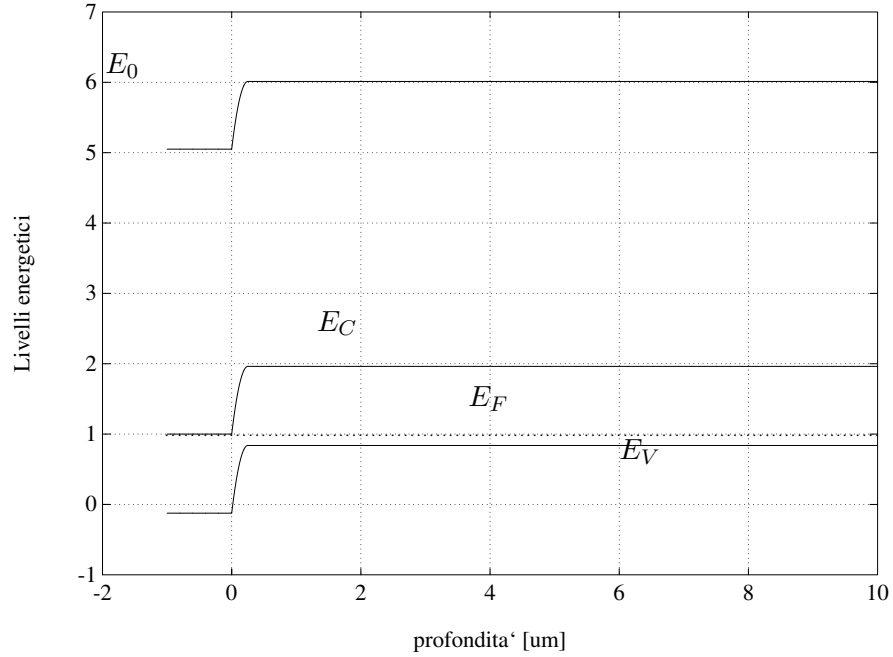


Figura 9.4: Diagramma a bande attraverso la giunzione, in equilibrio.

9.2.3

Si consideri alla temperatura ambiente la situazione in cui un diodo Schottky viene posto in serie a un diodo a giunzione $p^+ - n$. Si considerino entrambi i diodi ideali e con area della sezione trasversale $S = 1 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^2$. Il diodo Schottky ha una barriera di altezza $q\phi_M = 0,8 \text{ eV}$ ed è caratterizzato da una costante di Richardson¹ $A_0 = 7,6 \cdot 10^4 \text{ A m}^{-2} \text{ K}^{-2}$. Il diodo a giunzione è al silicio e nel lato n , lungo $x_n = 3 \text{ }\mu\text{m}$, il drogaggio costante è $N_d = 5 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$. La vita media delle lacune nel lato n sia di $1 \text{ }\mu\text{s}$.

Se si applica una tensione di $0,8 \text{ V}$ determinare l'intensità della corrente e le tensioni ai capi dei due diodi, a) se sono disposti nello senso e con polarizzazione diretta, b) se sono messi l'uno opposto all'altro e con il diodo Schottky nel verso della polarizzazione diretta.

a)

Si indica con V_g la tensione ai capi della giunzione e con V_c quella ai capi del contatto metallo semiconduttore, sia V la tensione totale

$$V = V_g + V_c$$

La corrente nel diodo Schottky vale²

$$I = I_{s,c} \left(e^{V_c/V_T} - 1 \right) \simeq I_{s,c} e^{V_c/V_T}$$

dove

$$I_{s,c} = A_0 S T^2 e^{-\phi_M/V_T} A = 7,6 \cdot 10^4 \times 1 \cdot 10^{-2} \times 300^2 \times e^{-0,8/0,0259} = 2,6 \cdot 10^{-6} \text{ A}$$

¹Ovviamente non si tratta di un diodo al silicio. Quale potrebbe essere il semiconduttore? Si ricordi che che (problema ??) $A_0 = 4\pi m^* q k^2 / h^3$.

²In polarizzazione diretta prevale l'esponenziale sull'unità.

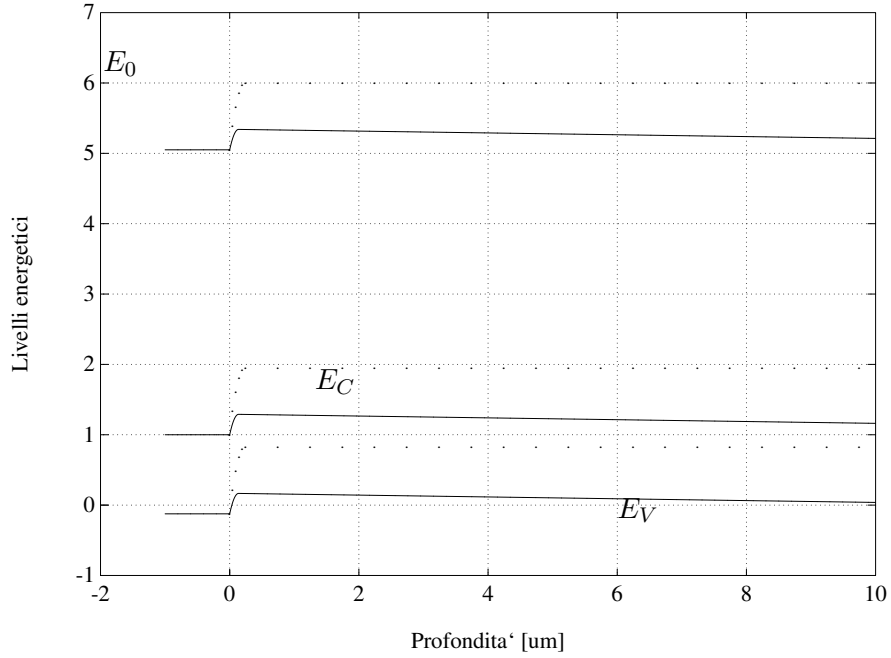


Figura 9.5: Diagramma a bande con $V = 0,8$ V.

La corrente nel diodo a giunzione $p-n$ vale

$$I = I_{s,g} \left(e^{V_g/V_T} - 1 \right) \simeq I_{s,g} e^{V_g/V_T}$$

Per la concentrazione di drogaggio in esame è $\mu_p = 280 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1} \text{ V}^{-1}$, quindi $D_p = \mu_p V_T = 7,25 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ e $L_p = \sqrt{D_p \tau_p} = 26,9 \text{ }\mu\text{m}$. Quindi è $x_n \leq L_p$, cioè si tratta di un diodo corto, per cui

$$\begin{aligned} I_{s,g} &= \frac{q D_p p_{n0}}{x_n} S = \frac{q D_p n_i^2}{N_d x_n} S = \\ &= \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \times 7,25 \times (1,45 \cdot 10^{10})^2}{5 \cdot 10^{15} \times 3 \cdot 10^{-4}} 1 \cdot 10^{-2} = 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ A} \end{aligned}$$

Eguagliando le correnti si ha

$$\begin{aligned} I_{s,c} e^{V_c/V_T} &= I_{s,g} e^{V_g/V_T} \\ e^{(V_c - V_g)/V_T} &= \frac{I_{s,g}}{I_{s,c}} = 6,25 \cdot 10^{-7} \\ V - 2V_g &= 0,0259 \ln 6,25 \cdot 10^{-7} = -0,37 \\ V_g &= \frac{1}{2} [0,8 - (-0,37)] = 0,585 \text{ V} \\ V_c &= 0,215 \text{ V} \end{aligned}$$

La corrente vale $I = 10 \text{ mA}$.

b)

Se la giunzione Schottky è polarizzata direttamente mentre il diodo $p-n$ è polarizzato inversamente, è su quest'ultimo che cade la maggior parte della tensione.

Nel diodo $p - n$, scorre sostanzialmente la corrente di saturazione inversa

$$I \simeq I_{s,g} = 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ A}$$

Eguagliando le correnti si trova la caduta sul diodo Schottky

$$\begin{aligned} I_{s,g} &\simeq I_{s,c} \left(e^{V_c/V_T} - 1 \right) \\ \frac{I_{s,g}}{I_{s,c}} + 1 &= e^{V_c/V_T} \\ V_c &= 1,6 \cdot 10^{-8} \text{ V} \end{aligned}$$

Di conseguenza $V_g \simeq 0,8 \text{ V}$.

9.2.4

Si consideri un diodo a giunzione brusca e simmetrica, con $N_a = N_d = 5 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$, tempo di vita medio dei portatori nelle regioni neutra e di svuotamento $\tau = 5 \text{ ns}$, area della sezione trasversale $A = 300 \mu\text{m}^2$, lunghezza $W_p = W_n = 30 \mu\text{m}$.

1. Calcolare la corrente inversa di saturazione a 300 K, tenendo conto della generazione nella regione svuotata.
2. Tracciare la caratteristica tensione-corrente per tensioni dirette comprese tra 0 e 5 V.
3. Determinare la dipendenza dalla temperatura della corrente inversa di saturazione I_0 e della tensione di soglia V_s e riportarla in due grafici.

a)

La corrente inversa di saturazione, nell'ipotesi di diodo a lato lungo e trascurando la generazione nella regione di svuotamento, è

$$I_0 = Aq \left(\frac{D_n n_i^2}{L_n N_a} + \frac{D_p n_i^2}{L_p N_d} \right)$$

Si determinano i valori di mobilità, diffusività e lunghezze di diffusione:

$$\begin{aligned} \mu_n &= 367 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1} & ; & & \mu_p &= 196 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1} \\ D_n &= 9,542 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1} & ; & & D_p &= 5,096 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1} \\ L_n &= 3,09 \mu\text{m} & ; & & L_p &= 2,26 \mu\text{m} \end{aligned}$$

si ottiene

$$I_0 = 9,5 \cdot 10^{-18} \text{ A}$$

Tenendo conto della generazione nella regione di svuotamento ??, la corrente inversa di saturazione, data da

$$I_0 = \frac{q n_i w_d}{2\tau} A$$

risulta decisamente più elevata:

$$\begin{aligned} w_d &= \sqrt{\frac{2\epsilon_s}{q N_{eq}}} \phi_i = 6,8 \cdot 10^{-6} \text{ cm} \\ \phi_i &= V_T \ln \frac{N_a N_d}{n_i^2} = 0,9 \text{ V} \\ I_0 &= 2,37 \text{ pA} \end{aligned}$$

b)

La caratteristica tensione-corrente del diodo è data nella figura 9.6 per i tre valori di temperatura 250, 300 e 350 K; la linea tratteggiata orizzontale corrisponde a una corrente di $1 \mu\text{A}$ e permette di apprezzare lo spostamento della tensione di soglia con la temperatura.

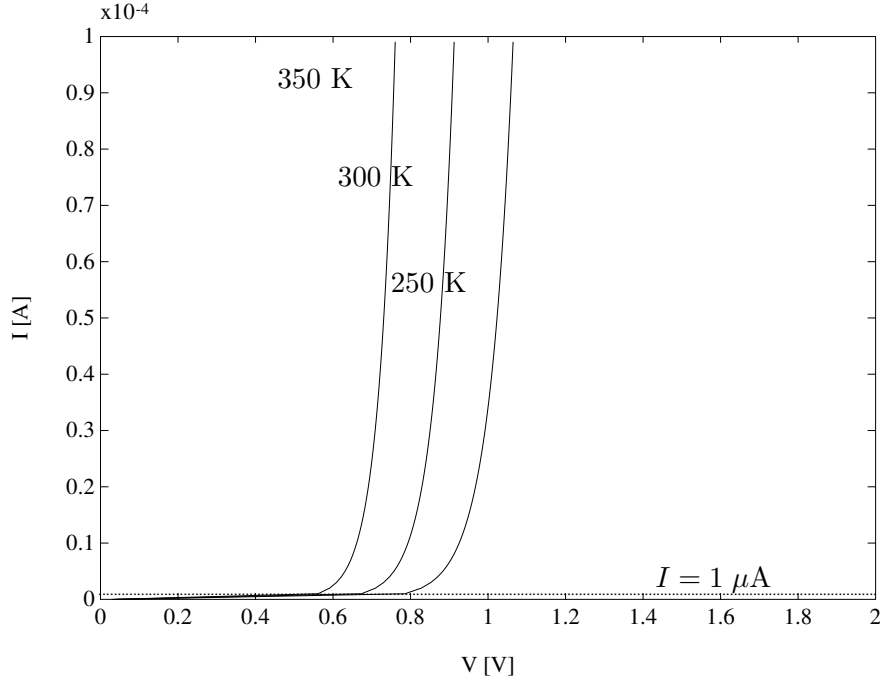


Figura 9.6: Caratteristica V-I del diodo.

c)

La dipendenza dalla temperatura della corrente inversa di saturazione è principalmente dovuta alla concentrazione dei portatori intrinseci, n_i

$$n_i = \sqrt{4 \left(\frac{2\pi m_o k}{h^2} \right)^3 \left(\frac{m_n^* m_p^*}{m_0^2} \right)^{\frac{3}{2}} T^3 e^{-E_g/\eta kT}}$$

Poiché in un diodo p-n in silicio il legame tra I_0 e n_i è lineare (9.4), si può scrivere

$$I_0 = C T^{3/2} e^{-E_g/2kT}$$

con C costante; il valore di corrente I_0 in prossimità di una temperatura T_0 si può approssimare con uno sviluppo in serie troncato al termine di primo grado:

$$I_0(T) \simeq I_0(T_0) + \left. \frac{dI_0}{dT} \right|_{T_0} (T - T_0)$$

Derivando rispetto alla temperatura T , si ha

$$\begin{aligned} \frac{dI_0}{dT} &= C \left(\frac{3}{2} \sqrt{T} + T^{3/2} \frac{E_g}{2k T^2} \right) e^{-E_g/2kT} \\ &= I_0 \left(\frac{3}{2T} + \frac{E_g}{2k T^2} \right) \end{aligned}$$

Assumendo $T_0 = 300$ K, la variazione percentuale della corrente inversa di saturazione risulta

$$\frac{1}{I_0} \frac{dI_0}{dT} = \frac{3}{2 \times 300} + \frac{1,124}{2 \cdot 0,026 \cdot 300} = 0,005 + 0,072 = 7,7\% \text{ K}^{-1}$$

Si noti che il valore di $(1/I_0) \cdot dI_0/dT$ misurato vale approssimativamente $7\% \text{ K}^{-1}$, per cui I_0 raddoppia circa ogni 10°C di aumento della temperatura. La dipendenza di I_0 dalla temperatura è illustrata nella figura 9.7.

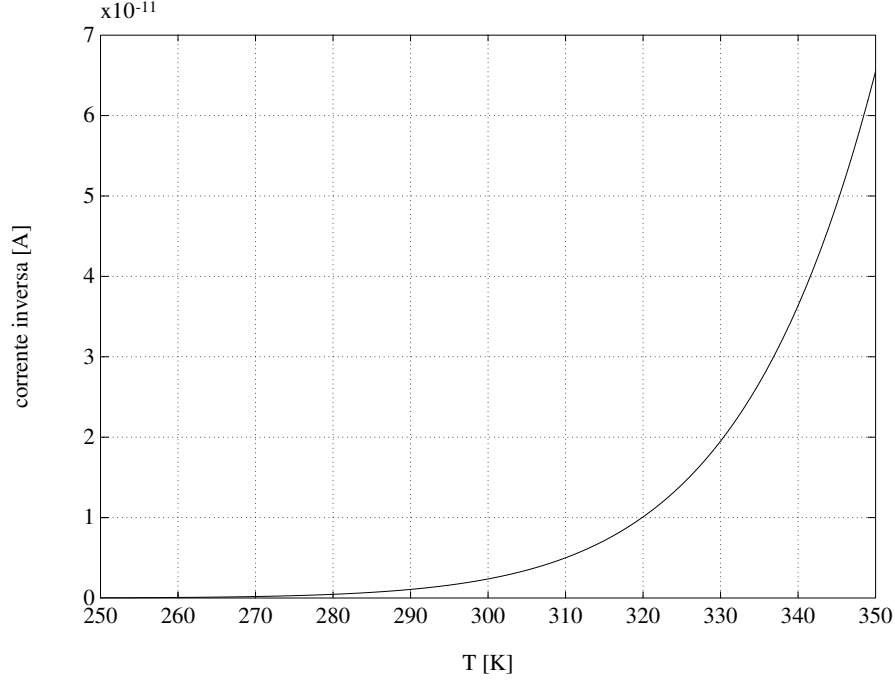


Figura 9.7: Dipendenza della corrente inversa di saturazione dalla temperatura.

La dipendenza della tensione dalla temperatura si ottiene invece a partire dall'equazione caratteristica del diodo, imponendo una corrente I costante attraverso il dispositivo e valutando la corrispondente variazione di tensione:

$$V = \eta V_T \ln \left(\frac{I + I_0}{I_0} \right)$$

derivando si ha

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dT} &= \eta \frac{dV_T}{dT} \ln \left(\frac{I + I_0}{I_0} \right) + \eta V_T \frac{d}{dT} \ln \left(\frac{I + I_0}{I_0} \right) = \\ &= \frac{\eta k}{q} \ln \left(\frac{I + I_0}{I_0} \right) - \eta V_T \frac{I}{I + I_0} \frac{1}{I_0} \frac{dI_0}{dT} \end{aligned}$$

oppure, esplicitando la presenza della tensione,

$$\frac{dV}{dT} = \frac{V}{T} - \eta V_T \left(1 - e^{-V/\eta V_T} \right) \frac{1}{I_0} \frac{dI_0}{dT}$$

Assumendo come soglia di tensione quella corrispondente a una corrente nel diodo di 1 pA (nel caso in esame $V_\gamma = 0,6$ V), si ottiene

$$\frac{dV}{dT} = 0,002 - 0,004 = -2 \text{ mV/C}$$

in buon accordo con il valore sperimentale tipico di $-2,5 \text{ mV/C}$. L'andamento della tensione di soglia, definita convenzionalmente come la tensione corrispondente a una corrente di 1 pA , è riportato in funzione della temperatura nella figura 9.8.

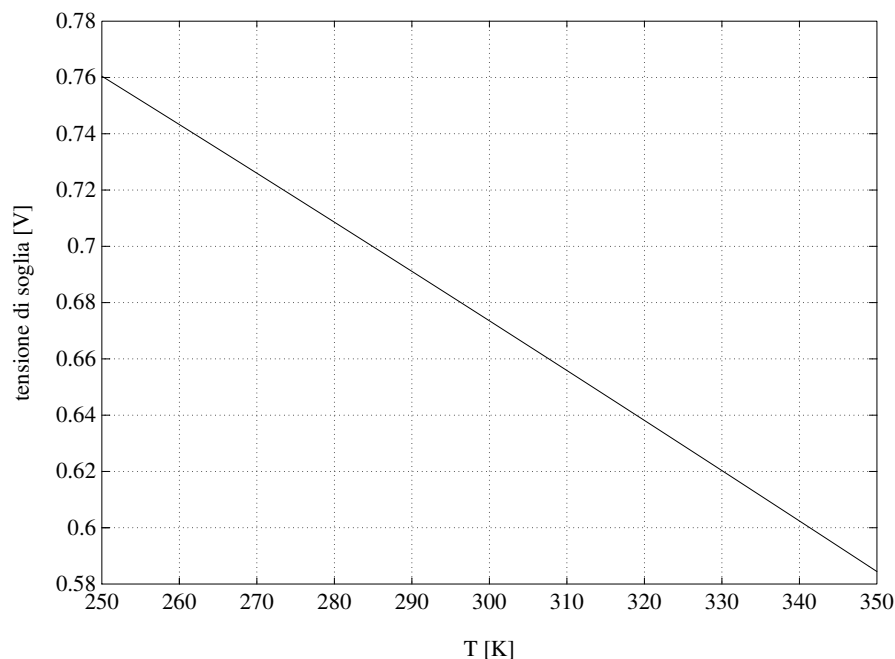


Figura 9.8: Dipendenza della tensione di soglia dalla temperatura.

9.2.5

Si consideri il diodo a giunzione con isolamento a ossido riportato nella figura 9.9 e caratterizzato dai seguenti valori di drogaggio

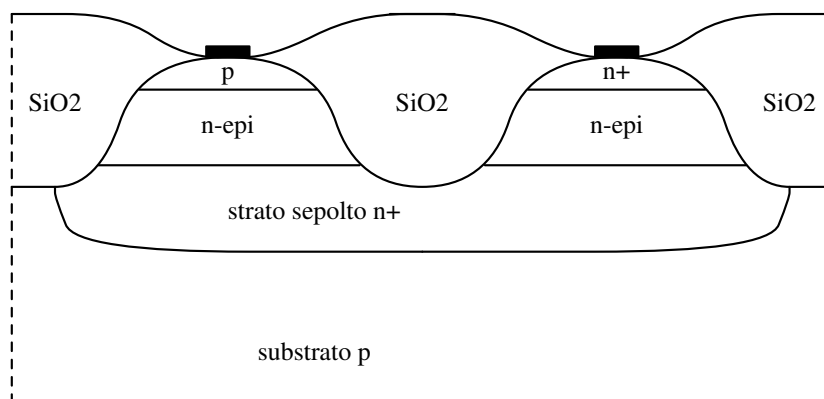


Figura 9.9: Vista in sezione di un diodo integrato.

- lato p , $N_a = 5 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$,
- strato epitassiale n , $N_d = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$,
- contatto n^+ e strato sepolto, $N_d = 8 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$,

e dalle dimensioni

- lunghezza zona p , $x_p = 5 \mu\text{m}$,
- lunghezza zona n^+ in superficie, $x_n = 5 \mu\text{m}$,
- separazione tra zona p e zona n^+ , $x_s = 5 \mu\text{m}$,
- profondità della diffusione di tipo p , $h_p = 0,8 \mu\text{m}$,
- spessore dello strato epitassiale, $h_e = 3 \mu\text{m}$ (fino allo strato sepolto),
- profondità della zona n^+ , $h_n = 0,8 \mu\text{m}$,
- spessore dello strato sepolto, $h_b = 4 \mu\text{m}$,
- lunghezza della struttura $w = 12 \mu\text{m}$,

Calcolare

1. una stima della resistenza serie;
2. il valore del campo elettrico massimo alla giunzione, con una tensione inversa di 6 V.

Confrontare i valori ottenuti con quelli di un diodo identico ma privo dello strato sepolto.

9.3 Diodi Zener

9.3.1

Si consideri un diodo Zener che, nella zona di polarizzazione inversa, presenta a una tensione $V = -V_Z$ un brusco aumento della corrente a tensione quasi costante. Nel diodo Zener si usa il terzo quadrante della caratteristica, quindi tensione e corrente hanno convenzioni di segno opposte a quelle di un normale diodo $p-n$.

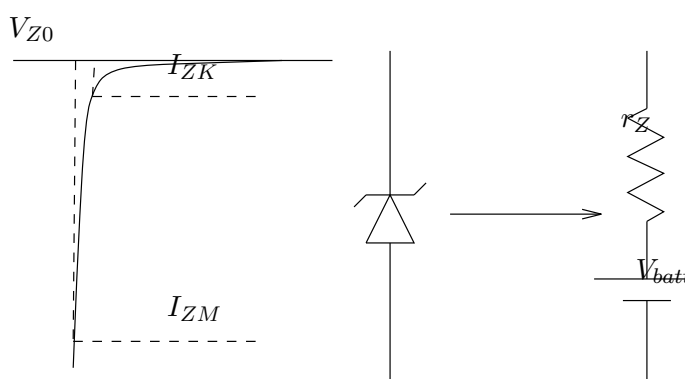


Figura 9.10: Caratteristica del diodo in polarizzazione inversa con zona di “breakdown”. Circuito equivalente della zona lineare di funzionamento Zener.

a) Supponendo che in tale zona la resistenza differenziale, $r = dV/dI = r_Z$, sia sostanzialmente costante, si disegni un circuito equivalente che rappresenti il comportamento del diodo per $|I_{ZK}| \leq |I| \leq |I_{ZM}|$, dove I_{ZK} è la corrente corrispondente alla tensione di innesco dello Zener, V_{Z0} , e I_{ZM} è la massima corrente sostenibile.

b) Se $r_Z = 4 \Omega$, $V_{Z0} = 6,7 \text{ V}$ per $I_{ZK} = 1 \text{ mA}$, si calcoli la tensione ai capi del diodo per correnti nel diodo di 10 mA e di 30 mA.

c) Con riferimento al circuito della figura 9.11, dove $R = 560 \, \Omega$, se I_{ZK} è la minima corrente per restare in zona lineare e $I_{ZM} = 50 \, \text{mA}$ è la massima corrente che può scorrere nel diodo per problemi di dissipazione, si chiede di determinare l'escursione di tensione in ingresso e in uscita.

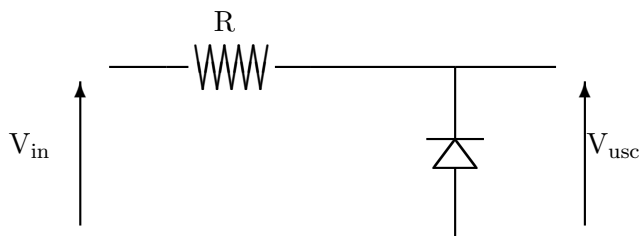


Figura 9.11: Circuito di stabilizzazione della tensione.

a)

Una retta nel piano $I - V$ è rappresentabile circuitualmente con una resistenza (r_Z) in serie con un generatore di tensione costante

$$V = r_Z I + V_{\text{batt}}$$

Dato che quando fluisce la corrente I_{ZK} la tensione è V_{Z0}

$$V_{Z0} = r_Z I_{ZK} + V_{\text{batt}}$$

è

$$V_{\text{batt}} = V_{Z0} - r_Z I_{ZK}$$

b)

La tensione del generatore equivalente è

$$V_{\text{batt}} = 6,7 - 4 \times 1 \cdot 10^{-3} = 6,696 \, \text{V}$$

La tensione per $I = 10 \, \text{mA}$ è

$$V = r_Z I + V_{\text{batt}} = 4 \times 10 \cdot 10^{-3} + 6,696 = 6,736 \, \text{V}$$

La tensione per $I = 30 \, \text{mA}$ è

$$V = r_Z I + V_{\text{batt}} = 4 \times 30 \cdot 10^{-3} + 6,696 = 6,816 \, \text{V}$$

Come si vede a un'escursione di $20 \, \text{mA}$ corrisponde una variazione di tensione di $0,08 \, \text{V}$.

c)

Nel circuito della figura 9.11, quando la corrente nel diodo è la corrente minima, la tensione di uscita vale

$$V_{\text{usc}} = r_Z I_{ZK} + V_{\text{batt}} = 6,7 \, \text{V}$$

è ovvio che la corrente minima nel diodo si ha quando il generatore di ingresso presenta il suo valore minimo; a vuoto la stessa corrente fluisce in R e nel diodo

$$V_{\text{in,min}} = R I_{ZK} + V_{\text{usc}} = 560 \times 1 \cdot 10^{-3} + 6,7 = 7,26 \, \text{V}$$

Quando la corrente è massima, si ha

$$V_{\text{usc}} = r_Z I_{ZM} + V_{\text{batt}} = 6,896 \, \text{V}$$

e la corrente massima nel diodo si ha quando il generatore di ingresso presenta il suo valore massimo

$$V_{\text{in,max}} = R I_{ZM} + V_{\text{usc}} = 560 \times 50 \cdot 10^{-3} + 6,896 = 34,90 \, \text{V}$$

Quindi, mentre la tensione di ingresso presenta fluttuazioni pari a $27,6 \, \text{V}$, l'uscita ha oscillazioni di soli $0,196 \, \text{V}$.

9.4 Simulazione in regime statico del diodo

9.4.1

Si usi il simulatore PSPICE per ottenere la caratteristica statica del diodo, inserendo uno per volta nel modello i seguenti parametri:

1. corrente di saturazione $I_S = 1 \cdot 10^{-14}$ A;
2. resistenza serie $R_s = 10 \Omega$;
3. tensione e corrente di breakdown $B_V = 5$ V, $I_{BV} = 1 \cdot 10^{-5}$ A.

Si osservi inoltre come si modifica la caratteristica quando la resistenza serie viene portata a 100Ω e quando tensione e corrente di breakdown sono modificate in 4 V e $1 \cdot 10^{-3}$ A.

Nella figura 9.12 è riportato il circuito usato per ottenere la caratteristica del diodo: la tensione sul generatore VGEN varia da -10 V a 10 V, e alimenta più rami in parallelo, costituiti ciascuno da una resistenza in serie con un diodo. Le resistenze servono per polarizzare correttamente i diodi e hanno tutte il medesimo valore, mentre ogni diodo fa riferimento a un modello diverso, descritto nel comando .MODEL delle istruzioni d'ingresso di PSPICE. Tale allestimento circuitale consente di ottenere in una sola simulazione i risultati relativi a più diodi diversi.

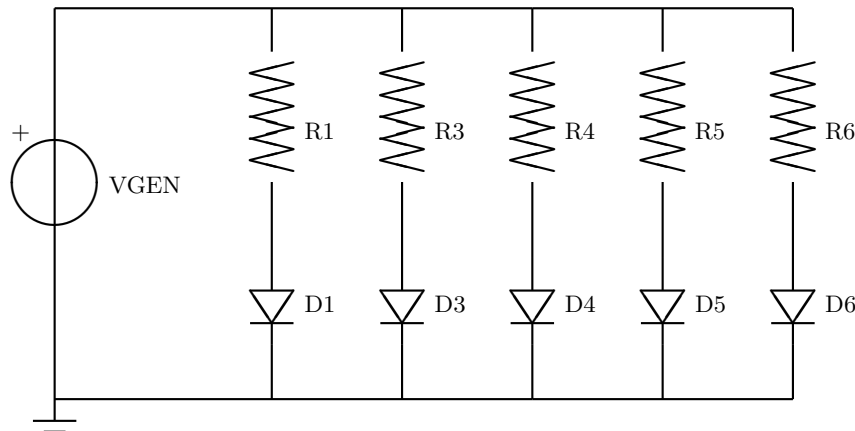


Figura 9.12: Circuito per le caratteristiche statiche del diodo.

L'analisi effettuata, in continua, è ripetuta per ciascuno dei valori di tensione specificati nel comando .DC. L'insieme delle istruzioni di ingresso per la simulazione è:

```
MODELLO STATICO DEL DIODO
* modelli *
.MODEL D01 D (IS=1E-14)
.MODEL D03 D (IS=1E-14 RS=10)
.MODEL D04 D (IS=1E-14 RS=100)
.MODEL D05 D (IS=1E-14 RS=10 BV=5 IBV=1E-5)
.MODEL D06 D (IS=1E-14 RS=10 BV=4 IBV=1E-3)
* descrizione del circuito *
VGEN 10 0 10
R1 10 1 100
R3 10 3 100
```

```

R4 10 4 100
R5 10 5 100
R6 10 6 100
D1 1 0 D01
D3 3 0 D03
D4 4 0 D04
D5 5 0 D05
D6 6 0 D06
* analisi *
.DC VGEN -10 10 .01
.PROBE
.END

```

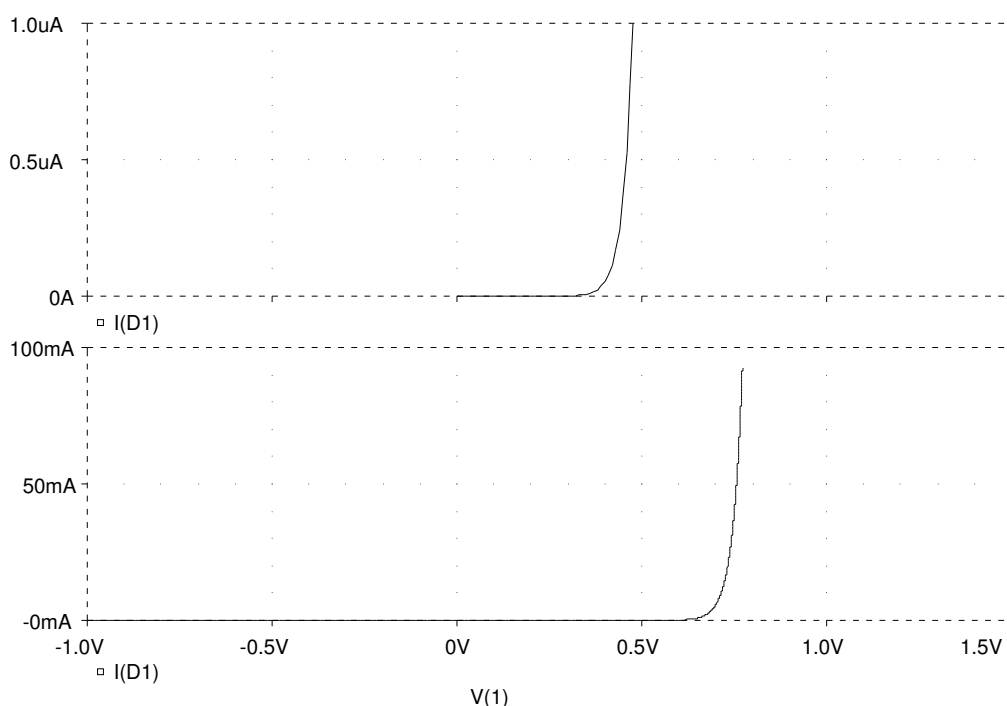


Figura 9.13: Caratteristica del diodo D1.

I risultati delle simulazioni sono dati nelle figure 9.13, 9.14 e 9.15. Nella prima, la stessa caratteristica, ottenuta mediante il modello D1, è ripetuta con due scale differenti: è evidente che la posizione della tensione di soglia dipende dalla scala sull'asse delle ordinate. In particolare, su di una scala che permetta di apprezzare correnti dell'ordine del mA, il valore della soglia risulta prossimo a 0,6 V.

Nella figura 9.14 è descritto l'effetto della resistenza serie R_s : le due curve si riferiscono ai modelli D3 e D4, con $R_s=10\ \Omega$ e $R_s=100\ \Omega$ rispettivamente. Si noti che in questa figura, per poter confrontare curve relative a diodi diversi, la variabile sull'asse della ascisse è la tensione del generatore VGEN.

Infine l'effetto dei parametri B_V e I_{BV} sulla tensione di breakdown è evidenziato nella figura 9.15.

9.4.2

Un semplice modello del diodo in polarizzazione diretta prevede una caratteristica del tipo dato nella figura 9.16, dove V_γ è la tensione di soglia ($\simeq 0,6\ V$) e la pendenza della

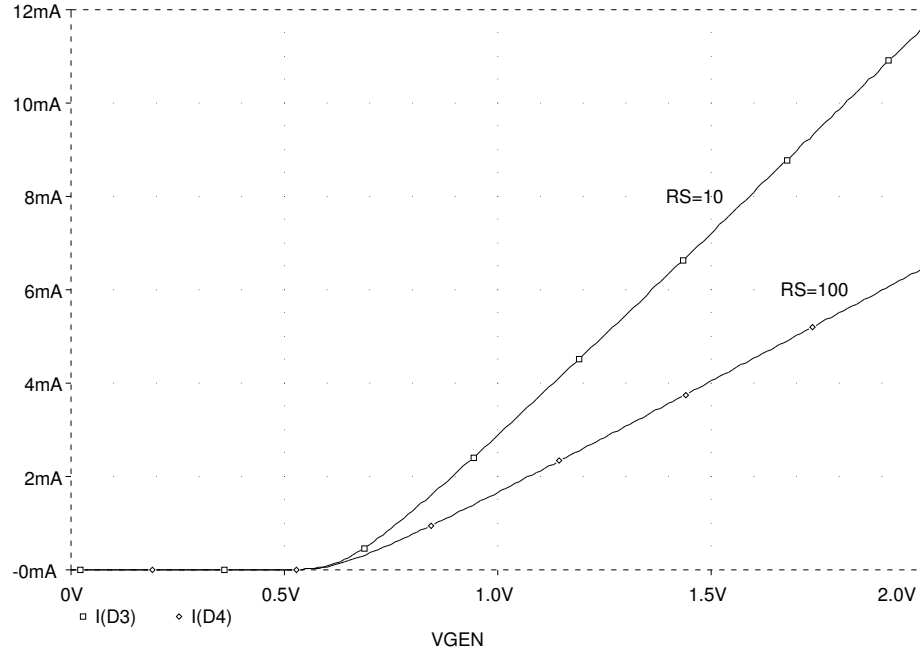


Figura 9.14: Caratteristiche dei diodi D3 e D4.

retta è la resistenza R_f ($\simeq 10 \Omega$). Tale modello corrisponde all'equazione tensione-corrente

$$I = \frac{V - V_\gamma}{R_f} \text{ per } V > V_\gamma$$

Si mettano in relazione la resistenza R_f del modello, la resistenza di volume R_s del diodo reale e la resistenza differenziale r_d del diodo ideale.

Il modello del diodo reale si attua von la serie di un diodo ideale, di equazione

$$I = I_0 \left(e^{V_j/V_T} - 1 \right)$$

e della resistenza di volume R_s . L'equazione tensione-corrente risultante è

$$I = I_0 \left[e^{(V - R_s I)/V_T} - 1 \right]$$

La resistenza differenziale del diodo reale si ottiene derivando la tensione V rispetto alla corrente I

$$V = R_s I + V_T \log \left(\frac{I + I_0}{I_0} \right)$$

$$R_f = \frac{dV}{dI} = R_s + V_T \frac{1}{I + I_0} \simeq R_s + r_d$$

Al crescere della corrente, $r_d = V_T/I$ diventa trascurabile e si ha $R_f \simeq R_s$.

9.5 Modello dinamico della giunzione p-n

La *capacità di transizione* di un diodo a giunzione è dovuta alla variazione con la tensione applicata della lunghezza della zona di svuotamento e si esprime come

$$C_T = \epsilon_s \frac{A}{w}$$

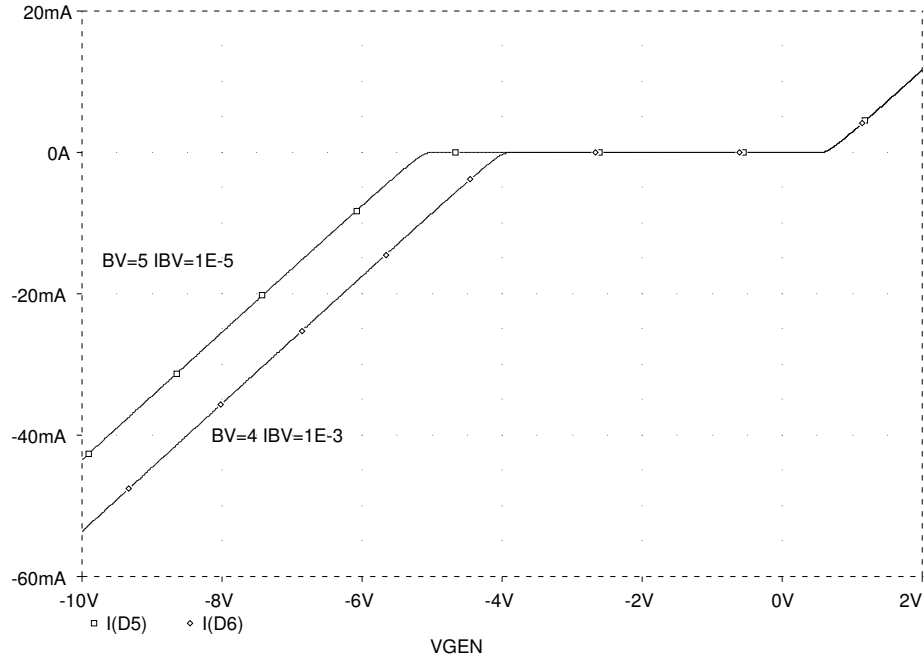


Figura 9.15: Caratteristiche dei diodi D5 e D6.

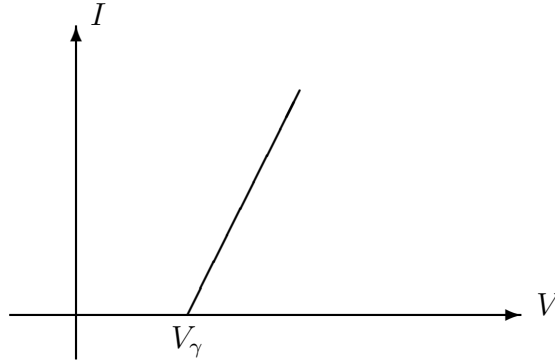


Figura 9.16: Modello semplificato del diodo.

dove A è l'area della giunzione e w è l'ampiezza della regione di svuotamento, la cui dipendenza dalla tensione applicata è legata al tipo di giunzione; per giunzioni di tipo brusco, si ha

$$w = \sqrt{\frac{2\epsilon_s}{q N_{eq}}} \sqrt{\phi_i - V} \quad ; \quad N_{eq} = \frac{N_a N_d}{N_a + N_d}$$

mentre per una giunzione graduale lineare con concentrazione volumica di carica $\rho(x) = a x$ si ha

$$w = \left[\frac{12\epsilon_s}{q a} (\phi_i - V) \right]^{1/3}$$

La validità delle espressioni è comunque limitata alla condizione $V \ll \phi_i$.

La *capacità di diffusione* è in realtà un fenomeno di accumulo di portatori minoritari in polarizzazione diretta regolato dall'equazione di controllo di carica. In prima

approssimazione un modello del fenomeno si può ottenere mediante una capacità che, in una giunzione asimmetrica, si valuta come

$$C_D = \tau \frac{dI}{dV} = \frac{\tau I}{\eta V_T}$$

dove τ è il tempo di vita media dei portatori minoritari nel lato meno drogato della giunzione.

Dall'equazione di continuità, integrando lungo il semiconduttore le concentrazioni di portatori, si ottiene il *modello a controllo di carica*. Per una giunzione si ha

$$I = \frac{dQ_p}{dt} + \frac{Q_p}{\tau_p} + \frac{dQ_n}{dt} + \frac{Q_n}{\tau_n} \quad (9.7)$$

dove τ_p e τ_n sono i tempi di vita medii di lacune e elettroni.

Per una giunzione asimmetrica (p^+n) il modello si semplifica essendo trascurabile la carica di portatori minoritari accumulati nel lato più drogato

$$I = \frac{dQ_p}{dt} + \frac{Q_p}{\tau_p} \quad (9.8)$$

dove τ_p è il tempo di vita medio delle lacune.

9.5.1

Ricavare l'espressione (9.7) del modello a controllo di carica di un diodo a giunzione brusca e simmetrica con lati lunghi.

Trascurando le correnti di ricombinazione entro la regione di svuotamento, le componenti di corrente attraverso una giunzione p-n hanno l'andamento qualitativo indicato nella figura 9.17.

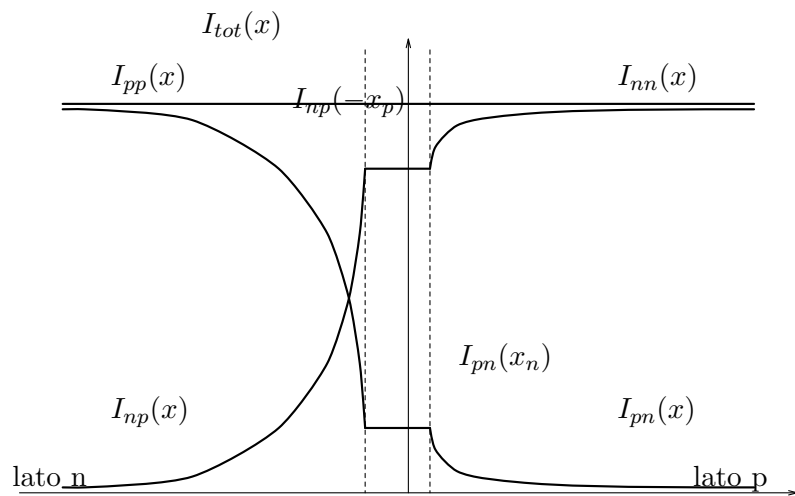


Figura 9.17: Correnti attraverso una giunzione p-n.

La corrente totale si può scrivere come somma delle componenti di diffusione

$$I_{tot} = I_{pn}(x_n) + I_{np}(-x_p)$$

dove I_{pn} è la corrente di diffusione degli elettroni nel lato p e I_{np} è la corrente di diffusione delle lacune nel lato n:

$$I_{np}(x_n) = A q \frac{D_p}{L_p} p_{n0} \left(e^{V/V_T} - 1 \right)$$

$$I_{pn}(-x_p) = A q \frac{D_n}{L_n} n_{p0} \left(e^{V/V_T} - 1 \right)$$

con A sezione della giunzione.

Si indica con $p'_n = p_n - p_{n0}$ la concentrazione in eccesso di lacune dal lato p; l'equazione di continuità, scritta per il lato n della giunzione con $\mathcal{E} = 0$,

$$D_p \frac{d^2 p'_n}{dx^2} = \frac{dp'_n}{dt} + \frac{p'_n}{\tau_p}$$

integrata tra x_n e x , dà l'equazione

$$A q D_p \left[\frac{dp'_n(x)}{dx} - \frac{dp'_n(x_n)}{dx} \right] = \left[\frac{d}{dt} \int_{x_n}^x p'_n dx + \frac{1}{\tau_p} \int_{x_n}^x p'_n dx \right] A q$$

da cui si ottiene

$$I_{pn}(x_n) - I_{pn}(x) = \frac{dQ_p}{dt} + \frac{Q_p}{\tau_p}$$

Per valori elevati di x , ovvero abbastanza lontano dalla giunzione, la corrente dei portatori minoritari $I_{pn}(x)$ è trascurabile e si ha

$$I_{pn}(x_n) = \frac{dQ_p}{dt} + \frac{Q_p}{\tau_p}$$

Analogamente, per il lato p della giunzione si integra tra x e $-x_p$ l'equazione di continuità, ottenendo

$$D_n \frac{d^2 n'_p}{dx^2} = \frac{dn'_p}{dt} + \frac{n'_p}{\tau_n}$$

$$A q D_n \left[\frac{dn'_p(x)}{dx} - \frac{dn'_p(-x_p)}{dx} \right] = \left[\frac{d}{dt} \int_x^{-x_p} n'_p dx + \frac{1}{\tau_n} \int_x^{-x_p} n'_p dx \right] A q$$

$$I_{np}(x) - I_{np}(-x_p) = -\frac{dQ_n}{dt} - \frac{Q_n}{\tau_n}$$

Anche in questo caso, la corrente di diffusione lontano dalla giunzione è trascurabile e quindi si può scrivere

$$I_{np}(-x_p) = \frac{dQ_n}{dt} + \frac{Q_n}{\tau_n}$$

Sommando le espressioni ottenute per le due componenti di correnti, si ottiene il modello a controllo di carica (9.7)

$$I_{tot} = \frac{dQ_p}{dt} + \frac{Q_p}{\tau_p} + \frac{dQ_n}{dt} + \frac{Q_n}{\tau_n}$$

9.5.2 Transitorio di accensione

Si consideri un diodo a giunzione brusca e asimmetrica, tale che $N_d = 2 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ e $N_a \gg N_d$. L'area della giunzione è pari a $A = 10^{-6} \text{ cm}^2$ e la lunghezza del lato n vale $W_n = 10 \text{ }\mu\text{m}$. Il diodo, inizialmente a riposo, viene connesso all'istante $t = 0$ a un generatore di corrente $I_g = 0,8 \text{ mA}$:

1. tracciare l'andamento della carica immagazzinata nella zona quasi neutra del dispositivo in funzione del tempo;
2. chiarire in quanto tempo si arriva alla condizione di regime;
3. valutare il valore della carica immagazzinata e della tensione ai capi del diodo in condizione di regime.

Si assuma per il tempo di vita medio delle lacune il valore $\tau = 10^{-8} \text{ s}$.

a)

L'equazione di continuità per le lacune, nell'ipotesi di quasi neutralità, è

$$D_p \frac{d^2 p'_n}{dx^2} = \frac{dp'_n}{dt} + \frac{p'_n}{\tau}$$

Integrando tale equazione a partire dal bordo della zona di svuotamento x_n , si ottiene l'equazione del diodo a controllo di carica:

$$I_g \simeq I_p(x_n) = \frac{dQ_p}{dt} + \frac{Q_p}{\tau}$$

dove Q_p è la carica immagazzinata nella zona quasi neutra. L'equazione può essere risolta con la condizione iniziale $Q_p(0) = 0$, ottenendo:

$$Q_p(t) = I_g \tau \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

L'andamento risultante è dato nella figura 9.18.

b)

A regime, $Q_p = I_g \tau$, per cui il tempo richiesto perché si esaurisca il transitorio è dato da

$$\Delta t = \frac{Q_p}{I_g} = \tau = 10 \text{ ns}$$

c)

La tensione ai capi del diodo, a regime, vale

$$V = V_T \ln \left(\frac{I_g}{I_0} + 1 \right)$$

Essendo $N_a \gg N_d$, la corrente inversa della giunzione è pari a

$$I_0 = A q \frac{D_p}{L_p} \frac{n_i^2}{N_d} = 3,76 \cdot 10^{-14} \text{ A}$$

Si ha quindi $V = 0,62 \text{ V}$.

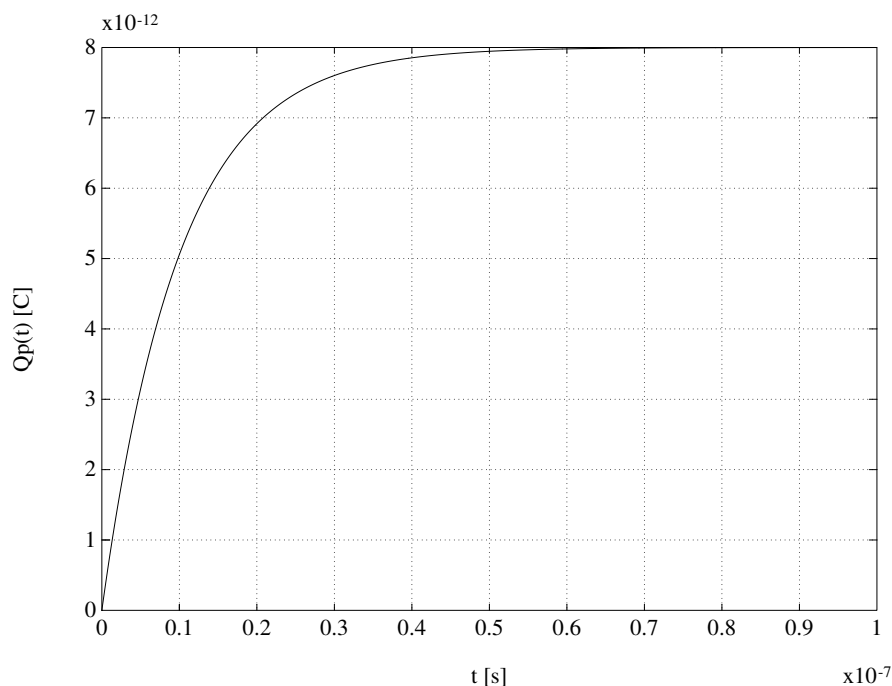


Figura 9.18: Carica elettrica immagazzinata.

9.5.3

Si consideri il diodo a giunzione dell'esercizio precedente, inserito nel circuito della figura 9.19 e sottoposto a un transitorio in cui, all'istante $t = 0$, l'interruttore commuta dalla posizione 1 alla 2, invertendo il verso della corrente. Sapendo che $V_f = 8 \text{ V}$, $V_r = 10 \text{ V}$ e $R = 10 \text{ k}\Omega$, calcolare il tempo di immagazzinamento, definito come l'intervallo di tempo che intercorre tra $t = 0$ e l'istante in cui la carica immagazzinata nella regione quasi neutra si annulla.

9.5.4

È data una giunzione $p - n$, di area $A = 10^{-6} \text{ cm}^2$, avente le seguenti caratteristiche:

- nel lato p , concentrazione uniforme di atomi di boro, $N_a = 5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$,

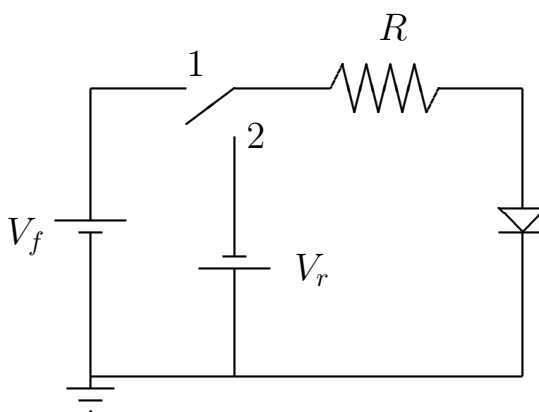


Figura 9.19: Circuito per la commutazione di un diodo.

- nel lato n , concentrazione uniforme di atomi di fosforo, $N_d = 1 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$,
- lunghezza del lato p , $W_p = 50 \text{ }\mu\text{m}$,
- lunghezza del lato n , $W_n = 5 \text{ }\mu\text{m}$,
- tempi di vita media per elettroni e lacune, $\tau = 10^{-8} \text{ s}$.

Disegnare il modello circuitale del dispositivo, caratterizzandone i parametri, cioè calcolando il valore della resistenza serie e delle capacità di transizione e diffusione a polarizzazione nulla.

Tracciare inoltre l'andamento delle capacità di transizione e diffusione in funzione della tensione di polarizzazione.

Il potenziale di contatto si calcola con l'espressione

$$\phi_i = \frac{kT}{q} \ln \left(\frac{N_a N_d}{n_i^2} \right)$$

e vale $\phi_i = 0,86 \text{ V}$; l'ampiezza della regione svuotata è

$$w = \sqrt{\frac{2\epsilon_S}{q N_{eq}} (\phi_i - V)} = x_n + x_p = 0,153 \text{ }\mu\text{m}$$

I valori di x_n e x_p si ottengono sfruttando la neutralità di carica:

$$\begin{aligned} N_d x_n &= N_a x_p \\ x_n &= w \frac{N_a}{N_a + N_d} = 7 \text{ nm} \\ x_p &= \frac{N_d}{N_a} x_n = 0,146 \text{ }\mu\text{m} \end{aligned}$$

Con i valori di drogaggio indicati, le mobilità di elettroni e lacune valgono $\mu_n = 284 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$ e $\mu_p = 362 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Le resistenze serie dei due tratti di semiconduttore risultano quindi

$$\begin{aligned} r_p &= \frac{1}{q N_a \mu_p} \frac{W_p}{A} = 1,725 \text{ k}\Omega \\ r_n &= \frac{1}{q N_d \mu_n} \frac{W_n}{A} = 11 \text{ }\Omega \end{aligned}$$

dove si è fatta l'approssimazione $W_p - x_p \simeq W_p$ e $W_n - x_n \simeq W_n$. Indicata con $V_j = V - I \cdot R$ la tensione che cade effettivamente sulla giunzione, la capacità di transizione per una giunzione brusca è data da

$$C_T = A \sqrt{\frac{q \epsilon_s N_{eq}}{2(\phi_i - V_j)}}$$

in condizioni di polarizzazione nulla, si ha

$$\frac{C_T}{A} = 6,73 \cdot 10^{-8} \text{ F cm}^{-2} \quad ; \quad C_T = 67,3 \text{ fF}$$

Per valutare anche la capacità di diffusione, occorre ricavare la corrente inversa di saturazione della giunzione:

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{kT}{q} \mu_n = 7,384 \text{ cm}^2 \text{s}^{-1} & ; & & D_p &= \frac{kT}{q} \mu_p = 9,412 \text{ cm}^2 \text{s}^{-1} \\ L_n &= \sqrt{D_n \tau} = 2,7 \text{ } \mu\text{m} & ; & & L_p &= \sqrt{D_p \tau} = 3,1 \text{ } \mu\text{m} \\ I_0 &= 1,94 \cdot 10^{-17} \text{ A} \end{aligned}$$

La capacità di diffusione, legata alle cariche di portatori minoritari accumulate ai lati della giunzione, si ottiene derivando dall'equazione del controllo di carica in condizioni "quasi statiche"

$$I = \frac{Q}{\tau}$$

derivando rispetto alla tensione³

$$C_D = \frac{dQ}{dV} = \frac{\tau dI}{dV}$$

La corrente è espressa dalla

$$I = I_0 \left[e^{(V-IR)/\eta V_T} - 1 \right] \quad (9.9)$$

Esplicitando rispetto alla tensione e derivando si ha

$$\begin{aligned} V &= IR + \eta V_T \ln \left(\frac{I + I_0}{I_0} \right) \\ \frac{dV}{dI} &= R + \eta V_T \frac{1}{I + I_0} \end{aligned}$$

La capacità di diffusione si valuta quindi come

$$C_D = \tau \frac{dI}{dV} \simeq \frac{\tau I_0 e^{(V-IR)/\eta V_T}}{\eta V_T + I_0 R e^{(V-IR)/\eta V_T}} \simeq \frac{\tau I}{\eta V_T + RI}$$

dove $R = r_n + r_p = 1736 \text{ } \Omega$. Con tensione di polarizzazione nulla, si ha

$$C_D = 7,5 \cdot 10^{-24} \text{ F}$$

Il valore di capacità risulta di molti ordini di grandezza inferiore a quello ottenuto per la capacità di transizione C_T ; tuttavia, al crescere della tensione diretta applicata al diodo, la corrente e dunque la capacità di diffusione aumentano, come si può verificare dalla tabella.

V [V]	I [A]	C_D [F]
0	$1,94 \cdot 10^{-17}$	$3,7 \cdot 10^{-24}$
0,8	$9,3 \cdot 10^{-11}$	$1,79 \cdot 10^{-17}$
1	$4,36 \cdot 10^{-9}$	$8,4 \cdot 10^{-16}$
2	$2,5 \cdot 10^{-4}$	$1,1 \cdot 10^{-10}$

Il modello circuitale della giunzione può essere completato come nella figura 9.20, comprendente le due resistenze serie di volume, le capacità di transizione e diffusione, e infine un generatore di corrente non lineare, pilotato dalla tensione applicata al diodo, secondo la (9.9).

L'andamento del valore di capacità al variare della tensione di polarizzazione è dato nella figura 9.21:

³Si tratta di un modello assai scorretto: si usa una condizione "statica" per determinare una grandezza dinamica. Il risultato ottenuto è valido solo in prima approssimazione.

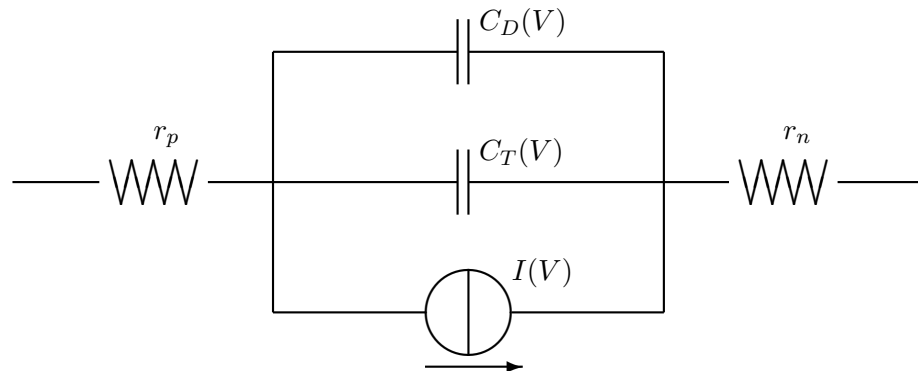


Figura 9.20: Modello circuitale della giunzione.

9.5.5

Si consideri una giunzione p - n brusca simmetrica a 300 K con $N_a = N_d = 1 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ e le lunghezze dei lati n e p eguali, $W_n = W_p = 20 \text{ }\mu\text{m}$. Sapendo che $\tau_n = \tau_p = 4 \text{ ns}$ e che l'area della giunzione è $A = 1 \text{ mm}^2$, tracciare la caratteristica tensione corrente e l'andamento della capacità di transizione al variare della tensione applicata. Supponendo inoltre di usare il diodo come capacità variabile in parallelo con un'induttanza $L = 7,9 \text{ mH}$, determinare la polarizzazione del diodo necessaria per ottenere una frequenza di risonanza di 10 MHz.

9.5.6

Dato il seguente modello PSPICE,

```
.model D1N4148 D(Is=0.1p Rs=16 CJ0=2p Tt=12n Bv=100 Ibv=0.1p)
```

relativo a un diodo commerciale per commutazione, si usi PSPICE per simulare il comportamento dinamico del dispositivo. Si verifichi l'influenza dei parametri R_s , $CJ0$ e Tt sul funzionamento in regime transitorio.

A partire dal modello dato, si definiscono 4 diversi diodi, simulati mediante l'allestimento circuitale riportato nella figura 9.22.

I quattro generatori sono identici e producono un'onda quadra di periodo pari a 50 ns e ampiezza $\pm 5 \text{ V}$, in grado di polarizzare i diodi alternativamente in modo diretto e inverso. Si noti che l'allestimento indicato corrisponde in realtà a quattro circuiti distinti, per evitare l'interazione tra i quattro modelli. L'insieme dei comandi usato per la simulazione è il seguente:

```
MODELLO DINAMICO DEL DIODO
* modelli *
.MODEL D01 D (Is=0.1p Rs=16 CJ0=2p Tt=12n )
.MODEL D02 D (Is=0.1p Rs=0 CJ0=2p Tt=12n )
.MODEL D03 D (Is=0.1p Rs=0 CJ0=2p Tt=0 )
.MODEL D04 D (Is=0.1p Rs=0 CJ0=0 Tt=0 )
* descrizione del circuito *
```

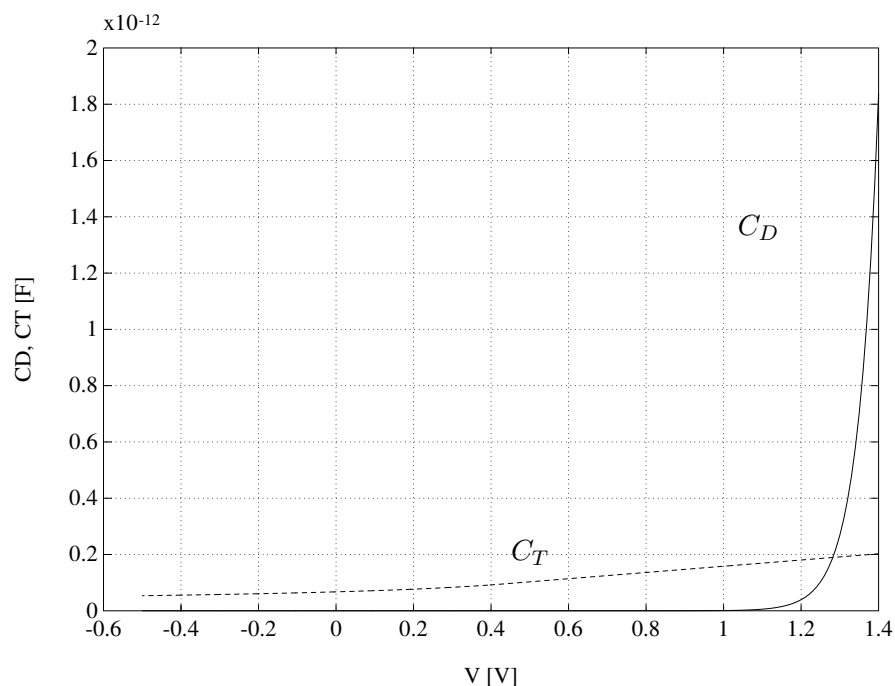


Figura 9.21: Capacità in funzione della tensione di polarizzazione.

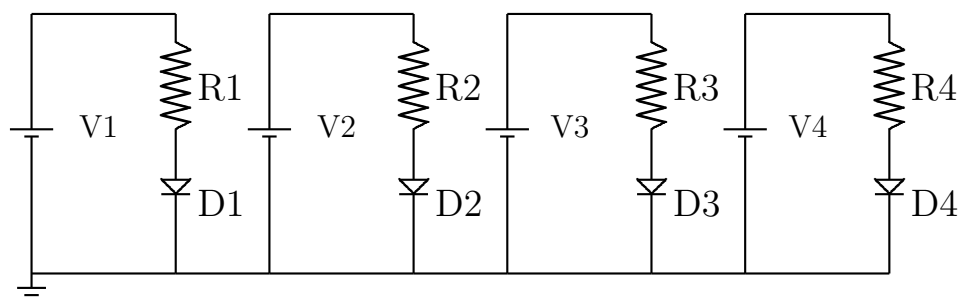


Figura 9.22: Circuito per l'analisi in regime dinamico.

```
V1 1 0 0 PULSE (5 -5 10n 0 0 30n 50n)
V2 2 0 0 PULSE (5 -5 10n 0 0 30n 50n)
V3 3 0 0 PULSE (5 -5 10n 0 0 30n 50n)
V4 4 0 0 PULSE (5 -5 10n 0 0 30n 50n)
R1 1 A1 1K
R2 2 A2 1K
R3 3 A3 1K
R4 4 A4 1K
D1 A1 0 D01
D2 A2 0 D02
D3 A3 0 D03
D4 A4 0 D04
* analisi *
.TRAN .1n 50n
.PROBE
.END
```

Il modello del primo diodo comprende:

- una resistenza serie R_s di 16 Ω ,
- una capacità di svuotamento a polarizzazione nulla C_{J0} di 2 pF,
- un tempo di transito T_t di 12 ns.

La capacità di svuotamento del diodo è legata alla C_{J0} dalla

$$C_T(V_D) = C_{J0} \left(1 - \frac{V_D}{V_0}\right)^{-1/2}$$

dove V_0 è il potenziale intrinseco della giunzione e V_D la tensione diretta applicata. Il tempo di transizione determina invece la capacità di diffusione:

$$C_D = T_t \frac{dI_D}{dV_D}$$

Nei modelli dei diodi D2, D3 e D4 sono stati rimossi in successione prima R_s , poi T_t e infine C_{J0} . Questo permette di apprezzare nei risultati della simulazione, riportati nella figura 9.23, l'influenza dei tre parametri.

Sul primo transitorio della tensione $v(a1)$, presa ai capi del diodo D1, si possono osservare tre zone distinte:

1. la prima è un piccolo gradino pressoché verticale con salto di circa 150 mV,
2. la seconda è una porzione di esponenziale con curvatura verso il basso,
3. la terza è una porzione di esponenziale con curvatura verso l'alto.

Il salto di tensione sul diodo corrispondente alla prima zona è dovuto alla variazione di corrente istantanea sulla resistenza di volume R_s . Infatti quando il diodo è polarizzato direttamente, la corrente nel circuito vale circa

$$\frac{5 - 0,6}{1000 + 16} \simeq 4,3 \text{ mA}$$

avendo posto pari a 0,6 V il potenziale intrinseco della giunzione; alla commutazione, la corrente si porta istantaneamente al valore

$$\frac{-5 - 0,6}{1000 + 16} \simeq 5,5 \text{ mA}$$

La variazione di corrente in R_s vale dunque 9,8 mA e produce sul diodo una variazione di tensione

$$9,8 \times 16 \simeq 158 \text{ mV}$$

Tale salto di tensione non è più presente negli altri tre grafici della figura 9.23, perché R_s è stato rimosso dai modelli.

La seconda zona è un esponenziale dovuto a T_t , ovvero alla capacità di diffusione, che prevale su quella di svuotamento nella prima parte del transitorio, quando i portatori minoritari sono ancora numerosi. Questa zona scompare nel terzo grafico della figura 9.23, ottenuto dalla simulazione di un diodo con $T_t=0$.

Infine la terza zona è un esponenziale dovuto alla capacità di svuotamento, che a corrente ormai piccola prevale su quella di diffusione. Nel quarto grafico, sono stati azzerati tutti e tre i parametri del modello e il transitorio è un fronte verticale, senza alcun ritardo.

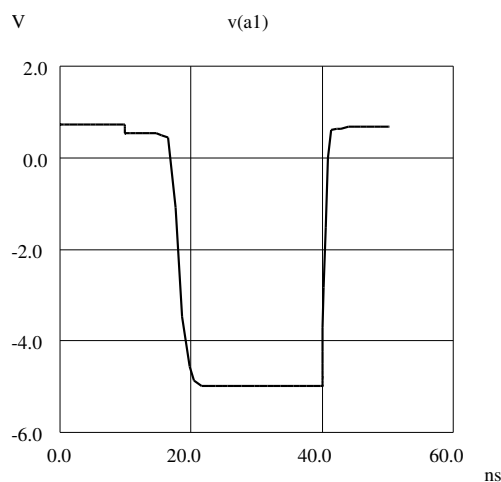


Figura 9.23: Comportamento dinamico del diodo.

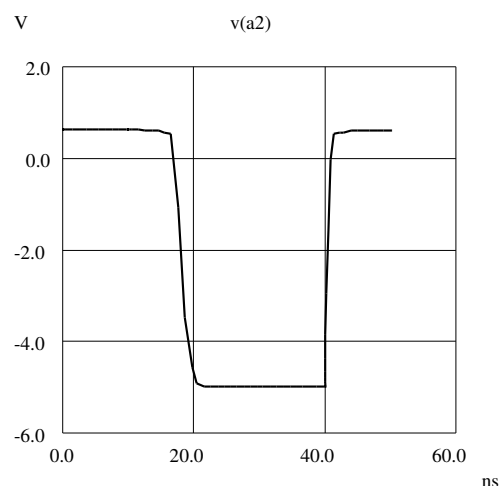


Figura 9.24: Comportamento dinamico del diodo.

9.6 Effetti termici

9.6.1

Si consideri alla temperatura ambiente un diodo a giunzione al silicio, con una corrente di saturazione inversa di $I_s = 5 \text{ nA}$ e una tensione di soglia⁴ di $0,7 \text{ V}$.

- a) Determinare il valore di tensione inversa a cui la corrente raggiunge il 95% della corrente I_s .*
- b) Si calcoli il rapporto tra le correnti per tensioni diretta e inversa di $0,2 \text{ V}$.*
- c) Quanto valgono la corrente inversa e la tensione di soglia a 150°C ?*

⁴Si ricorda che la posizione della tensione di soglia sulla caratteristica di un diodo dipende dalla scelta della scala con la quale si osservano le correnti: la convenzione più diffusa è quella di scegliere una scala che consenta la lettura dei mA e in questo modo la soglia, per dispositivi reali al silicio è intorno a $0,6 \div 0,7 \text{ V}$.

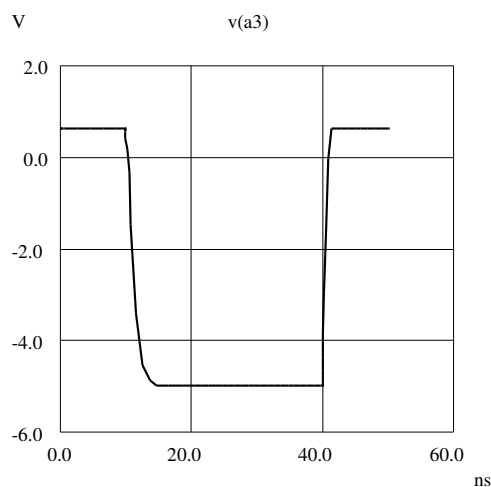


Figura 9.25: Comportamento dinamico del diodo.

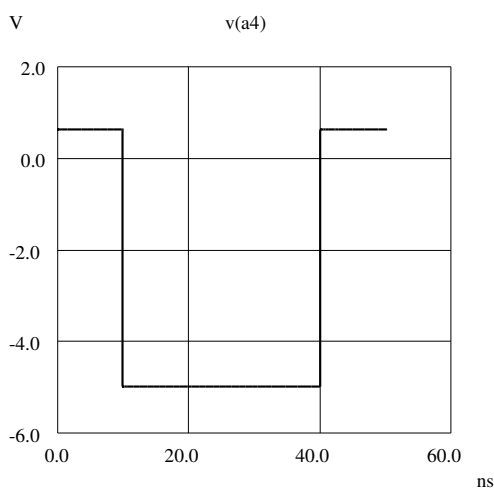


Figura 9.26: Comportamento dinamico del diodo.

a)
Si può scrivere

$$\frac{I}{I_s} = e^{V/\eta V_T} - 1 = -0,95$$

con $\eta = 2$ e $V_T = 0,0259$ V si ha

$$V = \eta V_T \ln(-0,95 + 1) = -0,16 \text{ V}$$

b)

$$\frac{I_{V=0,2}}{I_{V=-0,2}} = \frac{e^{0,2/\eta V_T} - 1}{e^{-0,2/\eta V_T} - 1} = \frac{46,51}{-0,979} = -47,5$$

c)

Supponendo la temperatura ambiente di 27°C a 150°C si ha un aumento di 150°C –

$27^{\circ}\text{C} = 123^{\circ}\text{C}$. Dato che la corrente di saturazione inversa aumenta approssimativamente del 7% al grado, si ha

$$I_s(T = 150^{\circ}\text{C}) = I_s(T = 27^{\circ}\text{C}) \times (1,07)^{123} = 20,6 \mu\text{A}$$

La tensione di soglia invece si riduce di circa 2,5 mV per ogni grado di aumento di T ; pertanto, in questo caso, si ottiene

$$V_{\gamma}(T = 150^{\circ}\text{C}) = V_{\gamma}(T = 27^{\circ}\text{C}) \times 123 \times (-2,5 \text{ mV}) = 0,39 \text{ V}$$

9.6.2

Un diodo a giunzione alla temperatura di 100°C ha una corrente inversa di 10 nA con $V = -4 \text{ V}$. Calcolare la resistenza dinamica del diodo polarizzato con $V = 0,5 \text{ V}$ e la corrente per $V = -4 \text{ V}$ alla temperatura di 70°C .

9.6.3 Resistenza termica e temperatura della giunzione.

Si consideri un diodo montato su un supporto che agevola la dissipazione del calore sviluppato nella giunzione.

La capacità di dissipare il calore prodotto all'interno si può valutare dicendo che se la temperatura della giunzione supera quella esterna di 20°C si ha un trasferimento di potenza termica verso l'esterno di 25 mW. a) Quanto vale la resistenza termica?

b) Scrivere la condizione di equilibrio termico per un diodo cui sia applicata una tensione V e sia percorso da una corrente I .

c) Usualmente il costruttore fornisce un valore "tipico" della resistenza termica R_{ja} , tra la giunzione e l'ambiente esterno (aria ferma). Il progettista, note la temperatura dell'ambiente in cui il circuito verrà applicato e la potenza dissipata nella giunzione, potrà calcolare la temperatura della giunzione e verificare che non si avvicini troppo al valore massimo suggerito dal costruttore, cioè al valore oltre il quale il livello di affidabilità diventa insufficiente.

Si usi la resistenza termica calcolata per determinare la temperatura di giunzione di un diodo al silicio percorso da una corrente di 60 mA che opera in un ambiente a 25°C . In polarizzazione diretta il comportamento del diodo si approssima con una resistenza diretta $R_f = 5\Omega$ e una tensione di soglia $V_{\gamma} = 0,65 \text{ V}$. Si trascuri in prima approssimazione la variazione di V_{γ} con la temperatura.

a)

La trasmissione di calore tra due punti tra cui si trova una differenza di temperatura $\theta = T - T_a$ è retta dalla legge

$$P_t = K (T - T_a) = K\theta$$

dove K è il coefficiente di trasmissione del calore e si esprime in $\text{mW}/^{\circ}\text{C}$. L'analogia elettrica con la legge di Ohm è immediata se si fa corrispondere la differenza di temperatura alla differenza di tensione e la potenza trasmessa alla corrente elettrica. Sotto questa ottica K può essere interpretata come una *conduttanza termica* e il suo inverso $R_{th} = 1/K$ come *resistenza termica*. Usualmente la trasmissione del calore ha luogo per convezione attraverso la superficie del dispositivo e per conduzione attraverso i terminali metallici.

Nel caso in esame

$$K = \frac{1}{R_{th}} = \frac{P_t}{T - T_a} \frac{1 \text{ mW}}{10^{\circ}\text{C}} = 1,25 \text{ mW}/^{\circ}\text{C}$$

La resistenza termica vale pertanto $R_{th} = 0,8^{\circ}\text{C}/\text{mW}$.

b)

Quando il dispositivo è percorso da corrente si dissipa nel semiconduttore una potenza P_d che fa aumentare la temperatura del diodo rispetto alla temperatura ambiente. Di conseguenza la potenza trasmessa verso l'esterno, che inizialmente era nulla per l'eguaglianza delle due temperature, tende ad aumentare. Il transitorio termico si estingue ovviamente quando la potenza sviluppata alla giunzione entro il dispositivo è eguale alla potenza trasmessa verso l'esterno; a questo equilibrio termico corrisponde una temperatura T , o meglio un salto di temperatura $\theta = T - T_a$, espresse dalla condizione

$$P_d = P_t \rightarrow \begin{cases} P_t &= K (T - T_a) = K\theta \\ P_d &= V I = P_d(\theta) \end{cases}$$

Tale relazione è in realtà la condizione di regime di un'equazione di equilibrio termico che descrive anche i fenomeni funzione del tempo

$$C \frac{d\theta}{dt} + K\theta = P_d(\theta)$$

dove C , secondo la citata analogia elettrica, prende il nome di capacità termica e si misura in mW s/°C.

c)

Si usa la relazione all'equilibrio termico

$$T_j = R_{ja} \cdot P_d(\theta) + T_a$$

Dato che la resistenza serie, cui in polarizzazione diretta si riduce il modello del diodo, non dipende sensibilmente dalla temperatura, e che si trascura la variazione di V_γ con la temperatura, la potenza termica generata nel diodo

$$P_d(\theta) = I \cdot V = I(R_f I + V_\gamma) = P_d$$

non dipende dalla temperatura.

$$P_d = 60 \text{ mA} \cdot 0,95 \text{ V} = 57 \text{ mW}$$

Pertanto, con $R_{ja} = 0,8^\circ\text{C/mW}$, la temperatura della giunzione è

$$T_j = 0,8 \cdot 57 + 25 = 70,6^\circ\text{C}$$

L'approssimazione fatta per V_γ non è molto corretta infatti la sua variazione con la temperatura è circa $-2,5 \text{ mV}/^\circ\text{C}$ e, con una variazione di $45,6^\circ\text{C}$, si ha $V_\gamma + \Delta V_\gamma = 0,65 - 0,114 = 0,536 \text{ V}$. Quindi

$$T_j = 0,8 \cdot 50,16 + 25 = 65,1^\circ\text{C}$$

Quindi la temperatura della giunzione è compresa tra $70,6^\circ\text{C}$ e $65,1^\circ\text{C}$.

9.6.4 Temperatura della giunzione.

Si considerino dispositivi montati su un supporto la cui capacità di dissipare il calore prodotto all'interno è rappresentato dalla resistenza termica $R_{ja} = 8^\circ\text{C/mW}$. Si chiede di determinare la temperatura della giunzione di un diodo polarizzato inversamente alla tensione $V_R = 120 \text{ V}$ se la temperatura ambiente è 25°C nel caso di

a) un diodo al germanio con intensità della corrente di saturazione inversa $I_s = 5 \mu\text{A}$;

b) un diodo al silicio con intensità della corrente di saturazione inversa $I_s = 0,8 \text{ nA}$.

a)

In polarizzazione inversa la potenza dissipata $P_d = V_R I_s$ presenta come fattore la corrente inversa I_s formata da portatori minoritari, quindi dipende fortemente dalla temperatura della giunzione o, meglio, dalla differenza θ tra questa e la temperatura dell'ambiente esterno.

Per determinare tale legame funzionale si ricorda il dato empirico e approssimato, valido per giunzioni sia al germanio sia al silicio, che il tasso di variazione di I_s con la temperatura è approssimativamente $+0,7\%/^{\circ}\text{C}$. Pertanto, se $I_{sa} = I_s(T = T_a)$ e $\theta = T_j - T_a$

$$\begin{aligned} I_s &= I_{sa} (1 + 0,07)^{\theta} = I_{sa} (1,07)^{\theta} \\ P_d(\theta) &= V_R I_s = V_R I_{sa} (1,07)^{\theta} \end{aligned}$$

L'equazione che, all'equilibrio termico, fornisce il valore di θ e quindi della temperatura di giunzione è (problema 9.6.3)

$$P_d = P_t$$

cioè

$$\frac{1}{R_{ja}} \theta = V_R I_{sa} (1,07)^{\theta}$$

Si tratta di un'equazione nonlineare in θ .

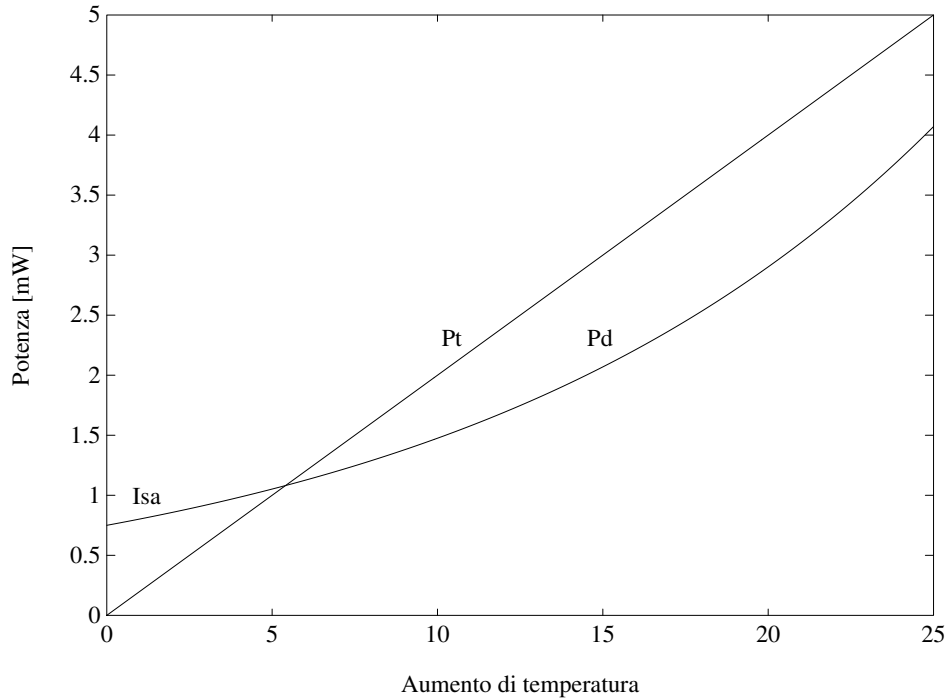


Figura 9.27: Valutazione grafica della temperatura di giunzione.

Graficamente (fig. 9.27) la soluzione è il punto di intersezione di una retta $P_t(\theta)$, che dipende solo dalle caratteristiche termiche del montaggio e del contenitore con una curva $P_d(\theta)$ che descrive il comportamento termico del diodo. Numericamente si possono impiegare le tecniche iterative descritte in appendice.

a)

Applicando un metodo iterativo si ottiene $\theta = 8,57^{\circ}\text{C}$, $T_j = 33,5^{\circ}\text{C}$, la potenza dissipata vale $1,07\text{mW}$ e la corrente di saturazione è $I_s = 8,93\mu\text{A}$.

b)

Si ottiene $\theta = 7,7 \cdot 10^{-4}^\circ\text{C}$ quindi resta $T_j = 25^\circ\text{C}$, la potenza dissipata è trascurabile, 96 nW e la corrente di saturazione inversa non muta.

9.7 Transistore a effetto di campo a giunzione

Il funzionamento di un JFET, come per un MESFET (capitolo 7), può essere descritto distinguendo tre regioni di funzionamento:

1. lineare, con comportamento sostanzialmente resistivo, per tensioni drain-source piccole,

$$I_D = G_0 \left\{ 1 - \sqrt{\frac{2\epsilon_s}{q N t^2} (\phi_i - V_{GS})} \right\} V_{DS}$$

dove G_0 è la conduttanza a canale aperto, che si esprime come

$$G_0 = q \mu N \frac{W t}{L}$$

N è la concentrazione di drogante nel canale, ϕ_i è il potenziale interno della giunzione gate-canale (supposta di tipo asimmetrico), L , W e t sono lunghezza, larghezza e profondità del canale;

2. non lineare, raggiunta per tensioni applicate maggiori,

$$I_D = G_0 \left\{ V_{DS} - \frac{2}{3\sqrt{\phi_i - V_P}} \left[(\phi_i - V_{GS} + V_{DS})^{3/2} - (\phi_i - V_{GS})^{3/2} \right] \right\}$$

dove V_P è la tensione di strozzamento o “pinch-off”, ovvero il valore di tensione di gate per il quale il canale risulta completamente chiuso e la corrente si annulla; nel caso di un JFET a canale n, a drogaggio costante, la tensione di strozzamento è negativa e vale approssimativamente

$$V_P = \phi_i - \frac{q N_d t^2}{2\epsilon_s}$$

3. saturazione, in cui la dipendenza della corrente dalla tensione è debolissima; la saturazione viene raggiunta per $V_{DS} \geq +V_{GS} - V_P - \phi_i$

$$I_{DS} = G_0 \left\{ \frac{1}{3} (\phi_i - V_P) - (\phi_i - V_{GS}) \left[1 - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\phi_i - V_{GS}}{\phi_i - V_P}} \right] \right\}$$

In saturazione la dipendenza della corrente dalla tensione V_{DS} è modificata dagli effetti della resistenza di volume, che tende a rendere lineare la caratteristica del dispositivo. Indicando con I_{DSS} la corrente di saturazione corrispondente a una tensione nulla sul gate, la transcaratteristica del dispositivo si ricava analiticamente come

$$I_{DS} = I_{DSS} \left(1 - \frac{V_{GS}}{V_P} \right)^2$$

9.7.1

Si consideri il JFET dato nella figura 9.28, dove la lunghezza del canale vale $L = 10 \mu\text{m}$, la larghezza $W = 50 \mu\text{m}$ e l'altezza $2h = 2,5 \mu\text{m}$. Nelle zone p del transistor, il livello di drogaggio è $N_a = 1 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$, mentre il tempo di vita media dei portatori vale $\tau = 1 \cdot 10^{-6} \text{ s}$; nel canale n si ha $N_d = 1 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$. Determinare:

1. il valore massimo della conduttanza;
2. l'espressione e il valore della tensione di strozzamento V_P ;
3. la caratteristica tensione-corrente e il valore massimo di I_{DS} per $V_{GS} = 0, -2 \text{ V}$ e -4 V ;
4. la caratteristica di trasferimento $I_D(V_{GS})$.

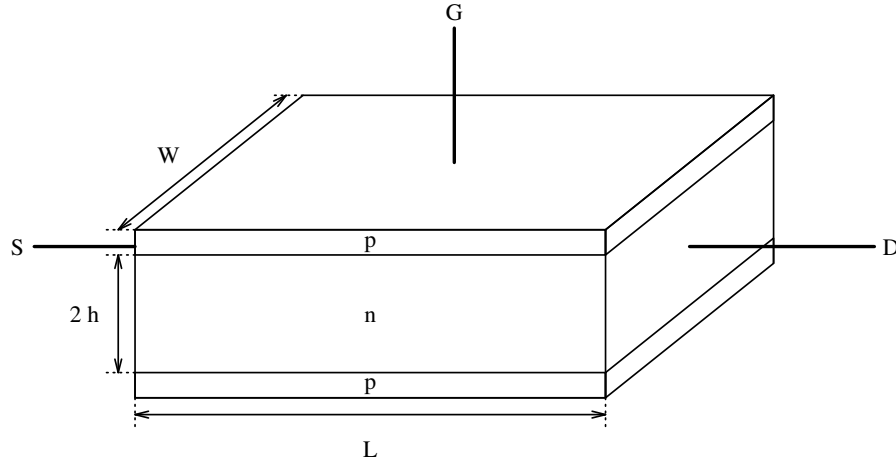


Figura 9.28: Struttura di un JFET.

a)

Il massimo della conduttanza si ha quando il canale del dispositivo è tutto aperto, la sezione trasversale attraversata dalla corrente quindi è costante e vale $2H \cdot W$; la conduttanza allora vale

$$G_0 = \sigma \frac{W 2h}{L} = q N_d \mu_n \frac{W 2h}{L}$$

assumendo per la mobilità $\mu_n = 1330 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$, si ha $G_0 = 5,32 \cdot 10^{-4} \text{ S}$, ovvero $R_0 = 1/G_0 = 1,880 \text{ k}\Omega$.

b)

La tensione di strozzamento V_P è la tensione che, applicata tra ingresso di controllo e canale, induce una zona di svuotamento tale da chiudere completamente il canale. L'ampiezza della regione di svuotamento per una giunzione p-n di tipo brusco si calcola come

$$w = \sqrt{\frac{2\epsilon_s}{q N_{eq}} (\phi_i - V)} \quad ; \quad N_{eq} = \frac{N_d N_a}{N_d + N_a}$$

dove ϕ_i è il potenziale di contatto e V è la tensione applicata tra le zone p e n. Imponendo $w = H$, si determina V_P

$$h = \sqrt{\frac{2\epsilon_s}{q N_{eq}} (\phi_i - V_P)}$$

$$V_P = \phi_i - \frac{h^2 q N_{eq}}{2\epsilon_s}$$

Nel caso in questione

$$\phi_i = \frac{kT}{q} \log \frac{N_a N_d}{n_i^2} = 0,76 \text{ V}$$

$$V_P = -4,1 \text{ V}$$

c)

Nel JFET, la corrente ha andamento lineare per valori piccoli di V_{DS} :

$$I_{DS} = G_0 \left[1 - \sqrt{\frac{2\epsilon_s}{q N_d h^2}} (\phi_i - V_{GS}) \right] V_{DS}$$

al crescere di V_{DS} la corrente si può esprimere come⁵

$$I_{DS} = G_0 \left\{ V_{DS} - \frac{2}{3\sqrt{|V_P|}} \left[(\phi_i - V_{GS} + V_{DS})^{3/2} - (\phi_i - V_{GS})^{3/2} \right] \right\}$$

infine, I_{DS} tende a un limite di saturazione allo strozzamento del canale:

$$I_{DSS} = G_0 \left\{ V_{DSS} - \frac{2}{3\sqrt{|V_P|}} \left[(\phi_i - V_{GS} + V_{DSS})^{3/2} - (\phi_i - V_{GS})^{3/2} \right] \right\}$$

dove $V_{DSS} = V_{GS} - V_P$. L'andamento della corrente al variare di V_{DS} è dato nella figura 9.29. I valori di tensione e corrente di saturazione (V_{DSS} , I_{DSS}) ottenuti per $V_{GS} = 0, -2 \text{ V}, -4 \text{ V}$ sono

$V_{GS} = 0 \text{ V}$	$V_{DSS} = 4,1 \text{ V}$	$I_{DSS} = 560 \mu\text{A}$
$V_{GS} = -2 \text{ V}$	$V_{DSS} = 2,1 \text{ V}$	$I_{DSS} = 130 \mu\text{A}$
$V_{GS} = -4 \text{ V}$	$V_{DSS} = 0,1 \text{ V}$	$I_{DSS} = 0,13 \mu\text{A}$

d)

La caratteristica di trasferimento è nella figura 9.30.

9.7.2

Con riferimento al dispositivo descritto nel problema 9.7.1, tracciare l'andamento della conduttanza del canale, g_D (al variare di V_{DS}), e della transconduttanza, g_m (al variare di V_{GS}). Calcolare inoltre il valore della conduttanza di canale per $V_{GS} = 0, -1,5 \text{ V}$ e -4 V .

Nel caso in cui la tensione V_{DS} sia molto piccola rispetto alla tensione applicata tra gate e canale, quest'ultimo si può considerare equipotenziale, e quindi l'estensione della

⁵Trascurando ϕ_i .

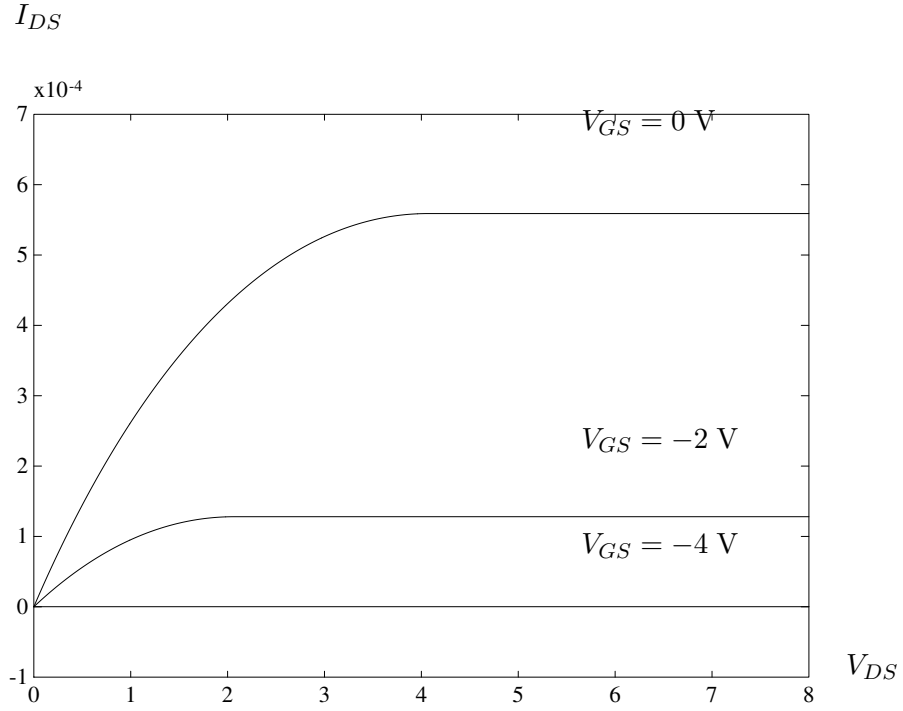


Figura 9.29: Caratteristica del JFET.

zona di svuotamento, x_d è costante. In queste condizioni, il dispositivo si comporta come una resistenza variabile, il cui valore è controllato dalla tensione di gate:

$$G = \sigma \frac{2W(H - x_d)}{L} = G_0 \left(1 - \frac{x_d}{H}\right)$$

dove G_0 è il valore massimo di conduttanza, corrispondente alla situazione di canale completamente aperto, e l'ampiezza della zona di svuotamento x_d è legata a V_{GS} e alla tensione di strozzamento V_P

$$\begin{aligned} x_d &= \sqrt{\frac{2\epsilon_s}{qN_d}(\phi_i - V_P)} \\ H &= \sqrt{\frac{2\epsilon_s}{qN_d}(\phi_i - V_{GS})} \\ \frac{x_d}{H} &= \sqrt{\frac{\phi_i - V_{GS}}{\phi_i - V_P}} \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$G = G_0 \left(1 - \sqrt{\frac{\phi_i - V_{GS}}{\phi_i - V_P}}\right)$$

Per tensioni V_{DS} crescenti il canale non si può più considerare equipotenziale e la conduttanza g_D si ottiene facendo la derivata della corrente nella regione $V_{DS} < V_{GS} -$

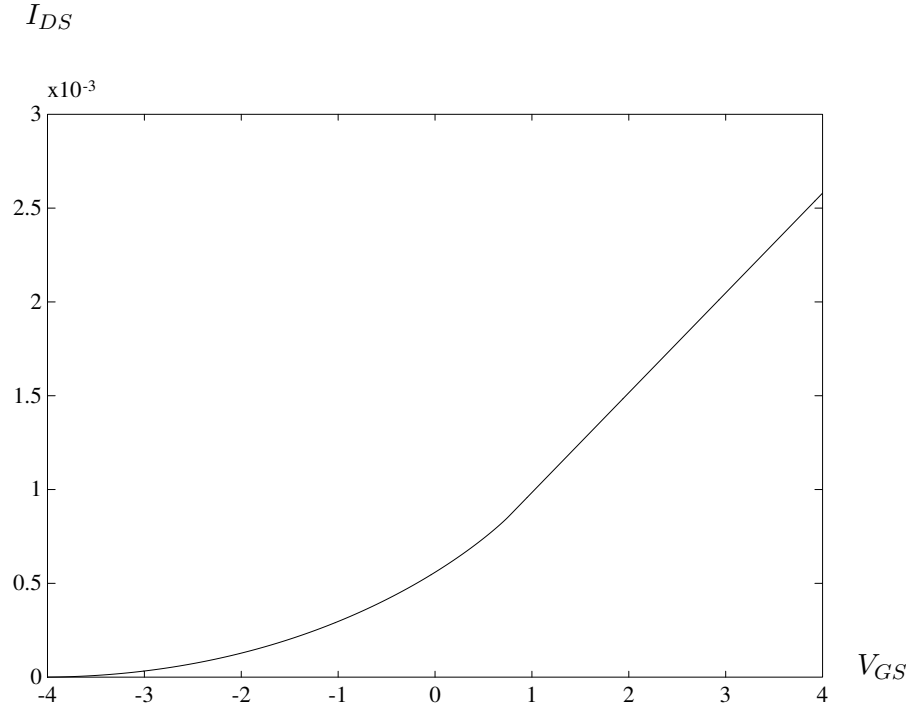


Figura 9.30: Caratteristica di trasferimento del JFET.

$$V_P - \phi_i$$

$$I_D = G_0 \left\{ V_{DS} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2\epsilon}{q N_d H^2}} \left[(V_{DS} + \phi_i - V_{GS})^{3/2} - (\phi_i - V_{GS})^{3/2} \right] \right\}$$

$$g_D = \frac{dI_D}{dV_{DS}} = G_0 \left(1 - \sqrt{\frac{V_{DS} + \phi_i - V_{GS}}{\phi_i - V_P}} \right)$$

In zona di saturazione infine, la corrente non dipende (se non molto debolmente) dalla tensione di drain e quindi la conduttanza è idealmente nulla. L'andamento complessivo di g_D è dato nella figura 9.31.

La transconduttanza nella regione lineare si ottiene derivando la

$$I_{DS} = G_0 \left[1 - \sqrt{\frac{2\epsilon_s}{q N_d t^2} (\phi_i - V_{GS})} \right] V_{DS}$$

rispetto a V_{GS} , si ha

$$g_m = \frac{dI_D}{dV_{GS}} = G_0 \frac{V_{DS}}{2 \sqrt{V_P (\phi_i - V_{GS})}}$$

In zona quadratica si ha invece

$$g_m = G_0 \frac{1}{\sqrt{\phi_i - V_P}} \left(\sqrt{\phi_i - V_{GS} + V_{DS}} - \sqrt{\phi_i - V_{GS}} \right)$$

mentre in saturazione la transconduttanza è

$$g_m = G_0 \left\{ 1 - \frac{\sqrt{\phi_i - V_{GS}}}{\sqrt{\phi_i - V_P}} \right\}$$

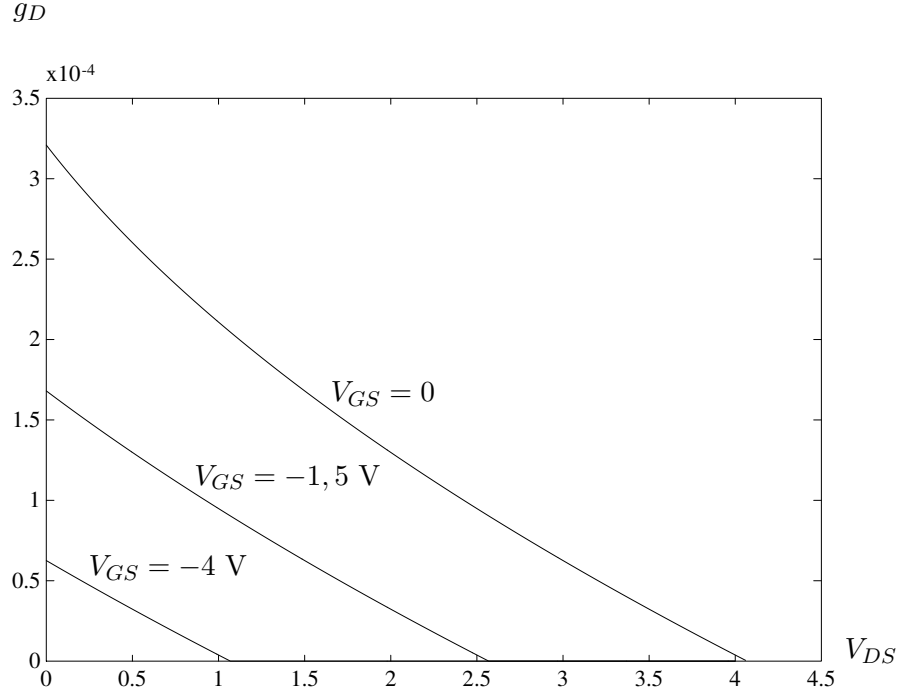


Figura 9.31: Conduttanza di un JFET.

L'andamento complessivo di g_m è dato nella figura 9.32.
La conduttanza di canale per i valori richiesti di V_{GS} risulta

$$\begin{array}{ll} V_{GS} = 0 \text{ V} & G = 3,2 \cdot 10^{-4} \Omega^{-1} \\ V_{GS} = -1,5 \text{ V} & G = 1,7 \cdot 10^{-4} \Omega^{-1} \\ V_{GS} = -4 \text{ V} & G = 5,5 \cdot 10^{-6} \Omega^{-1} \end{array}$$

9.7.3

È dato un JFET a canale n , caratterizzato da livelli di drogaggio uniformi sia nella zona di canale che in quella di gate e sottoposto a tensioni di drain moderate, tali da mantenere il comportamento del dispositivo in linearità. Ricavare un'espressione della tensione di strozzamento valida al variare delle concentrazioni del drogante e calcolarne il valore per $N_d = 5 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ e per $1 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3} < N_a < 1 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$. Si assuma lo spessore del canale $a = 2H = 3 \mu\text{m}$.

La tensione di strozzamento è la tensione di gate per la quale la zona di svuotamento chiude completamente il canale del dispositivo. In una giunzione p-n brusca, l'ampiezza della regione di svuotamento è data da

$$w(x) = \sqrt{\frac{2\epsilon}{q} \frac{N_a + N_d}{N_a N_d} (\phi_i - V_{Gx})}$$

dove x è la generica posizione lungo il canale, V_{Gx} è la tensione applicata tra il gate e il punto x del canale, e ϕ_i è il potenziale di contatto della giunzione, calcolabile come

$$\phi_i = \frac{kT}{q} \ln \left(\frac{N_a N_d}{n_i^2} \right)$$

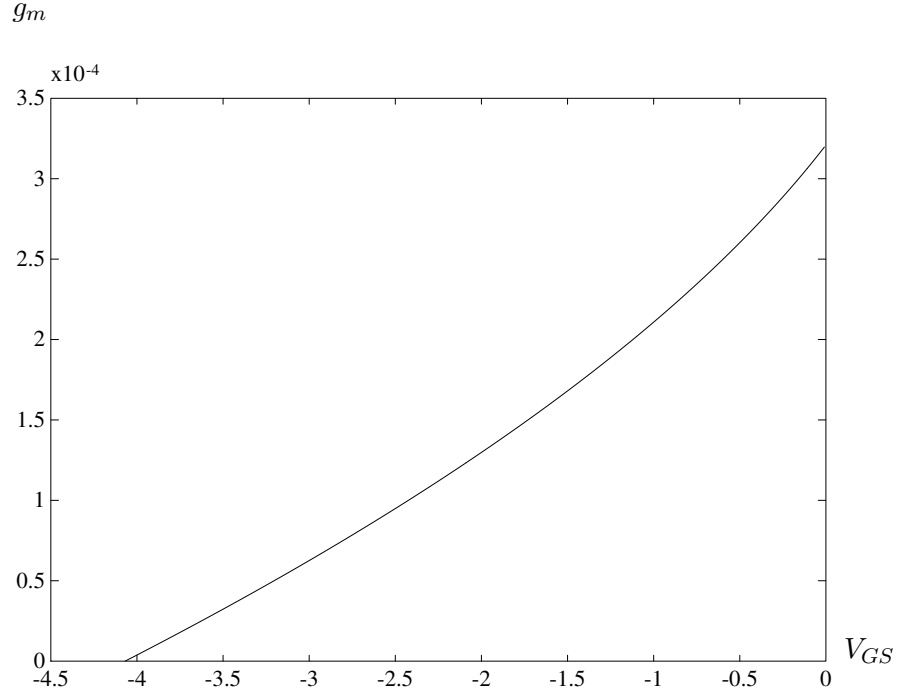


Figura 9.32: Transconduttanza di un JFET.

Dal lato n della giunzione, ovvero nel canale, la zona di svuotamento ha una lunghezza data da

$$w_n(x) = \frac{N_a}{N_d + N_a} w(x)$$

La tensione di strozzamento V_P si ottiene quindi come

$$H = \sqrt{\frac{2\epsilon}{q N_d} \frac{N_a}{N_a + N_d} (\phi_i - V_P)}$$

$$V_P = \phi_i - \frac{q N_d H^2}{2\epsilon} \frac{N_a + N_d}{N_a}$$

Sostituendo i valori numerici, si ottiene

N_a [cm ⁻³]	$1 \cdot 10^{15}$	$1 \cdot 10^{16}$	$1 \cdot 10^{17}$	$1 \cdot 10^{18}$
ϕ_i [V]	0,616	0,681	0,741	0,801
V_P [V]	-51,5	-12,4	-8.39	-7,93

9.7.4

Con riferimento al JFET descritto nel problema 9.7.3 (con $N_d = 5 \cdot 10^{15}$ cm⁻³ e $N_a = 1 \cdot 10^{18}$ cm⁻³), calcolare l'impedenza di ingresso vista dal morsetto di gate, nell'ipotesi che la tensione V_{DS} sia molto piccola e $V_{GS} = -1$ V. Per la lunghezza e larghezza del dispositivo, si assumano rispettivamente i valori $A = 10$ μm e $B = 50$ μm.

Per tensioni drain-source molto piccole, il canale è equipotenziale e la capacità di transizione localizzata alla giunzione p-n si valuta come

$$C_T = 2\epsilon \frac{AB}{w}$$

$$w = \sqrt{\frac{2\epsilon}{q} \frac{N_a + N_d}{N_a N_d} (\phi_i - V_{GS})}$$

Numericamente si ha $w = 0,68 \mu\text{m}$ e $C_T = 152,2 \text{ fF}$. La capacità complessiva vista dal morsetto di gate è somma delle capacità gate-source e gate-drain (C_{GS} e C_{GD}); nel caso in questione si ha

$$C_{GS} = C_{GD} = \frac{C_T}{2} = 76,1 \text{ fF}$$

$$C_G = C_{GS} + C_{GD} = 152,2 \text{ fF}$$

Per quanto riguarda la resistenza di ingresso, occorre stimare la corrente di gate, che è la corrente inversa della giunzione gate-canale; nel silicio e a temperatura ambiente, tale corrente è dovuta essenzialmente alla generazione nella zona di svuotamento della giunzione e si calcola con buona approssimazione come (9.4):

$$I_g = \frac{ABqn_iw}{2\tau_0}$$

dove τ_0 è il tempo di vita associato alla ricombinazione dell'eccesso di portatori e w è l'ampiezza della zona di svuotamento, dipendente dalla tensione inversa, ovvero dalla tensione gate-canale. Derivando si ottiene la resistenza di ingresso

$$r_g = \frac{dV_{GS}}{dI_g} = \frac{2\tau_0}{ABn_i} \sqrt{\frac{2N_d}{q\epsilon} (\phi_i - V_{GS})}$$

Assumendo $\tau_0 = 1 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ e $\phi_i = 0,8 \text{ V}$, si ottiene

$$r_g = 4 \cdot 10^{12} \Omega$$

9.7.5

Dato il JFET del problema 9.7.3, con $N_d = 7 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ e $N_a = 1 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$, calcolare il potenziale di contatto alla giunzione gate-canale e determinare i valori di spessore $2H$ del canale per i quali risulta $V_P = -0,5 \text{ V}$ e $V_P = +0,2 \text{ V}$.

9.7.6

È dato il circuito della figura 9.33, nel quale i transistori a canale n, T_1 e T_2 , hanno le dimensioni

	$L [\mu\text{m}]$	$W [\mu\text{m}]$	$H [\mu\text{m}]$
T_1	1	0,4	1,5
T_2	1	0,54	?

(la profondità del canale di T_2 è ignota).

Per entrambi i JFET i livelli di drogaggio sono $N_d = 2 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ e $N_a = 1 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$. Sapendo che $V_{DD} = 0,5 \text{ V}$ e che la tensione di uscita vale $V_2 = 0,1 \text{ V}$

Figura 9.33: Invertitore logico.

quando l'ingresso è $V_1 = 0,5 \text{ V}$, calcolare la corrente che scorre in T_1 e la profondità di canale di T_2 .

La tensione di contatto per i due transistori è data da

$$\phi_i = \frac{kT}{q} \ln \left(\frac{N_a N_d}{n_i^2} \right) = 0,84 \text{ V}$$

La tensione di strozzamento di T_1 vale

$$V_{P1} = \phi_i - \frac{q N_d}{2\epsilon_s} H_1^2 = 0,84 - 3,48 = -2,64 \text{ V}$$

Poiché

$$0,1 < V_{DS1,\text{sat}} = V_{GS} - (V_{P1} - \phi_i) = 0,5 + 3,48 = 3,98 \text{ V}$$

il transistore T_1 non opera in zona di saturazione; pertanto la corrente può essere espressa come

$$I_{D1} = G_1 \left(V_{DS1} - \frac{2}{3\sqrt{\phi_i - V_{P1}}} \left[(\phi_i - V_{GS1} + V_{DS1})^{3/2} - (\phi_i - V_{GS1})^{3/2} \right] \right)$$

dove G_1 è la conduttanza di canale del transistore T_1 , espressa da

$$G_1 = q \mu_n N_d \frac{W_1}{L_1} H_1 = 2,5 \cdot 10^{-5} \Omega^{-1}$$

Sostituendo i valori numerici, risulta $I_{D1} = 1,7 \cdot 10^{-6} \text{ A}$. Il valore di H_2 si ottiene eguagliando le correnti in T_1 e T_2 ; in condizioni stazionarie e supponendo che anche T_2 operi in zona non lineare, si ha

$$I_{D2} = G_2 \left(V_{DS2} - \frac{2}{3\sqrt{\phi_i - V_{P2}}} \left[(\phi_i - V_{GS2} + V_{DS2})^{3/2} - (\phi_i - V_{GS2})^{3/2} \right] \right) = I_{D1}$$

con $V_{GS2} = 0$, $V_{DS2} = 0,4 \text{ V}$ e

$$G_2 = G_1 \frac{H_2 W_2}{H_1 W_1}$$

Risolvendo l'equazione nell'unica incognita H_2 si ottiene $H_2 = 1,41 \mu\text{m}$. Occorre ora verificare che T_2 lavori effettivamente in zona non lineare; a tale scopo, si calcola il valore della tensione di strozzamento

$$V_{P2} = \phi_i - \frac{q N_d}{2\epsilon_s} H_2^2 = 0,84 - 3,07 = -2,23 \text{ V}$$

T_2 lavora in zona non lineare perché

$$V_{DS2} = 0,4 \text{ V} < V_{DS2,\text{sat}} = V_{GS2} - (V_{P2} - \phi_i) = 3,07 \text{ V}$$

9.7.7

Un JFET è realizzato diffondendo una regione di tipo p dello spessore di $0,5 \mu\text{m}$ in uno strato epitassiale n di $1,5 \mu\text{m}$; il gate di tipo p è drogato con una concentrazione di drogante $N_a = 1 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$, mentre per lo strato epitassiale si ha $N_d = 4 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$. Le dimensioni del canale sono $L = 4 \mu\text{m}$ e $W = 12 \mu\text{m}$, inoltre i contatti di source e drain sono realizzati come diffusioni n^+ separate dal canale di $5 \mu\text{m}$. Calcolare la resistenza del canale con $V_G = 0 \text{ V}$, e confrontarlo con quello delle resistenze serie localizzate tra canale e contatti di source e drain. Ripetere il confronto con $V_G = -2 \text{ V}$ (si assuma che la giunzione gate-canale sia di tipo brusco e si trascuri la zona di svuotamento dovuta alla giunzione tra canale e substrato p .)

9.7.8

Date le caratteristiche di drain di un JFET a canale n (fig. 9.34 a destra), si ricavi in modo grafico la caratteristica di trasferimento del dispositivo. Dare inoltre un'espressione analitica per la caratteristica ottenuta e valutarne i parametri. Ottenere infine la transconduttanza.

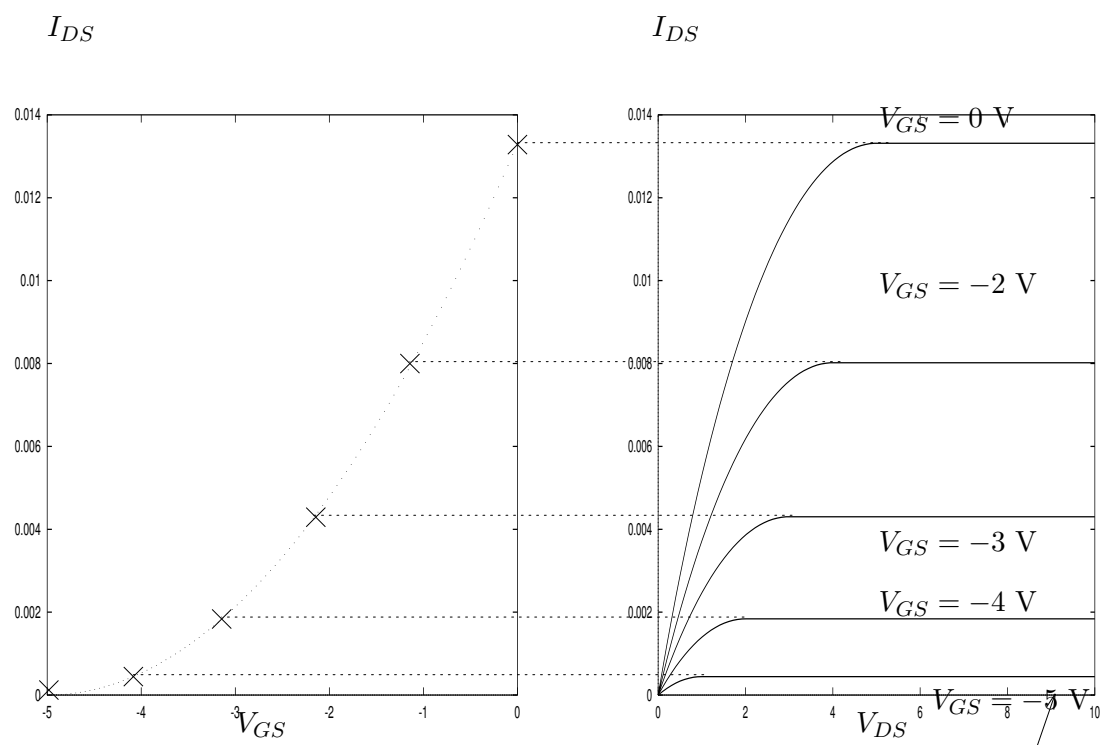


Figura 9.34: Sviluppo della caratteristica di trasferimento di un JFET a partire dalla caratteristica di drain.

Poiché il dispositivo è a canale n , la tensione di gate per la quale il canale è chiuso (tensione di *pinchoff*) è negativa e in questo caso vale $V_P = -5 \text{ V}$. Dalla figura, si legge anche la corrente di saturazione del JFET per $V_{GS} = 0$, che vale $I_{DSS} = 12 \text{ mA}$.

La caratteristica di trasferimento si ottiene leggendo sulla caratteristica di drain i valori di V_{GS} e I_{DS} per ciascuna curva, e riportando i punti corrispondenti sul piano (V_{GS}, I_{DS}) . Il risultato è dato in figura 9.34 a destra.

La curva ottenuta è una parabola che ha equazione

$$I_D = (a - b V_{GS})^2$$

dove i parametri a e b si calcolano a partire dal valore di V_{GS} per $I_D = 0$ e dal valore di I_D per $V_{GS} = 0$

$$V_{GS}|_{I_D=0} = V_P = \frac{a}{b} = -5 \text{ V} \quad I_D|_{V_{GS}=0} = I_{DSS} = a^2 = 12 \text{ mA}$$

si ottiene $a = 0,109 \text{ mA}^{0,5}$ e $b = -21,9 \cdot 10^{-3} \text{ mA}^{0,5} \text{ V}^{-1}$.

In forma analitica

$$I_D = (a - b V_{GS})^2 = a^2 \left(1 - \frac{b}{a} V_{GS}\right)^2 = I_{DSS} \left(1 - \frac{V_{GS}}{V_P}\right)^2 = I_{DSS}$$

La transconduttanza è definita come variazione della corrente rispetto alla tensione di gate. Poiché la caratteristica di trasferimento non è una retta, la transconduttanza risulta essere funzione del punto di lavoro del dispositivo

$$g_m = \frac{dI_D}{dV_{GS}} = -2I_{DSS} \left(1 - \frac{V_{GS}}{V_P}\right) \frac{1}{V_P} = g_{m0} \left(1 - \frac{V_{GS}}{V_P}\right)$$

dove g_{m0} è la transconduttanza valutata per $V_{GS} = 0$. In questo caso si ha $g_{m0} = -2 I_{DSS}/V_P = 4,8 \cdot 10^{-3} \text{ mA V}^{-1}$.

Capitolo 10

Il transistor bipolare

Il capitolo è interamente dedicato al transistor bipolare, dispositivo che per la sua complessità fornisce l'occasione di applicare molti dei concetti introdotti nei capitoli precedenti.

I modelli del capitolo 6 permettono di ottenere in modo accurato il profilo di drogaggio di un transistor bipolare, a partire dai principali passaggi del processo tecnologico. Per simulare il processo di fabbricazione di un transistor bipolare viene usato il programma SUPREM. Successivamente, per un tipico transistor bipolare n-p-n, si ricavano le espressioni analitiche e si ottengono i valori dei più importanti parametri elettrici: l'efficienza di emettitore, il fattore di trasporto e l'amplificazione di corrente per ampio segnale. Un ampio spazio è riservato al modello circuitale non lineare di Ebers-Moll: tale modello, usato per studiare il funzionamento del transistor in diverse condizioni di polarizzazione, costituisce il punto di partenza di molti dei problemi proposti. Il modello del transistor viene quindi completato con l'introduzione dell'effetto Early e delle resistenze di collettore, di base e di emettitore.

Per lo studio del dispositivo come elemento circuitale viene usato un semplice circuito costituito da un transistor bipolare polarizzato in configurazione a emettitore comune. Si identifica il punto di funzionamento del transistor, prima partendo dalle equazioni di Ebers-Moll e poi lavorando con l'aiuto di PSPICE sulle curve caratteristiche. I concetti di funzionamento in linearità e di modello per piccolo segnale sono affrontati linearizzando le equazioni di Ebers-Moll per ottenere i modelli detti a "parametri h " e "ibrido a π ".

Il simulatore PSPICE viene infine impiegato per esaminare altri aspetti del transistor bipolare oltre alle caratteristiche statiche, quali l'effetto delle resistenze di emettitore, di base e di collettore sul comportamento statico, i concetti di punto di lavoro e di funzionamento per piccolo segnale. In particolare alcuni problemi sono dedicati allo spostamento del punto di lavoro con la variazione della temperatura o del guadagno β , problema di grande importanza nell'applicazione circuitale del transistor. In conclusione PSPICE è usato per studiare il comportamento in regime dinamico, in particolare per valutare il ritardo di un transistor in regime di commutazione.

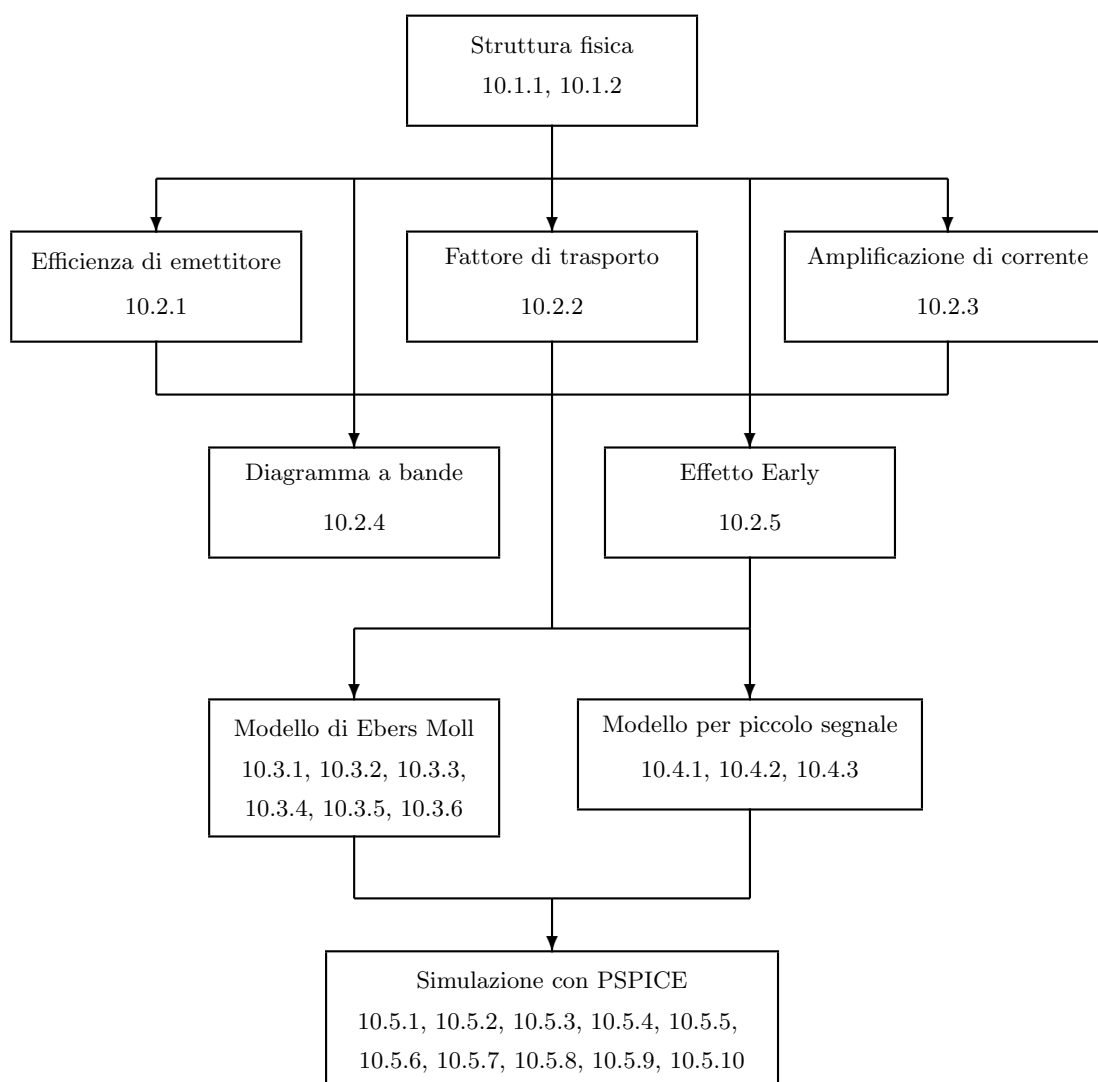


Figura 10.1: Struttura del Capitolo 10.

10.1 Struttura fisica del transistor

10.1.1

Un transistor *n-p-n* (fig. 10.2) si ottiene entro uno strato epitassiale di spessore $10\text{ }\mu\text{m}$ e con resistività di $2,45\text{ }\Omega\text{ cm}$. La base si forma effettuando una diffusione di boro con concentrazione alla superficie che si mantiene costante al valore di $2,2 \cdot 10^{19}\text{ cm}^{-2}$ a 1160°C per 24 min e 27 s. L'emettitore è invece ottenuto con un passo di diffusione di fosforo, della durata di 62 min, alla temperatura di 1100°C , caratterizzato da una concentrazione superficiale prossima alla solubilità solida di circa 10^{21} cm^{-3} . In concomitanza con la diffusione della zona di emettitore, la base è sottoposta a ridiffusione.

1. Si tracci, quotandolo, il profilo di drogaggio ottenuto, nella sezione A-A e si determini l'effettiva larghezza di base.
2. Il transistor ha uno strato sepolto realizzato con una diffusione di arsenico che, dopo il processo di epitassia, ha un profilo di drogaggio di tipo gaussiano con

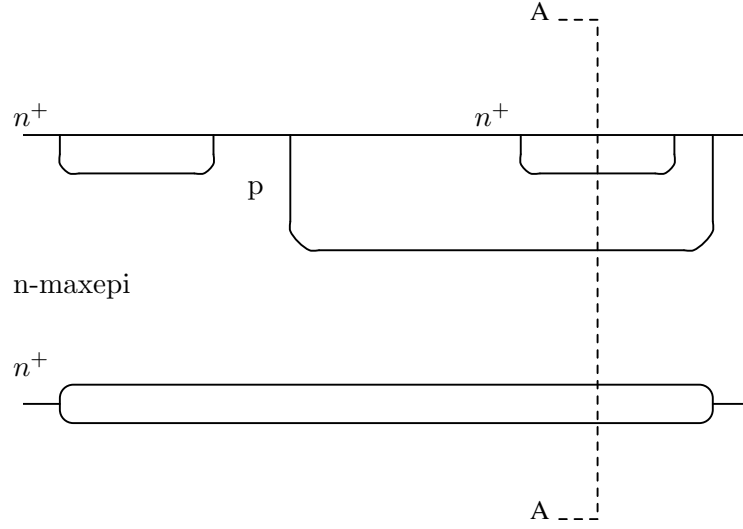


Figura 10.2: Struttura di un transistor bipolare n-p-n.

$\Delta R_P = 450 \text{ nm}$, $R_P = 10 \mu\text{m}$ e $N' = 5,4 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-2}$. Si calcoli di quanto lo strato sepolto si estende entro l'isola epitassiale al termine dei processi di diffusione.

a)

Strato epitassiale.

Se si assume che tutti gli atomi di drogaggio siano ionizzati, si ha $n \simeq N_d$ e si può calcolare la densità del drogaggio usando la formula della conducibilità $\sigma = qn\mu_n$. Assumendo per il silicio $\mu_n = 1417 \text{ cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$ ed esprimendo tutte le distanze in centimetri, si ha

$$N_d \simeq n = \frac{\sigma}{q\mu_n} = \frac{1}{2,45 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times 1417} = 1,8 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$$

Diffusione della base.

Il coefficiente di diffusione del boro nel silicio a 1160°C vale

$$D_b = 1,5 \cdot 10^{-12} \text{ cm}^2 \text{s}^{-1}$$

Il profilo di drogaggio è una funzione complementare di errore:

$$C_b(x) = C_s \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{D_b t_1}}\right)$$

Il numero totale di atomi per unità di superficie diffusi in $t_1 = 1467 \text{ s}$ si ha integrando

$$N'_b = \int_0^\infty C_b(x) dx = 2\sqrt{\frac{D_b t_1}{\pi}} C_s = 1,16 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-2}$$

Ridistribuzione di boro durante la diffusione dell'emettitore.

Il coefficiente di diffusione del boro a 1100°C vale

$$D'_b = 3,3 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^2 \text{s}^{-1}$$

Il profilo gaussiano per $t_2 = 3720$ s ha una lunghezza di diffusione

$$L_{b_2} = \sqrt{4(D'_b t_2 + D_b t_1)} = \sqrt{4 \times 3,43 \cdot 10^{-9}} = 1,17 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$$

e si esprime come

$$\begin{aligned} C_{b_2}(x) &= \frac{N'_b}{\sqrt{\pi(D'_b t_2 + D_b t_1)}} e^{-\frac{x^2}{4(D'_b t_2 + D_b t_1)}} = \\ &= 1,12 \cdot 10^{19} e^{-\frac{x^2}{1,37 \cdot 10^{-8}}} \end{aligned}$$

Nella figura 10.3 sono tracciati i profili di drogaggio della base dopo la prima fase di diffusione e dopo la ridiffusione termica.

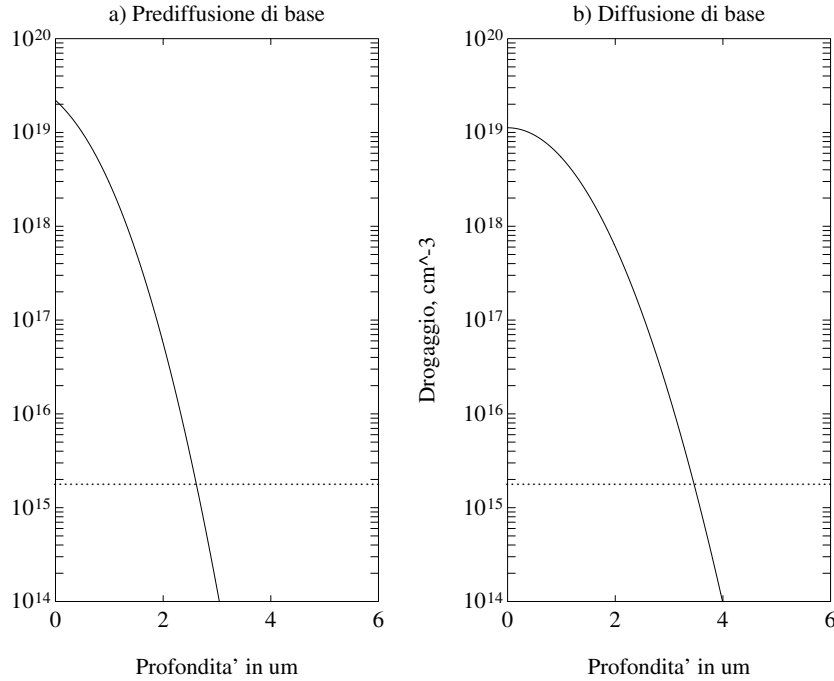


Figura 10.3: a) Diffusione iniziale nello strato epitassiale a $T = 1160^\circ \text{C}$ di boro con drogaggio in superficie $2,2 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ b) diffusione durante la formazione dell'emettitore (a $T = 1100^\circ \text{C}$).

Profondità della base

La regione di base termina alla profondità x_b a cui la densità del drogaggio con boro è eguale alla concentrazione dei donatori nello strato epitassiale

$$\begin{aligned} C_{b_2}(x_b) &= N_{\text{epi}} = 1,8 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3} \\ x_b &= \sqrt{1,37 \cdot 10^{-8} \times \ln \left(\frac{1,12 \cdot 10^{19}}{1,8 \cdot 10^{15}} \right)} = 3,46 \mu\text{m} \end{aligned}$$

Diffusione dell'emettitore

La costante di diffusione del fosforo nel silicio a 1100°C vale $D_e = 4 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^2 \text{s}^{-1}$. Il profilo della concentrazione di fosforo è dato da

$$C_e(x) = C_{se} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{D_e t_2}} \right) = 10^{21} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{0,77 \cdot 10^{-4}} \right)$$

Profondità dell'emettitore

La regione di emettitore termina alla profondità x_e a cui la densità dei donatori fosforo è eguale alla concentrazione degli accettori della base

$$C_e(x_e) = C_{b_2}(x_e)$$

$$10^{21} \operatorname{erfc}\left(\frac{x_e}{0,77 \cdot 10^{-4}}\right) = 1,12 \cdot 10^{19} \cdot e^{-\frac{x_e^2}{1,37 \cdot 10^{-8}}}$$

$$w_B = x_b - x_e = 3,46 - 1,78 = 1,68 \mu\text{m}$$

L'andamento della diffusione di emettitore e la profondità della giunzione base-emettitore sono dati nella figura 10.4

b)

Strato sepolto

Il profilo è gaussiano, ma il valore massimo non è a $x = 0$

$$C_s(x) = \frac{N'}{\sqrt{\pi}L} e^{-\frac{(x - R_p)^2}{L^2}}$$

$$L = \sqrt{2\Delta R_p^2 + 4D_1 t_1 + 4D_2 t_2}$$

dove D_1 e D_2 sono i coefficienti di diffusione dell'arsenico dello strato sepolto alle temperature dei processi per la formazione della base e dell'emettitore

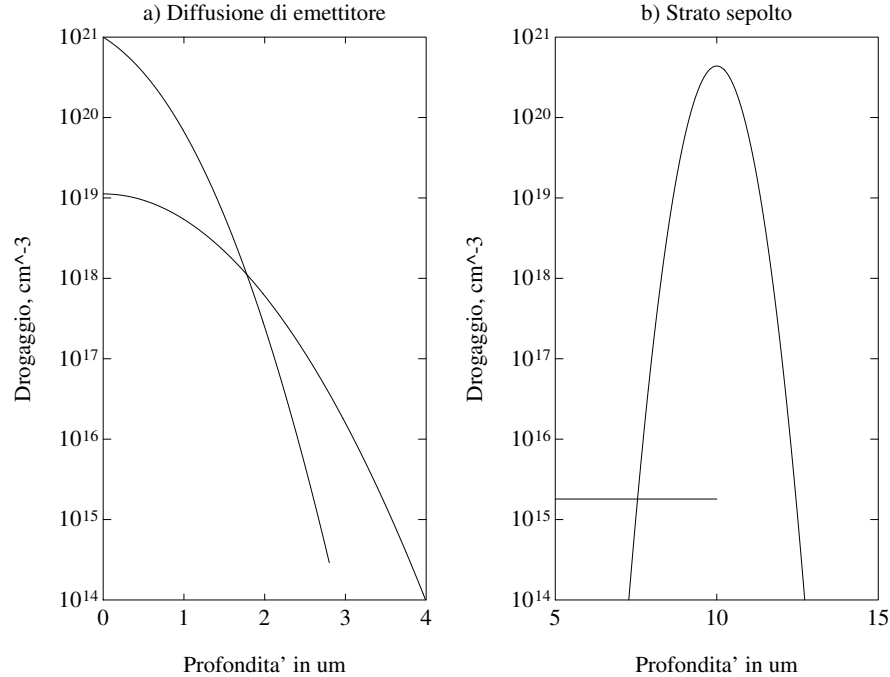


Figura 10.4: a) Diffusione di emettitore (atomi di fosforo) nella base, b) strato sepolto alla fine del processo.

$$\left. \begin{array}{ll} D_1 = 7,705 \cdot 10^{-14} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1} & (\text{diff. base}) \\ D_2 = 2,35 \cdot 10^{-14} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1} & (\text{diff. emettitore}) \end{array} \right\} L = 6,96 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$$

$$C_s(x) = 4,38 \cdot 10^{20} \times e^{-\left(\frac{x - 10^{-3}}{6,96 \cdot 10^{-5}}\right)^2}$$

Si può fissare la profondità a cui ha inizio lo strato sepolto quando il drogaggio si raddoppia, cioè

$$C_s(x_s) = 2N_{\text{epi}} = 3,6 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$$

$$x_s = 10^{-3} - 6,96 \cdot 10^{-5} \sqrt{\ln \frac{4,38}{3,6} \cdot 10^5} = 7,55 \mu\text{m}$$

La posizione delle diverse zone del transistor è ben visibile nella figura 10.5, dove è tracciato l'andamento del profilo di drogaggio complessivo $|N_d - N_a|$ nella sezione A-A.

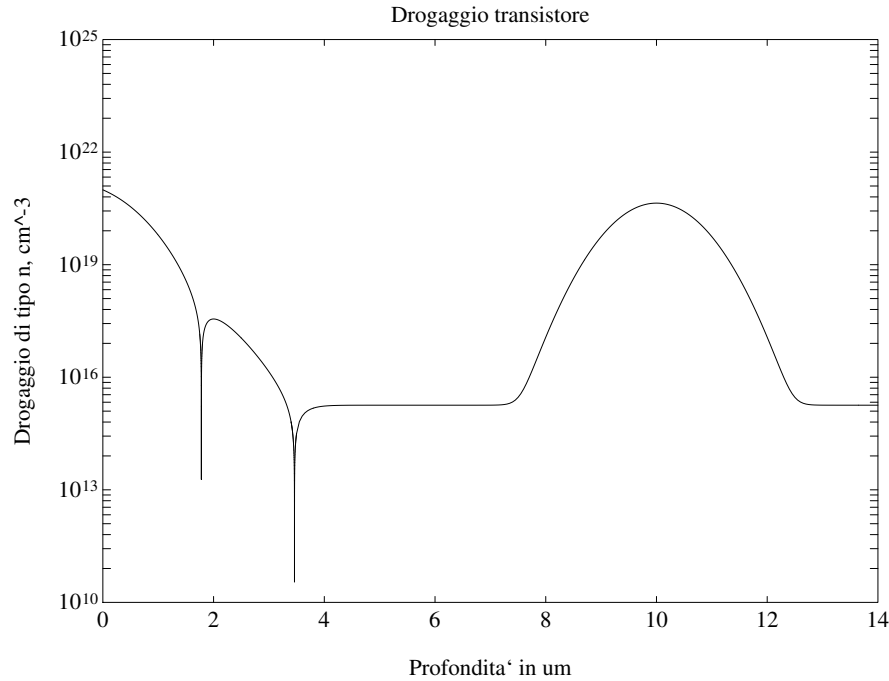


Figura 10.5: Profilo di drogaggio complessivo $|N_d - N_a|$ in funzione della profondità nella sezione A-A.

10.1.2 Simulazione tramite SUPREM del processo di fabbricazione di un BJT

Si studi il processo di fabbricazione di un transistor bipolare utilizzando il simulatore di processo SUPREM. In particolare si determini il profilo di drogaggio nella sezione che attraversa l'emettitore supponendo di effettuare in sequenza i seguenti passi

1. *impiantazione dello strato sepolto con una dose di antimonio pari a $1 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-2}$ e un'energia di 75 keV (il substrato è drogato uniformemente con $1 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ atomi di boro);*
2. *crescita dello strato epitassiale di 3 μm di spessore e drogato con $2 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ atomi di arsenico;*
3. *impiantazione della regione di base con una dose di boro pari a $2 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-2}$ e un'energia di 100 keV;*
4. *impiantazione della regione di base con una dose di fosforo pari a $1 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-2}$ e un'energia di 50 keV.*

Inoltre sul profilo ottenuto si valutino:

1. la profondità della giunzione base-collettore;
2. la profondità della giunzione base-emettitore;
3. la larghezza della regione di base.

Dato che SUPREM3 è un simulatore monodimensionale, la simulazione sarà fatta lungo una sezione in corrispondenza dell'emettitore, senza però tralasciare le fasi di processo che, pur non avendo dirette conseguenze sulla struttura nella sezione in esame, sono comunque indispensabili per la realizzazione del dispositivo nel suo complesso.

La realizzazione dello strato sepolto avviene sul substrato, drogato con boro, con un'operazione di mascheratura tramite ossido. È quindi necessario prevedere una fase di crescita dell'ossido e una sua successiva rimozione nelle zone nelle quali vi sarà il transistor. Lo strato sepolto viene realizzato con un'impiantazione ionica di antimonio. Il rinvenimento delle impurità nello strato sepolto avviene in due fasi successive: una prima più breve durante la quale si cresce contestualmente un sottile strato di ossido per evitare l'impoverimento superficiale della concentrazione delle impurità, e una successiva più lunga, che permette alle impurità di ridistribuirsi nel substrato.

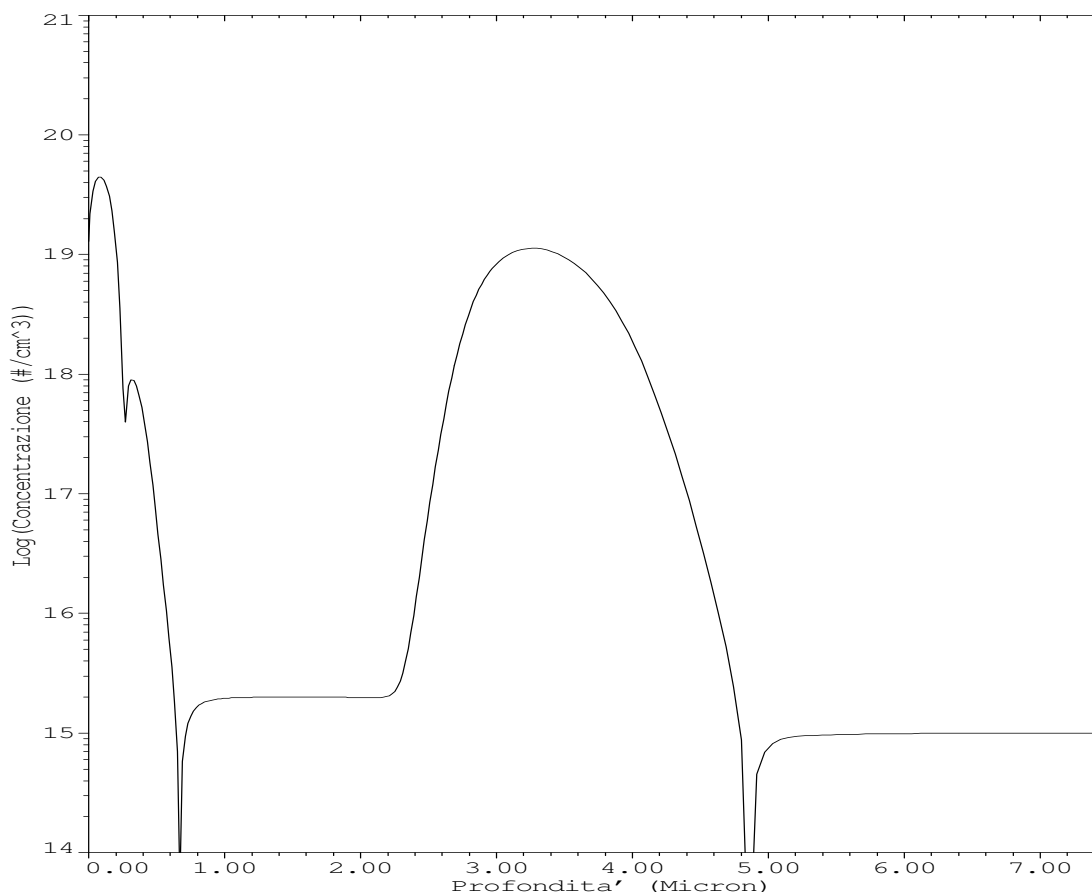


Figura 10.6: Profili delle impurità nella regione di emettitore: viene indicato $|N_d - N_a|$.

TITLE Simulazione del processo di fabbricazione di un BJT
COMMENT Inizializzazione del substrato di silicio

```
INITIALIZE <100> SILICON BORON=1E15 THICKNESS=5 DX=.02
SPACES=100
COMMENT Realizzazione dell'ossido per la mascheratura dell'
+ Impiantazione dello strato sepolto
DIFFUSION TEMPERATURE=1100 TIME=140 STEAM
COMMENT Rimozione dello strato di ossido per permettere l'impiantazione
+ dello strato sepolto
ETCH OXIDE
COMMENT Impiantazione dello strato sepolto
IMPLANT ANTIMONY DOSE=1E15 ENERGY=75
COMMENT Si effettua la diffusione dello strato sepolto nel substrato, si
+ utilizza un sottile strato di ossido per confinare il drogante
DIFFUSION TEMPERATURE=1100 TIME=20 DRYO2
DIFFUSION TEMPERATURE=1100 TIME=380
```

Dopo aver rimosso lo strato d'ossido cresciuto durante la fase di *annealing* dello strato sepolto si effettua il processo di crescita di $3\mu\text{m}$ di silicio epitassiale drogato con arsenico. Nello strato epitassiale si devono definire le regioni dove saranno realizzati i dispositivi (zone attive), delimitandole facendo crescere ai bordi ossido di campo spesso. Le zone attive sono isolate con la tecnica LOCOS, che sfrutta le scarse attitudini del nitrato di silicio (deposto sull'ossido di buffer) a ossidarsi.

Terminata la crescita dell'ossido di campo vengono rimossi, in corrispondenza delle zone attive, gli strati di ossido e di nitrato. Successivamente tramite impiantazione sono realizzate le regioni di base e di emettitore. Il profilo risultante, dopo un ciclo di rinvenimento, è riportato nella figura 10.6.

```
COMMENT Rimozione dell'ossido e realizzazione dello strato epitassiale
ETCH OXIDE
EPITAXY TEMPERATURE=1100 TIME=20 THICKNES=3 ARSENIC=2E15
XDX=.001
COMMENT Deposizione del nitrato per la tecnica LOCOS
DIFFUSION TEMPERATURE=1100 TIME=30 DRYO2
DEPOSIT NITRIDE THICKNESS=.10
COMMENT Crescita dell'ossido di campo
DIFFUSION TEMPERATURE=1100 TIME=60 STEAM PRESSURE=4
ETCH OXIDE
ETCH NITRIDE
ETCH OXIDE
COMMENT Realizzazione dell'impiantazione della regione di base
IMPLANT BORON DOSE=2E13 ENERGY=100
COMMENT Realizzazione dell'impiantazione della regione di emettitore
IMPLANT PHOSPHORUS DOSE=1E15 ENERGY=50
COMMENT Annealing delle impiantazioni di base e di emettitore
DIFFUSION TEMPERATURE=1000 TIME=12
PLOT CHEMICAL NET
+ DEVICE=POSTSCRIPT PLOT.OUT=10bip1.ps
```

Dal profilo di drogaggio si determinano immediatamente la profondità delle due giunzioni base-emettitore e base-collettore $x_{BE} = 0,309 \mu\text{m}$ $x_{BC} = 0,690 \mu\text{m}$, che definiscono una base spessa $0,381 \mu\text{m}$. Considerandone le dimensioni, spessore dello strato epitassiale e profondità delle giunzioni base-emettitore e base-collettore, si vede che il transistor realizzato è adatto ad applicazioni in commutazione; infatti uno strato epitassiale di spessore ridotto rende bassa la resistenza di collettore (potrebbe essere ulteriormente diminuita aumentando il drogaggio dello strato epitassiale), inoltre una base stretta riduce la carica immagazzinata (soprattutto in saturazione) riducendo sostanzialmente i tempi di commutazione.

10.2 Equazioni e parametri del transistor bipolare

Uno dei parametri caratteristici più importanti per il transistor bipolare è l'amplificazione di corrente per ampi segnali, definita come rapporto tra la corrente di collettore e quella di base,

$$\beta_F = \frac{I_C}{I_B}$$

Tale parametro è legato ad alcuni valori tecnologici importanti del transistor attraverso l'efficienza di emettitore γ e il fattore di trasporto α_T ; per un n-p-n, si ha

$$\beta_F = \frac{\alpha_F}{1 - \alpha_F} \quad \alpha_F = \alpha_T \gamma$$

$$\gamma = \frac{1}{1 - \frac{w_B N_B D_{pE}}{x_E N_E D_{nB}}} \quad \alpha_T = 1 - \frac{w_B^2}{2D_{nE} \tau_{nB}}$$

dove w_B è la larghezza della base, x_E è la larghezza dell'emettitore, N_E e N_B sono i drogaggi di emettitore e base, D_{nB} e D_{pE} sono le costanti di diffusione, τ_{nB} è il tempo di vita degli elettroni nella base.

10.2.1

Si determini l'espressione di γ (efficienza di emettitore) per un transistor n-p-n che presenta drogaggi con concentrazioni costanti nelle tre regioni.

Efficienza di emettitore γ

In un transistor n-p-n la corrente utile è quella degli elettroni iniettati dall'emettitore nella base. Se si trascura la ricombinazione nella zona di carica spaziale della giunzione E-B¹, la frazione utile di corrente che attraversa tale giunzione è

$$\gamma = \frac{|I_{nE}|}{|I_{nE}| + |I_{pE}|} = \frac{|I_{nB}(0)|}{|I_{nB}(0)| + |I_{pE}(0)|}$$

Per valutare γ si ricavano le correnti. Per la corrente di diffusione degli elettroni nella base si applica l'equazione di continuità, con le ipotesi di quasi neutralità ($\mathcal{E} = 0$) nella

¹Con questa approssimazione, valida per il calcolo delle correnti, la larghezza della regione spaziale si può ritenere nulla. La sezione $x = 0$ che indica la regione di carica spaziale è anche quella di inizio della regione di base. Considerazioni analoghe sono valide per la giunzione base-collettore; la sezione $x = w_B$ è quella di inizio della regione di base.

regione di base e che si abbia generazione soltanto di tipo termico, $U = n'/\tau_n$. In condizioni di stazionarietà ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) si ottiene

$$\begin{aligned} D_n \frac{\partial^2 n'}{\partial x^2} &= \frac{n'}{\tau_n}; \quad L_n = \sqrt{D_n \tau_n} \\ n'(x) &= A e^{-x/L_n} + B e^{x/L_n} \end{aligned}$$

Le condizioni al contorno pongono in relazione le costanti A e B con le concentrazioni agli estremi della base

$$\begin{aligned} n'(0) &= A + B \\ n'(w_B) &= A e^{-w_B/L_n} + B e^{w_B/L_n} = n'(0) e^{-w_B/L_n} + B \left(e^{w_B/L_n} - e^{-w_B/L_n} \right) \end{aligned}$$

e consentono di ottenere

$$\begin{aligned} B &= \frac{n'(w_B) - n'(0) e^{-w_B/L_n}}{e^{w_B/L_n} - e^{-w_B/L_n}} \\ A &= \frac{n'(0) e^{w_B/L_n} - n'(0) e^{-w_B/L_n} - n'(w_B) + n'(0) e^{-w_B/L_n}}{e^{w_B/L_n} - e^{-w_B/L_n}} \\ &= \frac{n'(0) e^{-w_B/L_n} - n'(w_B)}{e^{w_B/L_n} - e^{-w_B/L_n}} \end{aligned}$$

Sostituendo si ha

$$\begin{aligned} n'(x) &= \frac{1}{e^{w_B/L_n} - e^{-w_B/L_n}} \left[-n'(0) \left(e^{(x-w_B)/L_n} - e^{-(x-w_B)/L_n} \right) + \right. \\ &\quad \left. + n'(w_B) \left(e^{x/L_n} - e^{-x/L_n} \right) \right] \\ n'(x) &= -n'(0) \frac{\sinh\left(\frac{x-w_B}{L_n}\right)}{\sinh\left(\frac{w_B}{L_n}\right)} + n'(w_B) \frac{\sinh\left(\frac{x}{L_n}\right)}{\sinh\left(\frac{w_B}{L_n}\right)} \end{aligned}$$

Nell'ipotesi di basso livello di iniezione, vale la legge della giunzione:

$$\begin{aligned} n'(0) &= n_{pB0} \left(e^{V_{BE}/V_T} - 1 \right) \\ n'(w_B) &= n_{pB0} \left(e^{V_{BC}/V_T} - 1 \right) \end{aligned}$$

La corrente di diffusione di elettroni dall'emettitore nella base è data da

$$\begin{aligned} I_{nB}(x) &= q S D_n \frac{dn'}{dx} = \\ &= q S D_n \left[-n'(0) \frac{1}{L_n} \frac{\cosh\left(\frac{x-w_B}{L_n}\right)}{\sinh\left(\frac{w_B}{L_n}\right)} + n'(w_B) \frac{1}{L_n} \frac{\cosh\left(\frac{x}{L_n}\right)}{\sinh\left(\frac{w_B}{L_n}\right)} \right] \\ I_{nB}(0) &= -\frac{q S D_n}{L_n} n'(0) \coth\left(\frac{w_B}{L_n}\right) + \\ &+ \frac{q S D_n}{L_n} \cosh(0) \frac{1}{\sinh\left(\frac{w_B}{L_n}\right)} n'(w_B) \end{aligned}$$

dove S è l'area della giunzione BE. La corrente di lacune iniettate dalla base nell'emettitore, nell'ipotesi di diodo lungo, è

$$I_{pE}(x_E) = I_{pE}(0) = -q S D_p \frac{dp'}{dx} = -\frac{q S D_p}{L_p} p_{E0} \left(e^{\frac{V_{BE}}{V_T}} - 1 \right) \quad (10.1)$$

Dato che la base è corta, $w_B \ll L_n$, si approssima l'espressione di $I_{nB}(0)$ sostituendo la coth con l'inverso del suo argomento

$$I_{nB}(0) \simeq -\frac{q S D_n n_{pB0}}{w_B} \left(e^{V_{BE}/V_T} - 1 \right) + \frac{q S D_n n_{pB0}}{w_B} \left(e^{V_{BC}/V_T} - 1 \right) \quad (10.2)$$

$$= -\frac{q S D_n}{w_B} \frac{n_i^2}{N_A} \left(e^{V_{BE}/V_T} - e^{V_{BC}/V_T} \right) \quad (10.3)$$

Regione attiva: in regione attiva di funzionamento la giunzione base collettore è polarizzata inversamente pertanto $V_{BC} < 0$ quindi $e^{V_{BC}/V_T} \simeq 0$

$$I_{nB}(0) \simeq -\frac{q S D_n n_i^2}{w_B N_A} e^{V_{BE}/V_T}$$

$$I_{pE}(0) \simeq -\frac{q S D_p n_i^2}{L_p N_D} e^{V_{BE}/V_T}$$

Se l'emettitore è molto corto (come avviene nei circuiti integrati reali) $L_p \gg x_E$, la corrente di lacune iniettate dalla base nell'emettitore si può esprimere come

$$I_{pE}(0) \simeq -\frac{q S D_p n_i^2}{x_E N_D} e^{V_{BE}/V_T}$$

Efficienza di emettitore: si ottiene quindi per γ l'espressione

$$\gamma = \frac{|I_{nB}(0)|}{|I_{nB}(0)| + |I_{pE}(0)|} = \frac{1}{1 + \left| \frac{I_{pE}(0)}{I_{nB}(0)} \right|}$$

$$\left| \frac{I_{pE}(0)}{I_{nB}(0)} \right| = \frac{q D_p n_i^2}{x_E N_D} \frac{w_B N_A}{q D_n n_i^2} = \frac{D_p w_B N_A}{D_n x_E N_D}$$

$$\gamma = \frac{1}{1 + \frac{D_p w_B N_A}{D_n x_E N_D}}$$

10.2.2

Si determini l'espressione della corrente di ricombinazione nella base e si valuti il fattore di trasporto, per un transistor con lunghezza di base $w_B = 1 \mu\text{m}$, se $D_n = 36,8 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$ e $\tau_n = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ s}$.

In condizioni di stazionarietà si usa il modello a controllo di carica e si scrive

$$I_{rB} = \frac{Q'_{nB}}{\tau_n}$$

dove I_{rB} è la corrente di ricombinazione in base, τ_n è il tempo di vita medio e Q'_{nB} è la carica in eccesso nella base. Assumendo come riferimento la posizione della giunzione base-emettitore e indicando con w_B lo spessore della base, si ha

$$dQ_n = q A n'_B(x) dx$$

La corrente di ricombinazione si calcola allora come

$$I_{rB} = \int_0^{Q_n} \frac{1}{\tau_n} dQ_n = \frac{qA}{\tau_n} \int_0^{w_B} n'_B(x) dx$$

quindi il valore di I_{rB} è legato all'area sottesa dalla curva di $n'_B(x)$; assumendo per $n'_B(x)$ un andamento lineare, si ha

$$n'_B(x) = \frac{n'_B(w_B) - n'_B(0)}{w_B} x + n'_B(0)$$

$$n'_B(0) = n_{B0} (e^{V_{BE}/V_T} - 1) \quad ; \quad n'_B(w_B) = n_{B0} (e^{V_{BC}/V_T} - 1)$$

$$I_{rB} = \frac{qA}{\tau_n} \int_0^{w_B} \left[\frac{n'_B(w_B) - n'_B(0)}{w_B} x + n'_B(0) \right] dx$$

$$I_{rB} = \frac{2qA}{\tau_n} w_B (n'_B(0) + n'_B(w_B))$$

In polarizzazione diretta, si ha

$$I_{rB} \simeq \frac{qA n_i^2 w_B}{2\tau_n N_A} e^{V_{BE}/V_T}$$

Il fattore di trasporto α_T è definito come

$$\alpha_T = \frac{|I_{nB}| - |I_{rB}|}{|I_{nB}|} = 1 - \frac{|I_{rB}|}{|I_{nB}|} = 1 - \frac{qn_i^2 w_B}{2\tau_n N_A} \frac{w_B N_A}{qD_n n_i^2}$$

$$= 1 - \frac{w_B^2}{2D_n \tau_n} = 1 - \frac{w_B^2}{2L_n^2}$$

Dai valori $D_n = 36,8 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ e $\tau_n = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ si ha $L_n^2 = D_n \tau_n = 0,092 \text{ cm}^2$ e $L_n = 0,3 \text{ cm}$. Il fattore di trasporto è assai prossimo a 1 e vale $\alpha_T = 0,9998$.

10.2.3

Si valutino γ , α_T e β_F del transistor realizzato nel problema 10.1.1, supponendo di poter approssimare le concentrazioni di drogante nelle zone di base e di emettitore con andamenti costanti e pari al valor medio e assumendo per il tempo di vita medio dei portatori minoritari il valore $\tau = 100 \text{ ns}$.

Si calcolano i valori medi e si ottiene

$$\bar{N}_E = N_D = 2,44 \cdot 10^{20} \text{ cm}^{-3} \quad ; \quad \bar{N}_B = N_A = 2,21 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$$

Per determinare i valori delle mobilità si usano le (??) e (??)

base	$\mu_n = 580,2 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$	$\mu_p = 180 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$
emettitore	$\mu_n = 89 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$	$\mu_p = 54,2 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$

Per l'emettitore si ha $L_p = \sqrt{D_p \tau_p} = \sqrt{\mu_p V_T \tau_p} = 3,75 \mu\text{m}$ e, poiché $x_E = 1,78 \mu\text{m}$, si può assumere $L_p \gg x_E$. Usando la relazione di Einstein con una temperatura di

300 K, si ha nell'emettitore $D_p = V_T \mu_p = 1,41 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ e nella base $D_n = 15,08 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$. Inoltre è $w_B = 1,68 \mu\text{m}$

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{1 + \frac{D_p w_B N_A}{D_n x_E N_D}} = \frac{1}{1 + \frac{1,41 \times 1,68 \times 2,21 \cdot 10^{17}}{15,08 \times 1,78 \times 2,44 \cdot 10^{20}}} \\ &= \frac{1}{1 + 7,99299 \cdot 10^{-5}} = 0,99992\end{aligned}$$

Il **fattore di trasporto** α_T tiene conto della riduzione della corrente utile dovuta alla ricombinazione in base

$$\alpha_T = \frac{|I_{nB}| - |I_{rB}|}{|I_{nB}|} = 1 - \frac{w_B^2}{2D_n \tau_n}$$

Nella base la lunghezza di diffusione vale $L_n = \sqrt{D_n \tau_n} = 12 \mu\text{m}$

$$\alpha_T = 1 - \frac{w_B^2}{2L_n^2} = 1 - \frac{1,68^2}{2 \cdot (12)^2} = 0,9902$$

poiché nella base poco drogata, diffusività e vita media sono elevate, si ha $w_B \ll L_n$ e $\alpha_T \simeq 1$.

L'**amplificazione di corrente di ampio segnale** α_F in funzionamento diretto rappresenta il fenomeno del trasporto di cariche tra l'ingresso e l'uscita. Trascurando la corrente di lacune dal collettore verso la base si ha ²

$$\begin{aligned}\alpha_F &= -\frac{I_C}{I_E} = \left| \frac{I_C}{I_E} \right| \simeq \frac{|I_{nC}|}{|I_{nB}| + |I_{pE}|} = \frac{|I_{nB}| - |I_{rB}|}{|I_{nB}| + |I_{pE}|} \\ \alpha_F &= \frac{|I_{nB}| - |I_{rB}|}{|I_{nB}|} \frac{|I_{nB}|}{|I_{nB}| + |I_{pE}|} = \alpha_T \gamma = 0,9901\end{aligned}$$

L'**amplificazione di corrente di ampio segnale** β_F in funzionamento diretto considera come parametro di ingresso la corrente nella base, legata alle altre due correnti nei terminali dalla relazione secondo cui la somma delle correnti entranti deve essere nulla.

$$\begin{aligned}\beta_F &= \frac{I_C}{-I_E - I_C} = \frac{1}{-\frac{I_E}{I_C} - 1} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\alpha_F} - 1} = \frac{\alpha_F}{1 - \alpha_F} \simeq 100\end{aligned}$$

Nei transistori reali, β_F assume valori tipici compresi tra alcune decine e il migliaio.

10.2.4

Si disegni uno spaccato in scala del diagramma a bande di energia del transistor del problema 10.1.1.

Per disegnare il diagramma a bande si usa la relazione che esprime il livello inferiore della banda di conduzione E_C rispetto all'energia di Fermi; E_V ha lo stesso andamento

²Nel transistor, le correnti I_C e I_E hanno verso opposto.

traslato verso il basso di una quantità pari a $E_g = 1,124$ eV.

$$\begin{aligned} E_F &= E_C - \kappa T \ln \frac{N_C}{N_d} \\ E_F &= E_V + \kappa T \ln \frac{N_V}{N_a} \\ E_C &= E_F + \kappa T \ln \frac{N_C}{N_d} \\ E_C &= E_G + E_V = E_g + E_F - \kappa T \ln \frac{N_V}{N_a} \end{aligned}$$

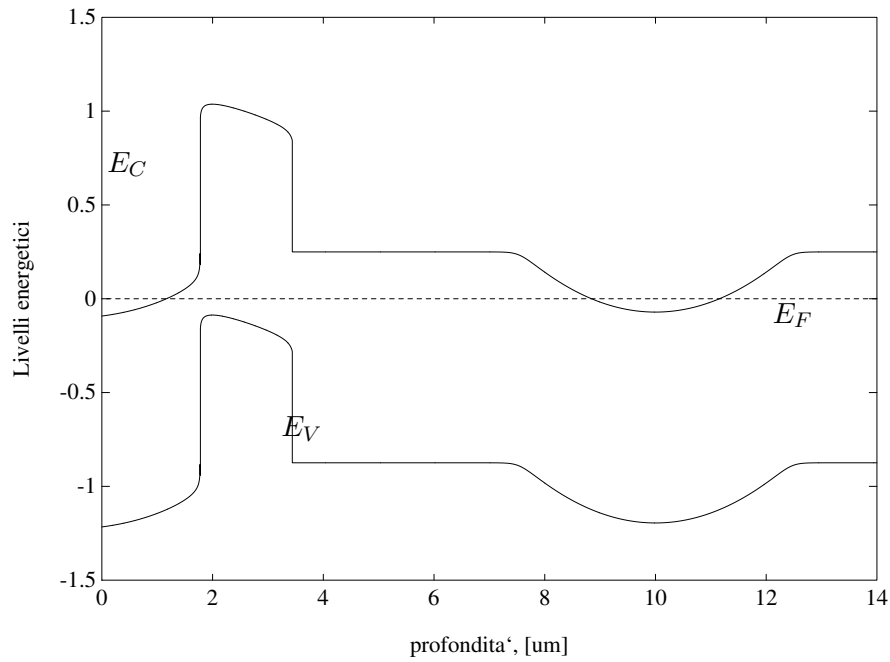


Figura 10.7: Diagramma a bande lungo una sezione passante per l'emettitore.

10.2.5

Calcolare il valore della tensione di Early V_a , per $V_{CB} = 0$ in un transistor prototipo in cui la base, larga $2,5 \mu\text{m}$ (per $V_{CB} = 0$), sia drogata con 10^{17} cm^{-3} atomi di boro, e il collettore con 10^{16} cm^{-3} atomi di fosforo. La giunzione base collettore si può considerare brusca a gradino.

Quanto vale la pendenza di I_C dovuta all'effetto Early?

Con le ipotesi a) che la corrente di portatori maggioritari in base sia trascurabile: $I_{pB} \simeq 0$ e b) che la ricombinazione in base sia trascurabile: $I_{nB} = \text{costante}$, si ha

$$\begin{aligned} J_{pB} &= q\mu_p p_B \mathcal{E} - qD_p \frac{dp_B}{dx} = 0 \\ \mathcal{E} &= \frac{D_p}{\mu_p p_B} \frac{dp_B}{dx} = \frac{kT}{q p_B} \frac{dp_B}{dx} \end{aligned}$$

Dall'espressione trovata per il campo elettrico si ottiene il valore della corrente di elettroni, che attraversa il transistor:

$$\begin{aligned} J_{nB} &= q\mu_n n \mathcal{E} + qD_n \frac{dn}{dx} = q\mu_n n \frac{kT}{qp_B} \frac{dp_B}{dx} + qD_n \frac{dn}{dx} \\ &= qD_n \frac{1}{p_B} \left(n \frac{dp_B}{dx} + p_B \frac{dn}{dx} \right) = qD_n \frac{1}{p_B} \frac{d}{dx} (n p_B) \end{aligned}$$

Si integra sulla lunghezza della base

$$\int_0^{w_B} \frac{p_B}{q D_n} J_{nB} dx = \int_{n(0)p_B(0)}^{n(w_B)p_B(w_B)} d(n p_B)$$

Se si trascura la ricombinazione, J_{nB} è costante con x :

$$J_{nB} \int_0^{w_B} \frac{p_B}{q D_n} dx = p_B(w_B) n(w_B) - p_B(0) n(0)$$

dove le quantità a secondo membro sono valutabili tramite la legge della giunzione; nell'ipotesi di basso livello di iniezione, si ha

$$\begin{aligned} p_B(0) &\simeq p_B(w_B) \simeq N_A \\ n(0) &= n_0 e^{V_{BE}/V_T} = \frac{n_i^2}{N_A} e^{V_{BE}/V_T} \\ n(w_B) &= n_0 e^{V_{BC}/V_T} = \frac{n_i^2}{N_A} e^{V_{BC}/V_T} \end{aligned}$$

Sostituendo si ottiene

$$J_{nB} = \frac{qn_i^2 (e^{V_{BC}/V_T} - e^{V_{BE}/V_T})}{\int_0^{w_B} \frac{1}{D_n} p_B dx} \simeq \frac{qn_i^2 \overline{D_n} (e^{V_{BC}/V_T} - e^{V_{BE}/V_T})}{\int_0^{w_B} p_B dx}$$

dove $\overline{D_n}$ è il valor medio della costante di diffusione nella regione di base. In regione di funzionamento attiva diretta, la giunzione BC è polarizzata inversamente, $V_{BC} < 0$, e pertanto

$$I_C \simeq I_n \simeq - \frac{qA n_i^2 \overline{D_n} e^{V_{BE}/V_T}}{\int_0^{w_B} p_B dx}$$

La dipendenza della corrente di collettore dalla tensione base-collettore, dovuta alla variazione della larghezza della base w_B (effetto Early), si può esprimere con la derivata

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_C}{\partial V_{CB}} &= \frac{qA n_i^2 \overline{D_n} e^{V_{BE}/V_T}}{[\int_0^{w_B} p_B dx]^2} p(w_B) \frac{\partial w_B}{\partial V_{CB}} \\ &= - \frac{I_C}{\int_0^{w_B} p_B dx} p(w_B) \frac{\partial w_B}{\partial V_{CB}} \end{aligned}$$

In polarizzazione diretta $V_{BE} \simeq 0,7 \text{ V}$ (costante), pertanto

$$\frac{\partial I_C}{\partial V_{CE}} \simeq \frac{\partial I_C}{\partial V_{CB}} \simeq \frac{I_C^*}{V_A}$$

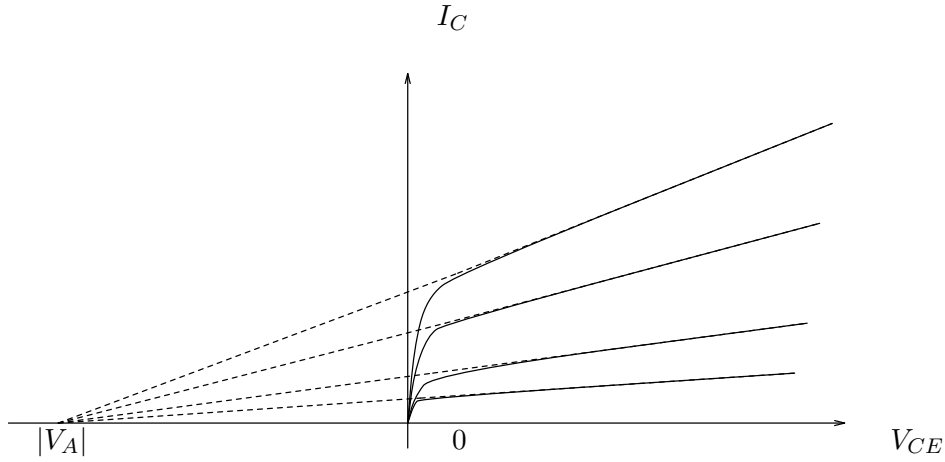


Figura 10.8: Efecto Early.

con I_C^* corrente di collettore valutata ai limiti della regione di saturazione e

$$V_A = \frac{-\int_0^{w_B} p_B dx}{p(w_B) \frac{\partial w_B}{\partial V_{CB}}} \quad (10.4)$$

Un'interpretazione geometrica della tensione di Early V_A è data nella figura 10.8. Dato che $\partial w_B / \partial V_{CB} < 0$, la tensione V_A per un transistor n-p-n è positiva; la derivata viene di solito calcolata per $V_{CB} = 0$. Al fine di determinare il legame tra w_B e V_{CB} , si scrive l'ampiezza della regione di svuotamento di una giunzione brusca in funzione della tensione applicata

$$\begin{aligned} x_d &= x_n + x_p = \sqrt{\frac{2\epsilon_s}{q} \left(\frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_D} \right) (\phi_i - V_{BC})} \\ x_p &= x_d \frac{N_D}{N_A + N_D} \\ \phi_i &= \frac{kT}{q} \ln \frac{N_A N_D}{n_i^2} = 0,75 \text{ V} \end{aligned}$$

La variazione della larghezza della regione di base è pari alla variazione della larghezza della regione svuotata della giunzione BC nel lato della base

$$\begin{aligned} \frac{dx_p}{dV_{CB}} &= -\frac{dw_B}{dV_{CB}} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\epsilon_s}{q} \frac{N_D}{N_A} \frac{1}{N_A + N_D}} \frac{1}{\sqrt{\phi_i + V_{CB}}} \\ \frac{dx_p}{dV_{CB}} \Big|_{V_{CB}=0} &= -1,97 \cdot 10^{-6} \text{ cm/V} \end{aligned}$$

inoltre se il drogaggio della base è uniforme

$$\int_0^{w_B} p_B dx = p_B(w_B) w_B$$

Pertanto si ottiene

$$V_A = \frac{p_B w_B}{p_B \frac{dx_p}{dV_{CB}}} = -126,5 \text{ V}$$

10.3 Modello di Ebers-Moll

Il funzionamento del transistor può essere descritto in generale mediante le equazioni di Ebers-Moll, che legano le correnti ai terminali alle tensioni sulle giunzioni

$$I_E = a_{11} \left(e^{V_{BE}/V_T} - 1 \right) + a_{12} \left(e^{V_{BC}/V_T} - 1 \right) \quad (10.5)$$

$$I_C = a_{21} \left(e^{V_{BE}/V_T} - 1 \right) + a_{22} \left(e^{V_{BC}/V_T} - 1 \right) \quad (10.6)$$

dove, per un transistor n-p-n,

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{q S D_{nB} n_i^2}{w_B N_B} - \frac{q S D_{pE} n_i^2}{L_{pE} N_E} \\ a_{12} &= \frac{q S D_{nB} n_i^2}{w_B N_B} \\ a_{21} &= \frac{q S D_{nB} n_i^2}{w_B N_B} \\ a_{22} &= -\frac{q S D_{nB} n_i^2}{w_B N_B} - \frac{q S D_{pC} n_i^2}{L_{pC} N_C} \end{aligned}$$

S è l'area della giunzione base-emettitore; la lunghezza di diffusione delle lacune nell'emettitore L_{pE} deve essere sostituito con la profondità dell'emettitore quando l'emettitore non può essere considerato lungo.

10.3.1

Ricavare le equazioni di Ebers-Moll (10.5) e costruire il modello circuitale non lineare detto di Ebers-Moll (fig. 10.9).

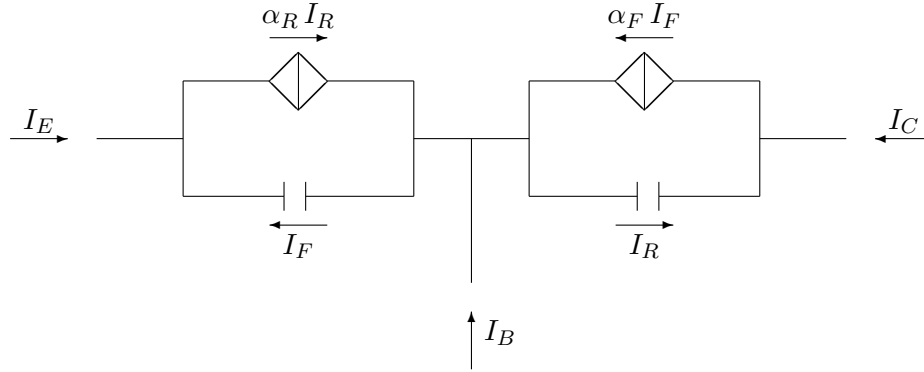


Figura 10.9: Modello circuitale di Ebers e Moll.

I coefficienti a_{11} , a_{12} , a_{21} e a_{22} delle equazioni di Ebers-Moll si possono ottenere dalle equazioni delle correnti nel bipolare ricavate nel problema 10.2.1. La corrente di emettitore è somma di due contributi

$$I_E = I_{nB}(0) + I_{pE}(0)$$

dove $I_{nB}(0)$ è la corrente di diffusione di elettroni dall'emettitore nella base (10.2)

$$I_{nB}(0) \simeq -\frac{q S D_{nB} n_{B0}}{w_B} \left(e^{V_{BE}/V_T} - 1 \right) + \frac{q S D_{nB} n_{B0}}{w_B} \left(e^{V_{BC}/V_T} - 1 \right)$$

mentre $I_{pE}(0)$ è la corrente di lacune iniettate dalla base verso l'emettitore (10.1)

$$I_{pE}(0) = -\frac{q S D_{pE}}{L_{pE}} p_{E0} \left(e^{\frac{V_{BE}}{V_T}} - 1 \right)$$

Per i due primi coefficienti, si ricava

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{q S D_{nB} n_i^2}{w_B N_B} - \frac{q S D_{pE} n_i^2}{L_{pE} N_E} \\ a_{12} &= \frac{q S D_{nB} n_i^2}{w_B N_B} \end{aligned}$$

Per ottenere a_{21} e a_{22} , si può osservare che, scambiando i ruoli di emettitore e collettore, le espressioni delle correnti rimangono le stesse³; di conseguenza si può scrivere

$$\begin{aligned} a_{21} &= \frac{q S D_{nB} n_i^2}{w_B N_B} \\ a_{22} &= -\frac{q S D_{nB} n_i^2}{w_B N_B} - \frac{q S D_{pC} n_i^2}{L_{pC} N_C} \end{aligned}$$

Si nota che $a_{12} = a_{21}$, perché questi coefficienti dipendono soltanto dai parametri della base. Per un transistor pnp, le espressioni dei quattro coefficienti del modello di Ebers-Moll sono analoghe, ma cambiano tutti i segni.

Per ottenere il modello di Ebers-Moll, la corrente di collettore si può scrivere come somma della corrente iniettata dalla base e della corrente propria della giunzione BC, introducendo la prima relazione nella seconda,

$$\begin{aligned} I_C &= a_{21} \left[\frac{1}{a_{11}} I_E - \frac{a_{12}}{a_{11}} \left(e^{V_{BC}/V_T} - 1 \right) \right] + a_{22} \left(e^{V_{BC}/V_T} - 1 \right) \\ &= \frac{a_{21}}{a_{11}} I_E + \left(a_{22} - a_{21} \frac{a_{12}}{a_{11}} \right) \left(e^{V_{BC}/V_T} - 1 \right) \\ &= -\alpha_F I_E - I_{C0} \left(e^{V_{BC}/V_T} - 1 \right) \end{aligned}$$

Analogamente

$$I_E = -\alpha_R I_C - I_{E0} \left(e^{V_{BE}/V_T} - 1 \right)$$

10.3.2

Usare il modello di Ebers-Moll per trovare, nel caso di un transistor pnp, il rapporto I_{CEO}/I_{CBO} , dove I_{CEO} è la corrente che scorre nel collettore polarizzato inversamente con la base aperta e I_{CBO} è la stessa corrente con l'emettitore aperto. Spiegare il motivo della differenza tra le due correnti ricorrendo al comportamento fisico del transistor nei due casi.

Le equazioni del modello di Ebers-Moll sono

$$\begin{cases} I_F &= I_{ES} \left(e^{V_{BE}/V_T} - 1 \right) \\ I_R &= I_{CS} \left(e^{V_{BC}/V_T} - 1 \right) \end{cases}$$

³Cambiano ovviamente i valori dei parametri tecnologici, perché il dispositivo non è simmetrico.

Dalla figura 10.9 si ottiene

$$\begin{cases} I_E &= I_F - \alpha_R I_R \\ I_C &= I_R - \alpha_F I_F \end{cases}$$

1) Si consideri il caso di emettitore aperto (fig. 10.10 a): $I_E = 0$

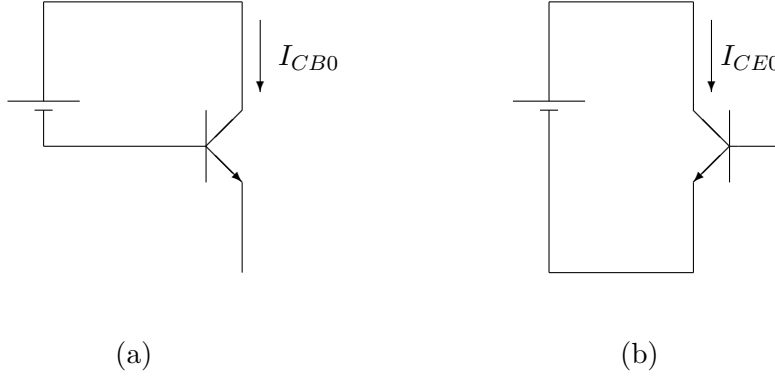


Figura 10.10: Configurazioni circuitali per I_{CBO} e I_{CEO} .

$$I_F = \alpha_R I_R$$

con la giunzione CB polarizzata inversamente: $V_{BC} < 0$

$$I_R = I_{CS} \left(e^{V_{BC}/V_T} - 1 \right) \simeq -I_{CS}$$

quindi

$$I_F = -\alpha_R I_{CS}$$

La corrente di collettore si indica in questo caso con I_{CBO}

$$\begin{aligned} I_C \rightarrow I_{CBO} &= -I_R + \alpha_F I_F = I_{CS} - \alpha_R \alpha_F I_{CS} \\ &= I_{CS} (1 - \alpha_R \alpha_F) \end{aligned}$$

2) Si esamina ora il caso di base aperta (fig. 10.10 b), $I_B = 0$:

$$\begin{aligned} I_B &= -I_E - I_C = (1 - \alpha_F) I_F + (1 - \alpha_R) I_R = 0 \\ I_F &= -\frac{1 - \alpha_R}{1 - \alpha_F} I_R \end{aligned}$$

La corrente di collettore si indica in questo caso con I_{CEO}

$$\begin{aligned} I_C \rightarrow I_{CEO} &= -I_R + \alpha_F I_F = -I_R - \alpha_F \frac{1 - \alpha_R}{1 - \alpha_F} I_R \\ &= -\frac{1 - \alpha_F + \alpha_F - \alpha_F \alpha_R}{1 - \alpha_F} I_R = -\frac{1 - \alpha_F \alpha_R}{1 - \alpha_F} I_R \end{aligned}$$

Dato che $I_R \simeq -I_{CS}$ si ha

$$I_{CEO} = \frac{1 - \alpha_F \alpha_R}{1 - \alpha_F} I_{CS}$$

Il rapporto I_{CEO}/I_{CBO} vale quindi

$$\frac{I_{CEO}}{I_{CBO}} = \frac{1 - \alpha_F \alpha_R}{1 - \alpha_F} I_{CS} \frac{1}{I_{CS} (1 - \alpha_F \alpha_R)} = \frac{1}{1 - \alpha_F}$$

La corrente I_{CBO} è la corrente inversa di saturazione della giunzione BC con l'emettitore aperto, I_{CEO} è la corrente inversa della giunzione BC, ma diretta della giunzione EB, quando la base è aperta. Questa seconda è più elevata poiché le lacune iniettate nella base, solo in parte si ricombinano, e sono spinte verso il collettore, come prevede l'effetto transistor.

10.3.3

Si usino le equazioni del modello di Ebers-Moll per calcolare i parametri α_F , α_R , I_{CS} , I_{ES} nel caso di un transistor n-p-n, sapendo che la corrente che fluisce nel collettore vale:

1. 1 nA quando l'emettitore è aperto,
2. 10 nA quando l'emettitore è in cortocircuito con la base,
3. 100 nA quando la base è aperta.

Si assuma che in tutti e tre i casi indicati la giunzione base collettore sia polarizzata inversamente.

10.3.4

Usando il modello di Ebers-Moll, si ricavi l'espressione della caduta di tensione ai capi di un transistor in saturazione. Si calcoli inoltre $V_{CE\text{sat}}$ per $I_C/I_B = 10$, $\alpha_F = 0,985$ e $\alpha_R = 0,72$.

Le equazioni del modello di Ebers-Moll sono

$$\begin{cases} I_E = \alpha_R I_R - I_F \\ I_C = \alpha_F I_F - I_R \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} I_R = I_{CS} (e^{V_{BC}/V_T} - 1) \\ I_F = I_{ES} (e^{V_{BE}/V_T} - 1) \end{cases}$$

Se entrambe le giunzioni sono polarizzate direttamente si ha

$$\begin{aligned} I_R &\simeq I_{CS} e^{V_{BC}/V_T} ; & I_F &\simeq I_{ES} e^{V_{BE}/V_T} \\ V_{BC} &= V_T \ln \frac{I_R}{I_{CS}} ; & V_{BE} &= V_T \ln \frac{I_F}{I_{ES}} \end{aligned}$$

quindi

$$V_{CE\text{sat}} = V_{BE} - V_{BC} = V_T \ln \left(\frac{I_F}{I_{ES}} \frac{I_{CS}}{I_R} \right)$$

Si devono calcolare i rapporti di corrente I_F/I_R e I_{CS}/I_{ES}

$$\begin{aligned} I_B &= -I_E - I_C = (1 - \alpha_F) I_F + (1 - \alpha_R) I_R \\ I_R &= \alpha_F I_F - I_C \\ I_B &= (1 - \alpha_F) I_F + (1 - \alpha_R) \alpha_F I_F - (1 - \alpha_R) I_C \\ I_F &= \frac{1}{(1 - \alpha_F \alpha_R)} [I_B + (1 - \alpha_R) I_C] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_R &= \alpha_F I_F - I_C \\
 &= \alpha_F \frac{1}{1 - \alpha_F \alpha_R} [I_B + (1 - \alpha_R) I_C] - I_C \\
 &= \frac{\alpha_F}{1 - \alpha_F \alpha_R} I_B + \left(\alpha_F \frac{1 - \alpha_R}{1 - \alpha_F \alpha_R} - 1 \right) I_C \\
 &= \frac{\alpha_F}{1 - \alpha_F \alpha_R} I_B + \frac{\alpha_F - \alpha_F \alpha_R - 1 + \alpha_F \alpha_R}{1 - \alpha_F \alpha_R} I_C \\
 &= \frac{\alpha_F}{1 - \alpha_F \alpha_R} I_B - \frac{1 - \alpha_F}{1 - \alpha_F \alpha_R} I_C
 \end{aligned}$$

Sostituendo si ottiene

$$\begin{aligned}
 \frac{I_F}{I_R} &= \frac{1}{1 - \alpha_F \alpha_R} [I_B + (1 - \alpha_R) I_C] \frac{1 - \alpha_F \alpha_R}{\alpha_F I_B - (1 - \alpha_F) I_C} = \\
 &= \frac{I_B + (1 - \alpha_R) I_C}{\alpha_F I_B - (1 - \alpha_F) I_C} = \frac{1}{\alpha_F} \frac{1 + (1 - \alpha_R) \frac{I_C}{I_B}}{1 - \frac{1 - \alpha_F}{\alpha_F} \frac{I_C}{I_B}} = \\
 &= \frac{\alpha_R \frac{1}{\alpha_R} + \frac{1}{\beta_R} \frac{I_C}{I_B}}{\alpha_F \left(1 - \frac{1}{\beta_F} \frac{I_C}{I_B} \right)} \\
 \frac{I_{CS}}{I_{ES}} &= \frac{\alpha_R I_{CS}}{\alpha_R I_{ES}} = \frac{\alpha_F I_{ES}}{\alpha_R I_{ES}} = \frac{\alpha_F}{\alpha_R}
 \end{aligned}$$

$$V_{CE_{\text{sat}}} = V_T \ln \left(\frac{I_{CS}}{I_{ES}} \frac{I_F}{I_R} \right) = V_T \ln \left[\frac{\frac{1}{\alpha_R} + \frac{1}{\beta_R} \frac{I_C}{I_B}}{1 - \frac{1}{\beta_F} \frac{I_C}{I_B}} \right]$$

$$V_{CE_{\text{sat}}} = 0,048 \text{ V}$$

Il valore della tensione $V_{CE_{\text{sat}}}$ in transistori reali dipende in generale dalle condizioni di polarizzazione, dalla tecnologia di realizzazione del dispositivo e dalla temperatura. Sperimentalmente si trovano valori tipici tra 0,1 e 0,2 V: la differenza rispetto alla $V_{CE_{\text{sat}}}$ calcolata è principalmente dovuta alle cadute di potenziale sulle regioni quasi neutre.

10.3.5

Con riferimento al circuito della figura 10.11, dove $R_B = 330 \text{ k}\Omega$, $R_C = 1 \text{ k}\Omega$ e $V_{CC} = 10 \text{ V}$, si usi il modello di Ebers-Moll per identificare la regione di funzionamento nella quale opera il transistor e se ne calcoli il punto di funzionamento, ovvero i valori di V_{BE} e V_{CE} . Si assuma per il transistor: $\beta_F = 150$, $\beta_R = 5$, $I_{ES} = 1,44 \cdot 10^{-14} \text{ A}$ e $I_{CS} = 1,72 \cdot 10^{-14} \text{ A}$.

Il modello di Ebers-Moll è un modello per grandi segnali, valido in tutte le regioni di funzionamento del transistor; esso è quindi uno strumento assolutamente generale per il calcolo delle condizioni di funzionamento. Le limitazioni principali sono legate all'effetto Early e ai fenomeni di variazione di β , non tenuti in conto nel modello. Il circuito della figura 10.11, sostituendo il transistor con il suo modello, risulta come nella figura 10.12. Le equazioni del modello sono

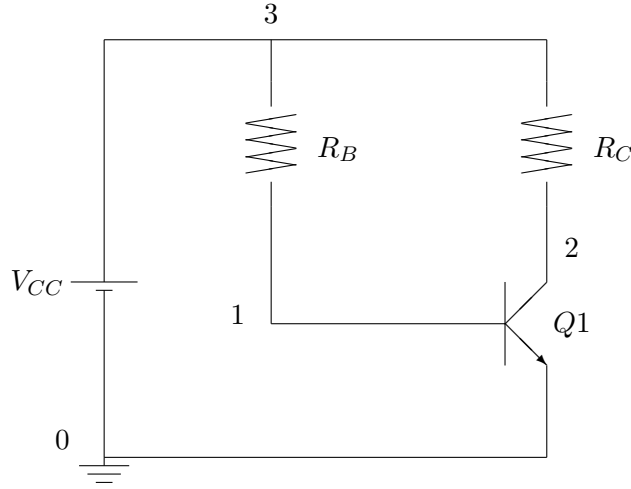


Figura 10.11: Circuito di polarizzazione di un transistor bipolare.

$$I_F = I_{ES}(e^{V_{BE}/V_T} - 1)$$

$$I_R = I_{CS}(e^{V_{BC}/V_T} - 1)$$

Le resistenze R_B e R_C sono percorse dalle correnti di base e di collettore rispettivamente:

$$I_C = \alpha_F I_F - I_R$$

$$I_B = (1 - \alpha_F) I_F + (1 - \alpha_R) I_R$$

Le tensioni base-emettitore e base-collettore sono

$$V_{BE} = V_{CC} - R_B \cdot I_B = V_{CC} - R_B(1 - \alpha_F) I_F - R_B(1 - \alpha_R) I_R$$

$$V_{BC} = V_{CC} - R_B \cdot I_B - (V_{CC} - R_C \cdot I_C) = R_C \cdot I_C - R_B \cdot I_B$$

$$V_{BC} = [\alpha_F(R_C + R_B) - R_B] I_F - [R_C + R_B(1 - \alpha_R)] I_R$$

Noti β_F e β_R , si calcolano i valori di $\alpha_F = 0,993377$ e $\alpha_R = 0,833333$; le due tensioni incognite si possono allora esprimere come

$$V_{BE} = k_0 + k_1 \cdot I_F(V_{BE}) + k_2 \cdot I_R(V_{BC})$$

$$V_{BC} = k_3 \cdot I_F(V_{BE}) + k_4 \cdot I_R(V_{BC})$$

dove i coefficienti k_i hanno i seguenti valori:

$$k_0 = V_{CC} = 10 \text{ V}$$

$$k_1 = -R_B(1 - \alpha_F) = -2185 \text{ } \Omega$$

$$k_2 = -R_B(1 - \alpha_R) = -55000 \text{ } \Omega$$

$$k_3 = \alpha_F(R_C + R_B) - R_B = -1192 \text{ } \Omega$$

$$k_4 = R_C + R_B(1 - \alpha_R) = -56000 \text{ } \Omega$$

I valori di V_{BE} e V_{BC} si ottengono risolvendo un sistema non lineare di due equazioni; come indicato in appendice, il metodo di soluzione più semplice per sistemi non lineari è quello di Newton-Raphson, che richiede il calcolo, a ogni iterazione k , della matrice Jacobiana, \underline{J}_k , e del vettore dei termini noti, \underline{F}_k :

$$\underline{J}_k(V_{BE}, V_{BC}) = \begin{vmatrix} k_1 \cdot I_{ES} \frac{1}{V_T} e^{V_{BE}/V_T} - 1 & k_2 \cdot I_{CS} \frac{1}{V_T} e^{V_{BC}/V_T} \\ k_3 \cdot I_{ES} \frac{1}{V_T} e^{V_{BE}/V_T} & k_4 \cdot I_{CS} \frac{1}{V_T} e^{V_{BC}/V_T} - 1 \end{vmatrix}$$

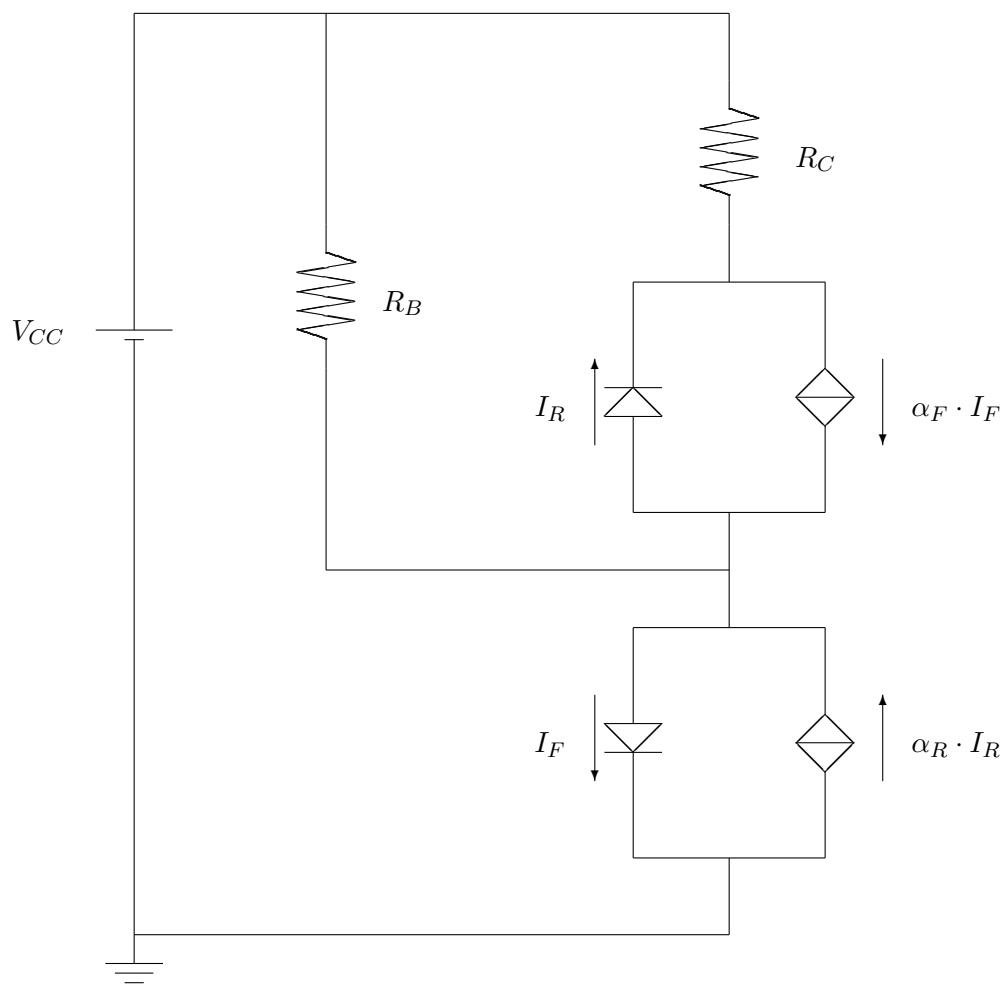


Figura 10.12: Sostituzione del transistor con il modello di Ebers-Moll.

$$\underline{F_k(V_{BE}, V_{BC})} = \begin{vmatrix} k_0 + k_1 \cdot I_{ES}(e^{V_{BE}/V_T} - 1) + k_2 \cdot I_{CS}(e^{V_{BC}/V_T} - 1) - V_{BE} \\ k_3 \cdot I_{ES}(e^{V_{BE}/V_T} - 1) + k_4 \cdot I_{CS}(e^{V_{BC}/V_T} - 1) - V_{BC} \end{vmatrix}$$

Posto

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} V_{BE} \\ V_{BC} \end{pmatrix}$$

la soluzione si trova risolvendo iterativamente l'equazione matriciale

$$\underline{J_k} \cdot \underline{X_{k+1}} = -\underline{F_k} + \underline{J_k} \cdot \underline{X_k}$$

Nel caso presente, in 25 iterazioni, si ottiene la soluzione

$$\begin{aligned} V_{BE} &= 0,6867 \text{ V} \\ V_{BC} &= -5,08 \text{ V} \end{aligned}$$

Il transistor opera quindi in regione attiva diretta. Le correnti si ottengono facilmente dalle tensioni:

$$I_B = \frac{V_{CC} - V_{BE}}{R_B} = 28,2 \mu\text{A}$$

$$I_C = \frac{V_{CC} - V_{CE}}{R_C} = 5,6 \text{ mA}$$

10.3.6

Per il circuito del problema 10.3.5, determinare il punto di funzionamento a riposo (calcolare I_B , I_C e V_{CE}), adottando il modello semplificato del transistor n-p-n rappresentato nella figura 10.13⁴.

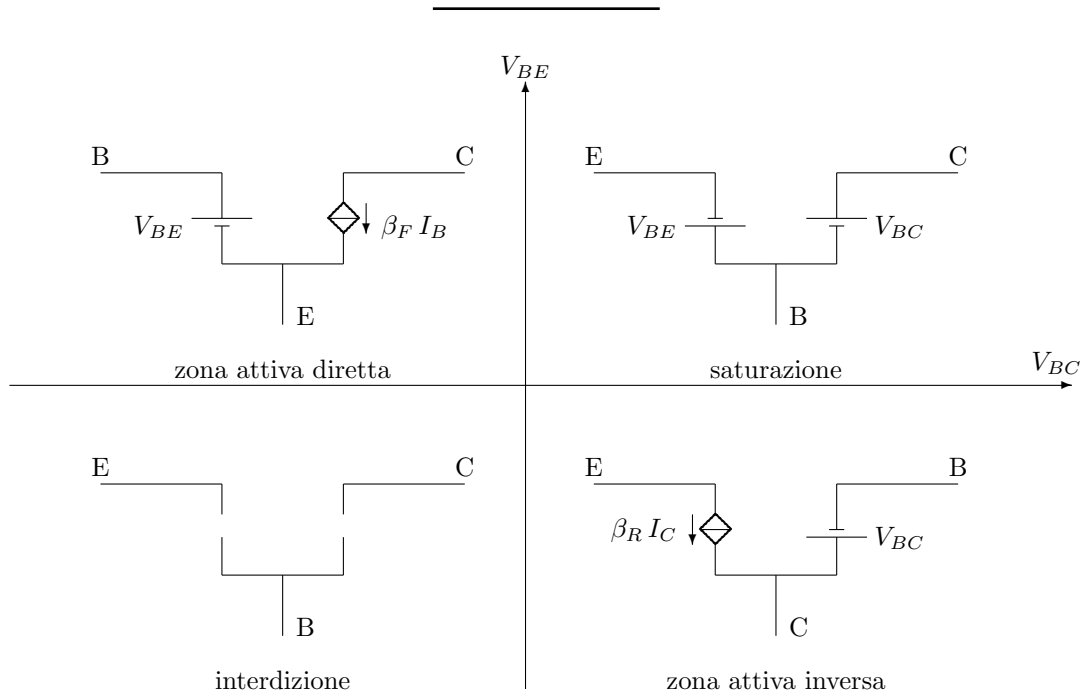


Figura 10.13: Modello semplificato del transistor n-p-n.

Si ipotizza che il dispositivo si trovi in zona attiva diretta, si sceglie il corrispondente modello equivalente dalla figura 10.13 (con $V_{BE} = 0,6 \text{ V}$ e $\beta_F = 150$) e lo si sostituisce nel circuito, ottenendo la situazione della figura 10.14. Per le correnti, si ha

$$I_B = \frac{V_{CC} - V_{BE}}{R_B} = 28,5 \mu\text{A}$$

$$I_C = \beta_F I_B = 4,3 \text{ mA}$$

Per la tensione base-collettore, si trova

$$V_{BC} = V_{BE} - V_{CE} = V_{BE} - V_{CC} + R_C \beta_F I_B = -5,1 \text{ V}$$

Come si vede dai risultati, il modello semplificato fornisce rapidamente valori molto prossimi a quelli ottenuti mediante il modello di Ebers-Moll nel problema 10.3.5. Il

⁴Data la complessità del modello di Ebers-Moll, si usa calcolare il punto di funzionamento a riposo mediante modelli per largo segnale semplificati, come quello della figura 10.13.

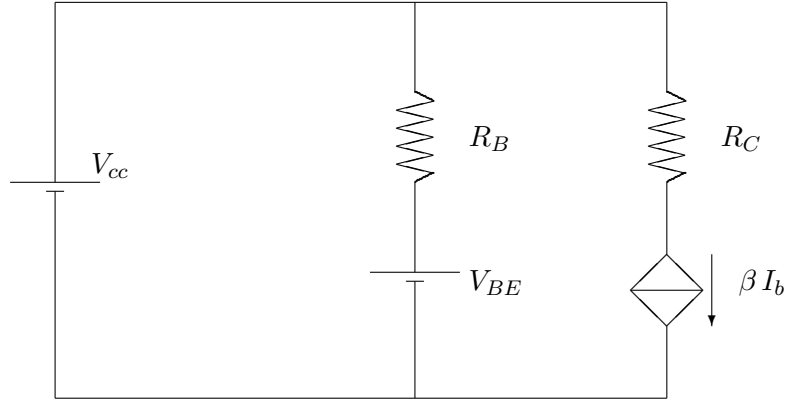


Figura 10.14: Circuito per il calcolo della polarizzazione.

segno della tensione V_{BE} ottenuta è coerente con l'ipotesi fatta inizialmente di transistor polarizzato in zona attiva diretta; se fosse risultato $V_{BC} > 0$, sarebbe stato necessario verificare i casi di saturazione e polarizzazione in zona attiva inversa.

10.4 Modello per piccolo segnale

Il transistor è un dispositivo a tre morsetti, caratterizzato da tre tensioni e tre correnti: I_B , I_E , I_C e V_B , V_E , V_C . Assumendo come riferimento per le tensioni uno dei tre morsetti (per esempio l'emettitore), il transistor si può considerare un dispositivo a due porte; inoltre applicando le leggi di Kirchhoff⁵, il comportamento del dispositivo si può caratterizzare con due tensioni e due correnti, ad esempio I_B , I_C e V_{BE} , V_{CE} . Se due di queste quattro grandezze si assumono come variabili indipendenti, le altre si possono esprimere in funzione delle precedenti, ad esempio nel modello di Ebers-Moll si sono assunte come variabili indipendenti le due tensioni.

Usando come grandezze indipendenti la corrente di ingresso e la tensione sulla porta d'uscita, si può scrivere invece (come porta di riferimento si sceglie l'emettitore)

$$\begin{aligned} I_C &= f(I_B, V_{CE}) \\ V_{BE} &= g(I_B, V_{CE}) \end{aligned}$$

Con le scelte fatte, tra collettore e emettitore si ha la porta di uscita mentre la giunzione base-emettitore costituisce la porta di ingresso. Il legame espresso dalle funzioni f e g è di tipo non lineare e in generale molto complesso.

Punto di funzionamento a riposo

È possibile fissare il punto di funzionamento "a riposo" del transistor (problema 10.3.5), applicando al dispositivo con opportuni generatori costanti e resistenze le due variabili indipendenti I_B e V_{CE} . Il punto di riposo è costituito dai valori delle tensioni e delle correnti ai morsetti di base e di collettore quando il transistor è soggetto a soli generatori costanti (I_{C0} , I_{B0} , V_{BE0} e V_{CE0}).

$$\begin{aligned} I_{C0} &= f(I_{B0}, V_{CE0}) \\ V_{BE0} &= g(I_{B0}, V_{CE0}) \end{aligned}$$

L'operazione con cui si fissa il punto di funzionamento è detta *polarizzazione*.

⁵La somma di tutte le correnti entranti in un nodo è nulla, la somma di tutte le tensioni che cadono sui rami di una maglia è pari a zero.

Generatore di segnale

Se si applica un segnale all'ingresso del dispositivo polarizzato la variazione della tensione in ingresso al doppio bipolo si rappresenta sovrapponendo al generatore di tensione continua un generatore di segnale.

Nel caso in cui le variazioni delle tensioni e delle correnti dovute al generatore di segnale siano piccole rispetto ai valori del punto di funzionamento, è possibile semplificare il legame funzionale espresso dalle f e g : infatti se si sviluppano in serie di Taylor f e g nell'intorno del punto di funzionamento ($P_0 = [I_B = I_{B0}, V_{BE} = V_{BE0}]$) e si arrestano gli sviluppi al termine di primo grado, si hanno due relazioni lineari

$$\begin{aligned} I_C &= I_{C0} + \left. \frac{\partial f}{\partial I_B} \right|_{P_0} (I_B - I_{B0}) + \left. \frac{\partial f}{\partial V_{CE}} \right|_{P_0} (V_{CE} - V_{CE0}) \\ V_{BE} &= V_{BE0} + \left. \frac{\partial g}{\partial I_B} \right|_{P_0} (I_B - I_{B0}) + \left. \frac{\partial g}{\partial V_{CE}} \right|_{P_0} (V_{CE} - V_{CE0}) \end{aligned}$$

che permettono di studiare adeguatamente il dispositivo dal punto di vista del comportamento delle sole variazioni. I modelli ottenuti per questa via prendono il nome di modelli per piccolo segnale.

A seguito di questa linearizzazione i valori istantanei delle quattro grandezze che caratterizzano il transistor si possono esprimere, applicando il principio di sovrapposizione, ciascuno come somma di un termine costante, rilevato dal punto di funzionamento, e di un termine di variazione, legato alla presenza del generatore di segnale.

$$\begin{aligned} I_C &= I_{C0} + i_C \\ I_B &= I_{B0} + i_B \\ V_{BE} &= V_{BE0} + v_{BE} \\ V_{CE} &= V_{CE0} + v_{CE} \end{aligned}$$

Le relazioni precedenti diventano allora

$$I_C - I_{C0} = i_C = \left. \frac{\partial f}{\partial I_B} \right|_{P_0} i_B + \left. \frac{\partial f}{\partial V_{CE}} \right|_{P_0} v_{CE} \quad (10.7)$$

$$V_{BE} - V_{BE0} = v_{BE} = \left. \frac{\partial g}{\partial I_B} \right|_{P_0} i_B + \left. \frac{\partial g}{\partial V_{CE}} \right|_{P_0} v_{CE} \quad (10.8)$$

I coefficienti delle combinazioni lineari tra le grandezze elettriche relative al segnale sono i parametri differenziali del modello di piccolo segnale del dispositivo.

10.4.1

Lo studio dei transistori bipolari polarizzati in zona attiva quali dispositivi in grado di elaborare un segnale elettrico si avvale solitamente di un modello semplificato del dispositivo, in grado di riprodurre il comportamento in condizioni di piccolo segnale, ovvero in presenza di piccole variazioni delle tensioni e correnti intorno ai valori di polarizzazione. Tale modello, detto modello per piccolo segnale, si può ottenere linearizzando le equazioni di Ebers Moll. Nella figura 10.15 è riprodotto il "modello a parametri h " del transistor bipolare: definire analiticamente i quattro parametri del modello, fornirne i legami con le grandezze caratteristiche del transistor e discuterne il significato fisico.

Dall'esame del circuito equivalente della figura 10.15 si possono scrivere, applicando le leggi di Kirchhoff, le relazioni

$$\begin{aligned} i_C &= h_{fe} i_B + h_{oe} v_{CE} \\ v_{BE} &= h_{ie} i_B + h_{re} v_{CE} \end{aligned}$$

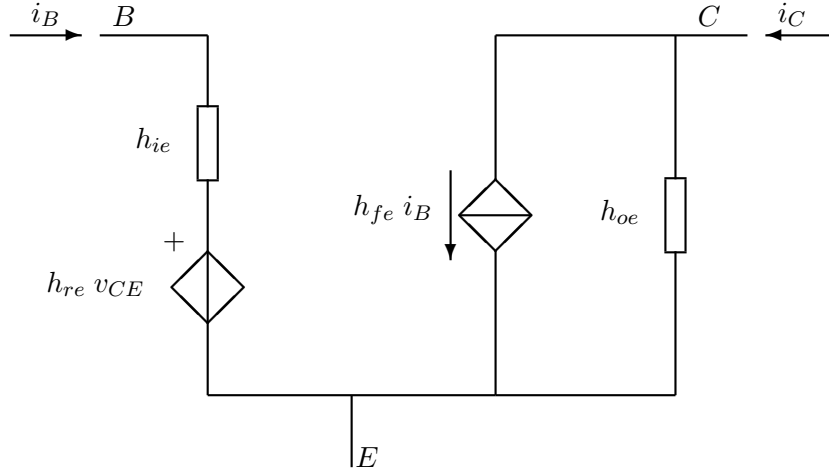


Figura 10.15: Modello a parametri h del bipolare.

Per confronto con le (10.7) si hanno le definizioni dei parametri h del modello. Per tali parametri, si cerca di individuare espressioni che ne consentano una semplice determinazione. Si parte dalle equazioni di Ebers-Moll. Le correnti di un transistor n-p-n si possono scrivere come

$$\begin{aligned} I_E &= a_{11} \left(e^{V_{BE}/V_T} - 1 \right) + a_{12} \left(e^{V_{BC}/V_T} - 1 \right) \\ -I_C &= a_{21} \left(e^{V_{BE}/V_T} - 1 \right) + a_{22} \left(e^{V_{BC}/V_T} - 1 \right) \end{aligned}$$

dove i coefficienti a_{11} , a_{12} , a_{21} e a_{22} sono stati introdotti nel problema 10.3.1:

$$\begin{aligned} a_{11} &\simeq q A \left(\frac{D_{nB} n_{B0}}{w_B} + \frac{D_{pE} p_{E0}}{L_{pE}} \right) \\ a_{22} &\simeq q A \left(\frac{D_{nB} n_{B0}}{w_B} + \frac{D_{pC} p_{C0}}{L_{pC}} \right) \\ a_{12} = a_{21} &\simeq -q A \frac{D_{nB} n_{B0}}{w_B} \end{aligned}$$

In zona attiva, le equazioni per I_E e I_C si riducono a

$$\begin{aligned} I_E &\simeq a_{11} e^{V_{BE}/V_T} \\ -I_C &\simeq a_{21} e^{V_{BE}/V_T} \end{aligned}$$

mentre per la corrente di base si ha

$$I_B \simeq (a_{11} + a_{21}) e^{V_{BE}/V_T}$$

In prima approssimazione la corrente di uscita dipende solo dalla corrente di base

$$i_C \simeq h_{fe} i_B$$

e si può determinare, sulle caratteristiche di uscita come variazione della corrente di collettore i_C intorno al punto (V_{CE0}, I_{C0}) per una variazione della corrente di base (parametro delle curve); h_{fe} esprime sostanzialmente la dipendenza di I_C dalla corrente

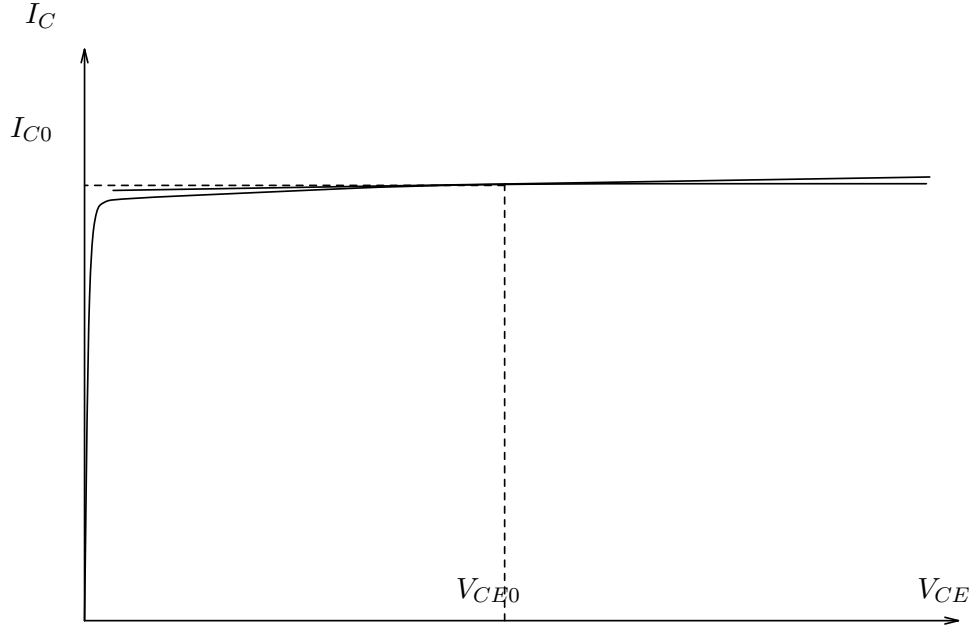


Figura 10.16: Caratteristica di uscita a emettitore comune.

di base, e si calcola come⁶

$$\begin{aligned} h_{fe} &= \left. \frac{\partial I_C}{\partial I_B} \right|_{V_{CE0}} = \left. \frac{\partial I_C}{\partial V_{BE}} \right|_{V_{CE0}} \cdot \left. \frac{\partial V_{BE}}{\partial I_B} \right|_{V_{CE0}} = \\ &= -\frac{a_{21}}{V_T} \cdot \frac{V_T}{a_{11} + a_{21}} = -\frac{a_{21}}{a_{11} + a_{21}} \end{aligned}$$

Nel modello per piccolo segnale si tiene conto di tale dipendenza mediante il generatore di corrente pilotato da i_B con amplificazione h_{fe} . In realtà, a causa dell'effetto Early, la corrente di collettore dipende anche dalla tensione di collettore; pertanto in un modello linearizzato più preciso, i_C deve comprendere un secondo termine $h_{oe}v_{CE}$ proporzionale a v_{CE} . Sulla caratteristica di uscita (fig. 10.16), h_{oe} è la variazione, a parità di curva (cioè di I_B), di I_C con V_{CE} , cioè la pendenza della caratteristica nel punto di riposo. Il parametro h_{oe} si calcola come

$$h_{oe} = \left. \frac{\partial I_C}{\partial V_{CE}} \right|_{I_{B0}} \simeq \left. \frac{\partial I_C}{\partial V_{CB}} \right|_{I_{B0}}$$

La dipendenza di I_C da V_{CB} si può esplicitare passando attraverso la larghezza w_B della base, come indicato nel problema 10.2.5; nell'ipotesi di drogaggio uniforme, si ha

$$h_{oe} = \left. \frac{\partial I_C}{\partial w_B} \right|_{I_{B0}} \cdot \left. \frac{\partial w_B}{\partial V_{CB}} \right|_{I_{B0}} = \left(-q A \frac{D_{nB} n_{B0}}{w_B^2} e^{V_{BE}/V_T} \right) \cdot \left(-\frac{w_B}{V_A} \right) = \frac{I_C}{V_A}$$

dove V_A è la tensione di Early. Poiché il parametro h_{oe} è il coefficiente di proporzionalità fra una corrente e la caduta di tensione attraversata, nella figura 10.15 esso corrisponde a una conduttanza.

Sulla caratteristica di ingresso (fig. 10.17), linearizzando intorno al punto di funzionamento a riposo la variazione di V_{BE} con la corrente di base, si ha

⁶Se si disegna il legame $I_C = I_C(I_B)$ a parità di V_{CE} nella regione attiva si vede che esso è approssimativamente rettilineo; pertanto una valutazione approssimata di h_{fe} si ha con la relazione $h_{fe} \simeq \frac{I_C}{I_B} = h_{FE} = \beta$.

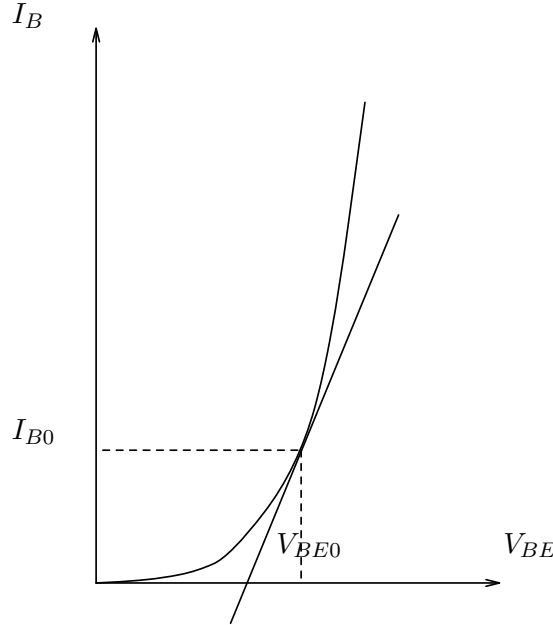


Figura 10.17: Caratteristica di ingresso a emettitore comune.

$$v_{BE} = h_{ie} i_B$$

e il parametro h_{ie} è semplicemente la resistenza differenziale della giunzione base-emettitore, calcolabile come

$$h_{ie} = \left. \frac{\partial V_{BE}}{\partial I_B} \right|_{V_{CE0}} = \frac{V_T}{I_B}$$

Il modello completo tiene conto anche dell'effetto Early sulla caratteristica di ingresso, ovvero della dipendenza di V_{BE} dalla tensione di collettore; per il modello lineare, si ha un termine $h_{re}v_{CE}$. Il parametro h_{re} si può ottenere imponendo $i_B = 0$, ovvero I_B costante, e studiando la dipendenza di I_C da V_{CE} :

$$h_{re} = \left. \frac{\partial V_{BE}}{\partial V_{CE}} \right|_{I_{B0}} = \left. \frac{\partial V_{BE}}{\partial I_C} \right|_{I_{B0}} \cdot \left. \frac{\partial I_C}{\partial V_{CE}} \right|_{I_{B0}} = \frac{V_T}{I_C} \cdot \frac{I_C}{V_A} = \frac{V_T}{V_A}$$

Al crescere della tensione di collettore, la larghezza della base si riduce e quindi diminuisce la corrente di ricombinazione, che è uno dei contributi alla I_B . Poiché la corrente di base è costante, deve aumentare la tensione di base e questo fenomeno è riprodotto mediante un generatore di tensione, pilotato da v_{CE} , in serie nel circuito di ingresso.

10.4.2

A partire dal modello di Ebers-Moll in regione attiva, si ricavi il modello per piccolo segnale a bassa frequenza (detto modello ibrido a π) illustrato nella figura 10.18. Si tenga conto che valori tipici dei quattro parametri sono: $g_m = 50 \text{ mA/V}$, $r_\pi = 20 \text{ M}\Omega$, $r_0 = 1/g_0 = 200 \text{ k}\Omega$ e $r_\mu = 1/g_\mu = 20 \text{ M}\Omega$.

Si indicano, come nel problema 10.4.1, le componenti continue di tensioni e correnti con il pedice 0 e le variazioni con lettere minuscole: i valori istantanei si possono allora

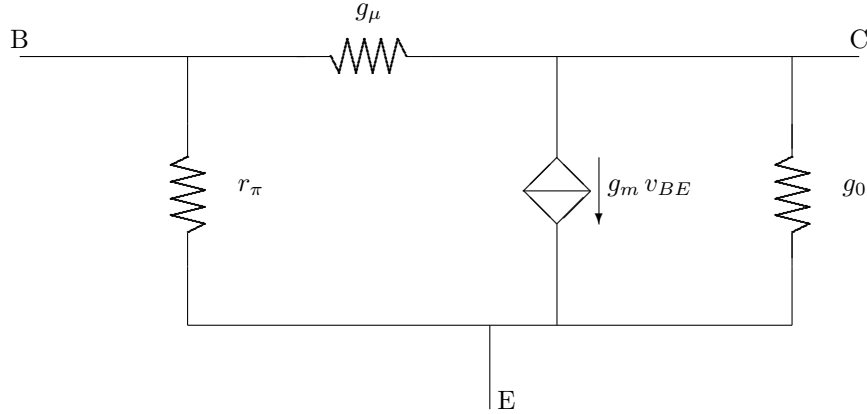


Figura 10.18: Modello ibrido a π del transistor bipolare.

scrivere come

$$\begin{aligned} I_C &= I_{C0} + i_C \\ I_B &= I_{B0} + i_B \\ V_{BE} &= V_{BE0} + v_{BE} \\ V_{CE} &= V_{CE0} + v_{CE} \end{aligned}$$

Dal modello di Ebers-Moll in zona attiva diretta (per un transistor n-p-n) si ha

$$\begin{aligned} I_E &= I_F e^{V_{BE}/V_T} \\ I_C &= \alpha_F I_F e^{V_{BE}/V_T} \\ I_B &= (1 - \alpha_F) I_F e^{V_{BE}/V_T} \end{aligned}$$

dove, indicando con w_B la larghezza della base, vale

$$I_F = q A \left(\frac{D_E n_i^2}{L_E N_E} + \frac{D_B n_i^2}{w_B N_B} \right)$$

Si scelgono le correnti di base e collettore come grandezze dipendenti e le tensioni V_{BE} e V_{CE} come grandezze indipendenti; il funzionamento del transistor è quindi descritto dalle

$$\begin{aligned} I_C &= f_1(V_{BE}, V_{CE}) \\ I_B &= f_2(V_{BE}, V_{CE}) \end{aligned}$$

Se le variazioni delle tensioni base-emettitore e collettore-emettitore sono abbastanza piccole, le correnti si possono esprimere mediante sviluppo in serie di Taylor delle funzioni f_1 e f_2 , troncato al termine di grado uno

$$\begin{aligned} I_C &= f_1(V_{BE0}, V_{CE0}) + \left. \frac{\partial f_1}{\partial V_{BE}} \right|_{V_{CE0}} \cdot v_{BE} + \left. \frac{\partial f_1}{\partial V_{CE}} \right|_{V_{BE0}} \cdot v_{CE} \\ I_B &= f_2(V_{BE0}, V_{CE0}) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial V_{BE}} \right|_{V_{CE0}} \cdot v_{BE} + \left. \frac{\partial f_2}{\partial V_{CE}} \right|_{V_{BE0}} \cdot v_{CE} \end{aligned}$$

Si considera prima il modello semplificato illustrato nella figura 10.19, che, come si vedrà, non tiene conto dell'effetto Early. La variazione della corrente di collettore si

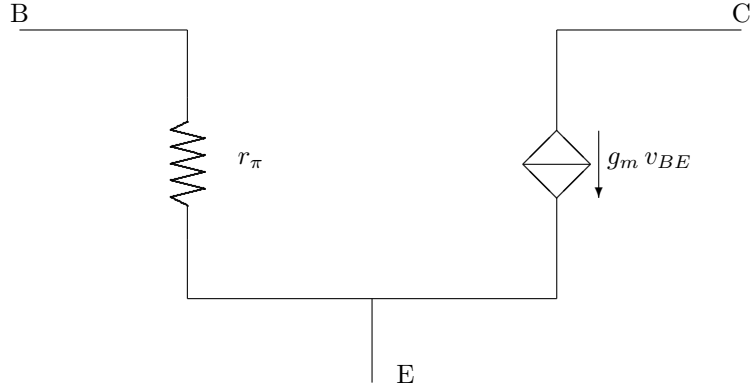


Figura 10.19: Modello ibrido a π semplificato.

può esprimere come

$$i_C = \left. \frac{\partial f_1}{\partial V_{BE}} \right|_{v_{CE}=0} \cdot v_{BE} + \left. \frac{\partial f_1}{\partial V_{CE}} \right|_{v_{BE}=0} \cdot v_{CE}$$

Derivando la corrente di collettore e calcolandone il valore nel punto di riposo V_{BE0} e V_{CE0} , si ha

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial I_C}{\partial V_{BE}} \right|_{v_{CE}=0} &= \alpha_F I_F \frac{1}{V_T} e^{V_{BE0}/V_T} = \frac{I_{C0}}{V_T} \\ \left. \frac{\partial I_C}{\partial V_{CE}} \right|_{v_{BE}=0} &= 0 \end{aligned}$$

Analogamente, per la corrente di base, si può scrivere

$$i_B = \left. \frac{\partial f_2}{\partial V_{BE}} \right|_{v_{CE}=0} \cdot v_{BE} + \left. \frac{\partial f_2}{\partial V_{CE}} \right|_{v_{BE}=0} \cdot v_{CE}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial I_B}{\partial V_{BE}} \right|_{v_{CE}=0} &= (1 - \alpha_F) I_F \frac{1}{V_T} e^{V_{BE0}/V_T} = (1 - \alpha_F) \frac{I_{E0}}{V_T} = \frac{I_{C0}}{V_T \beta_F} \\ \left. \frac{\partial I_B}{\partial V_{CE}} \right|_{v_{BE}=0} &= 0 \end{aligned}$$

In conclusione le espressioni si riducono a

$$\begin{aligned} i_C &\simeq g_m v_{BE} \\ i_B &\simeq g_\pi v_{BE} \end{aligned}$$

I due parametri del modello semplificato si ottengono a partire dal punto di funzionamento del transistor come

$$g_m = \frac{I_{C0}}{V_T} \quad r_\pi = \frac{\beta_F}{g_m}$$

Per ottenere il modello completo, occorre tenere in conto l'effetto Early e quindi considerare la larghezza della base w_B come funzione della tensione di collettore. In questo caso, la derivata di I_C rispetto a V_{CE} non è più nulla

$$\left. \frac{\partial I_C}{\partial V_{CE}} \right|_{v_{BE}=0} = \left. \frac{\partial I_C}{\partial V_{CB}} \right|_{v_{BE}=0} = \alpha_F e^{V_{BE0}/V_T} \frac{\partial I_F}{\partial V_{CB}} = \alpha_F e^{V_{BE0}/V_T} q A \frac{D_B n_i^2}{N_B w_B^2} \frac{\partial w_B}{\partial V_{CB}}$$

Dalla (10.4) si ha

$$\frac{\partial w_B}{\partial V_{CB}} = \frac{w_B}{V_A}$$

dove V_A è la tensione di Early. Sostituendo e considerando che $N_E \gg N_B$, si ottiene

$$\left. \frac{\partial I_C}{\partial V_{CE}} \right|_{v_{BE}=0} = \alpha_F e^{V_{BE0}/V_T} q A \frac{D_B n_i^2}{N_B w_B^2} \frac{w_B}{V_A} = \frac{I_C}{V_A}$$

Per la corrente di base si segue un procedimento analogo

$$\left. \frac{\partial I_B}{\partial V_{CE}} \right|_{v_{BE}=0} = (1 - \alpha_F) e^{V_{BE0}/V_T} \frac{\partial I_F}{\partial V_{CB}} = \frac{I_{B0}}{V_A}$$

Si indicano le due derivate come

$$g_0 = \left. \frac{\partial I_C}{\partial V_{CE}} \right|_{v_{BE}=0} \quad g_\mu = \left. \frac{\partial I_B}{\partial V_{CE}} \right|_{v_{BE}=0}$$

e si completa il modello della figura 10.19 con due componenti: una conduttanza g_m tra collettore e emettitore, un generatore di corrente pilotato tra base ed emettitore (fig. 10.20 a).

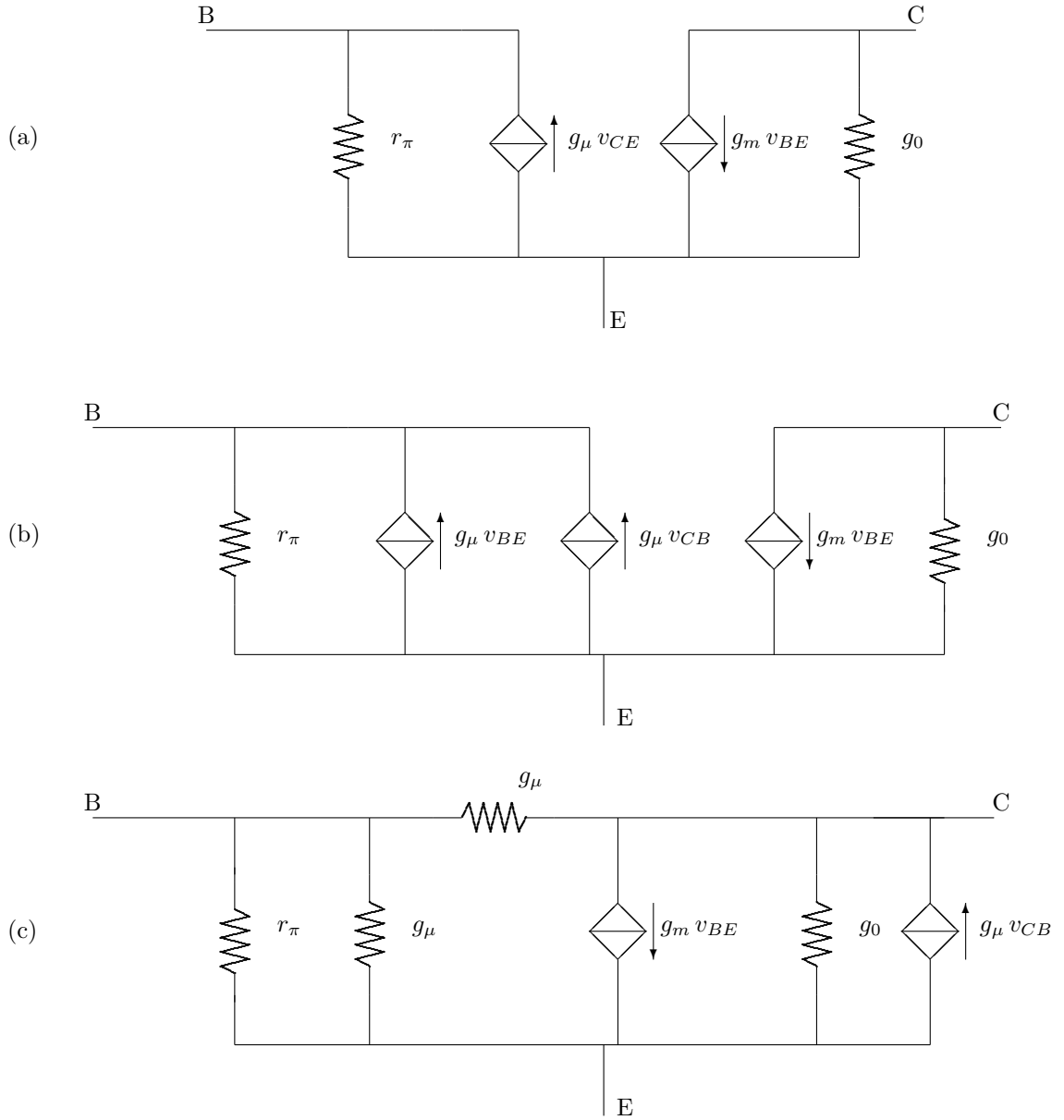


Figura 10.20: Costruzione del modello ibrido a π .

Il generatore pilotato $g_\mu v_{CE}$ tra base ed emettitore può essere sdoppiato in due generatori paralleli, $g_\mu v_{BE}$ e $g_\mu v_{CB}$; quest'ultimo viene a sua volta rimpiazzato con due generatori identici, $g_\mu v_{CB}$, posti tra i morsetti B e C il primo, C ed E il secondo (fig. 10.20 b). Infine, il generatore tra base e collettore, pilotato dalla tensione v_{CB} , si sostituisce con la conduttanza g_μ , ottenendo il modello della figura 10.20 c.

Il modello ottenuto è equivalente al modello ibrido della figura 10.18, se si considerano i valori tipici dei parametri dati: infatti, poiché $g_m \gg g_\mu$, il generatore $g_\mu v_{CB}$ può essere trascurato, mentre la conduttanza g_μ in parallelo alla resistenza r_π non è numericamente significativa⁷.

⁷In realtà, il modello della figura 10.18 dovrebbe essere completato con una resistenza di base, del valore tipico di 100Ω , posta in serie con il morsetto B e utile per modellizzare la caduta di tensione sul contatto di base e sul volume di semiconduttore.

10.4.3

Con riferimento al circuito della figura 10.21, calcolare il punto di funzionamento a riposo del transistor. Inoltre, usando i risultati del problema 10.4.1, calcolare i valori dei parametri del modello per piccolo segnale. I valori dei componenti sono: $R_C = 5\text{k}\Omega$,

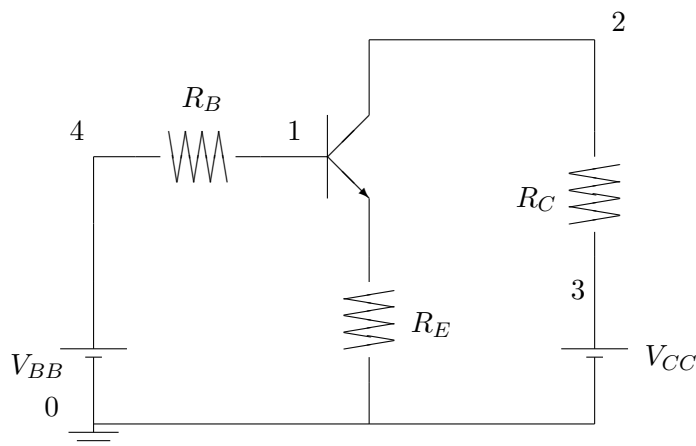


Figura 10.21: Circuito di polarizzazione del BJT.

$R_B = 6\text{k}\Omega$, $R_E = 1\text{k}\Omega$; V_{CC} e V_{BB} sono batterie da 10 V e 1,5 V rispettivamente, il transistor ha un guadagno di corrente $\beta = 160$ e una tensione di Early $V_A = 74\text{ V}$.

Il punto di funzionamento si può trovare per via analitica:

$$\begin{aligned} V_{BB} &= R_B \cdot I_B + V_{BE} + R_E(1 + \beta)I_B \\ 1,5 &= 6000 \cdot I_B + 0,7 + 160 \times 1000 \cdot I_B \end{aligned}$$

da cui $I_B = 4,8\text{ }\mu\text{A}$ e $I_C = \beta \cdot I_B = 771\text{ }\mu\text{A}$. Per la tensione collettore-emettitore, si ha

$$\begin{aligned} V_{CE} &= V_{CC} - R_C \cdot I_C - R_E(1 + \beta)I_B \\ V_{CE} &= 10 - 5000 \times 771 \cdot 10^{-6} - 1000 \times 161 \times 5,3 \cdot 10^{-6} = 5,29\text{ V} \end{aligned}$$

I valori dei parametri del modello sono

$$\begin{aligned} h_{fe} &= \frac{I_C}{I_B} = 160 \\ h_{ie} &= \frac{V_T}{I_B} = 5,4\text{ k}\Omega \\ h_{oe} &= \frac{I_C}{V_A} = 1,04 \cdot 10^{-5}\text{ AV}^{-1} \\ h_{re} &= \frac{V_T}{V_A} = 3,5 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

10.5 Simulazione e modelli del transistor bipolare in PSPICE

Il modello statico usato da SPICE è derivato da quello di Ebers-Moll attraverso tre passaggi fondamentali:

- una trasformazione del circuito equivalente, avente lo scopo di ridurre il costo di simulazione,

- l'introduzione nel modello dell'effetto Early, non incluso nelle equazioni di Ebers-Moll,
- l'introduzione delle resistenze di collettore, base e emettitore.

I principali parametri del modello statico sono:

Is	Corrente di saturazione
Bf	Guadagno di corrente diretto
Br	Guadagno di corrente inverso
VAf	Tensione di Early (diretta)
Rc	Resistenza di collettore
Re	Resistenza di emettitore
Rb	Resistenza di base a polarizzazione nulla

Il modello dinamico si ottiene includendo l'effetto delle capacità localizzate alle giunzioni base-emettitore e base-collettore; tali capacità comprendono un contributo dovuto alle impurità ionizzate (capacità di transizione) e uno dovuto all'iniezione di portatori (capacità di diffusione) e sono descritte dalle medesime equazioni usate per la capacità di una giunzione pn. I più importanti parametri del modello dinamico sono:

Tf	Tempo di transito ideale diretto
Tr	Tempo di transito ideale inverso
Cje	Capacità di giunzione emettitore-base a polarizzazione nulla
Cjc	Capacità di giunzione collettore-base a polarizzazione nulla
Cjs	Capacità di giunzione di substrato a polarizzazione nulla

10.5.1

Si vuole simulare il comportamento di un transistor bipolare con il programma PSPICE e in particolare verificare che il modello utilizzato normalmente da PSPICE per la simulazione sia quello di Ebers-Moll.

Allo scopo si confrontano le caratteristiche di uscita nella configurazione a emettitore comune di un circuito con la topologia della figura 10.22, dove T1 è costituito da una rete che riproduce il modello di Ebers-Moll e T2 rappresenta semplicemente il modello PSPICE del transistor bipolare. I parametri caratteristici del transistor sono: $I_s = 10^{-14}$ A, $\beta_f = 100$ e $\beta_r = 1$.

Di seguito è riportato l'insieme dei comandi per la simulazione del circuito della figura 10.22. Le caratteristiche del transistor e dei diodi sono specificate nelle schede **.MODEL**; nell'analisi in continua, la tensione V1 varia da 0 a 2 V con passo 0,1 V, mentre il campo di variazione di V2 è 0 ÷ 10 V con passo 0,5 V. Per le resistenze R si sceglie il valore $R = 1$ k Ω .

```
* MODELLI DEI DISPOSITIVI *
.MODEL D1 D (Is=1.010e-14 )
.MODEL D2 D (Is=2.0e-14)
.MODEL T0 npn (Is=1e-14 )
* INGRESSI *
Vin 1 0 1
Vce C0 0 1
* GENERATORI DI TEST E RESISTENZE DI POLARIZZAZIONE*
Ri1 1 B01 1k
Vtb1 B01 B1 0
Vtc1 C0 C1 0
Vte1 0 E1 0
Ri2 1 B02 1k
```

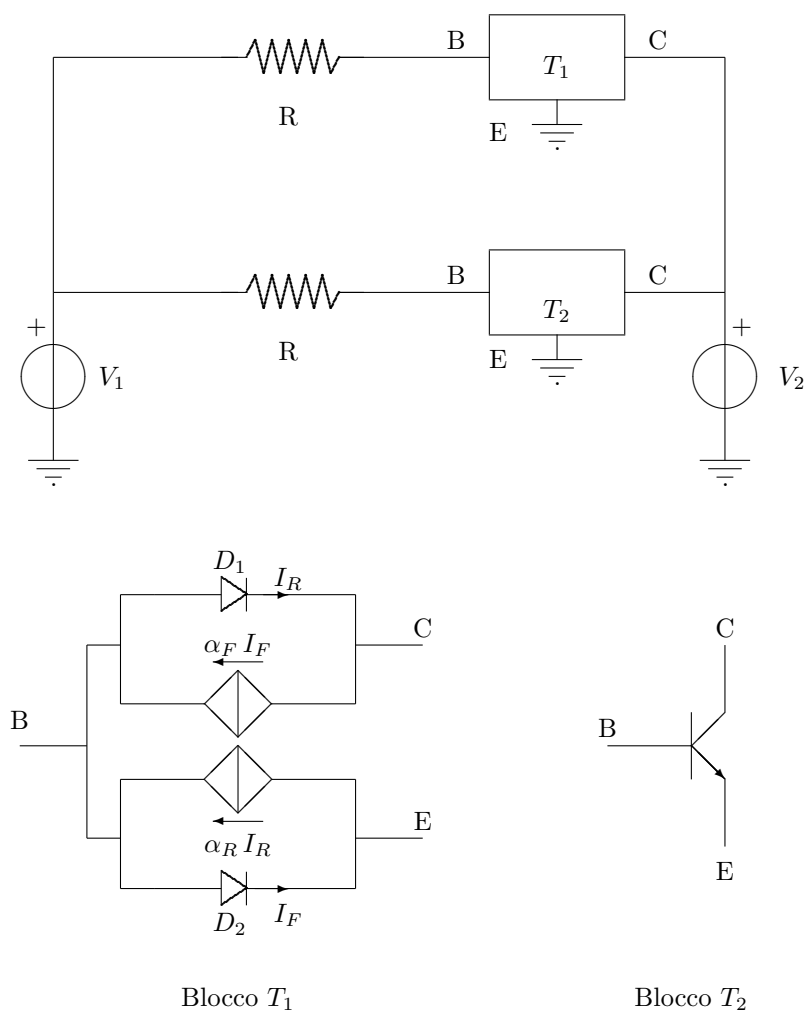


Figura 10.22: Configurazione per la simulazione di un transistor bipolare.

```
Vtb2 B02 B2 0
Vtc2 C0 C2 0
Vte2 0 E2 0
* MODELLO CIRCUITALE *
Dbc B1 Ci D2
Vtestbc Ci C1 0
Dbe B1 Ei D1
Vtestbe Ei E1 0
F1 C1 B1 Vtestbe .990099
F2 E1 B1 Vtestbc .50
* MODELLO INTERNO *
Q1 C2 B2 E2 T0
* ANALISI *
.DC Vce 0 10 .5 Vin 0 2 .1
.PROBE
```

Effettuata l'analisi, con il programma *PROBE*, si ottengono due famiglie di curve sul piano $I_C \times V_{CE}$ (fig. 10.23), una relativa al transistor simulato da PSPICE e l'altra relativa al modello a diodi. Si noti che per polarizzare i due circuiti T1 e T2 sono richieste due resistenze distinte (ma in valore uguale), in quanto se si utilizzasse una

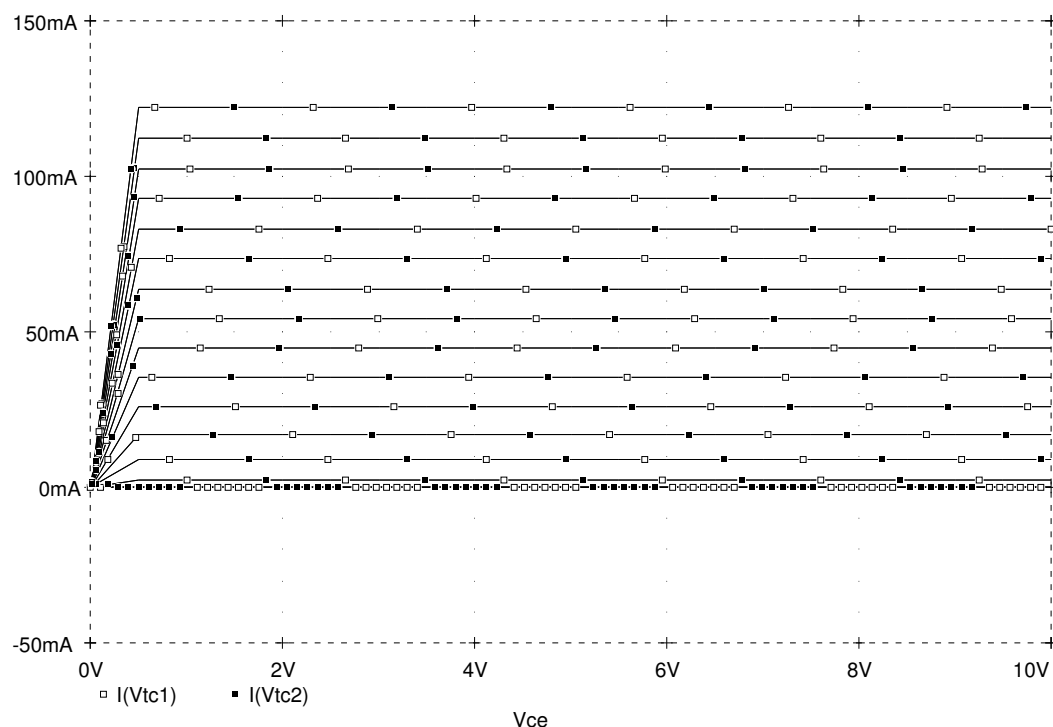


Figura 10.23: Caratteristiche di uscita per il transistor bipolare ed il suo modello.

sola resistenza e i due modelli avessero un differente comportamento, e quindi una diversa corrente di base, verrebbero a lavorare in condizioni di polarizzazione differenti, falsando il confronto. Tale resistenza è peraltro necessaria, in quanto impedisce alla giunzione base-emettitore di lavorare in condizioni anomale, come potrebbe accadere se tale giunzione fosse alimentata direttamente da un generatore di tensione superiore a $600 \div 800$ mV tipici di una giunzione in polarizzazione diretta. Il problema non si pone per il generatore V2, che polarizza la giunzione inversamente, e quindi viene applicato direttamente tra i collettori e la massa.

10.5.2

Si impieghi PSPICE e le tecniche descritte nel problema 10.5.1 per evidenziare l'effetto delle resistenze di base, collettore ed emettitore sul comportamento del transistor.

Estendendo la tecnica esaminata nel problema 10.5.1, si analizza il circuito della figura 10.24 dove T1 e T2 sono i modelli già usati nella figura 10.22, mentre T3 e T4 rappresentano gli stessi modelli modificati con l'inserzione delle resistenze parassite. In T3, le resistenze sono aggiunte alla topologia della rete, mentre T4 è stato modificato includendo i parametri R_b , R_c e R_e nella scheda **.MODEL**.

Il confronto da effettuare, sulle caratteristiche di uscita (fig. 10.25), consente da un lato di verificare che l'equivalenza tra i due modelli del problema 10.5.1 viene mantenuta (confrontando T3 e T4), dall'altro di valutare l'effetto che le resistenze hanno sulle caratteristiche. Si usano i valori $R_b=100\ \Omega$, $R_c=10\ \Omega$, $R_e=1\ \Omega$.

L'effetto delle tre resistenze è sempre quello di introdurre una caduta di tensione che si ripercuote sull'efficacia della polarizzazione esterna, diminuendo l'efficienza del dispositivo sia per quanto riguarda l'amplificazione sia per la dinamica di funzionamento in regione attiva.

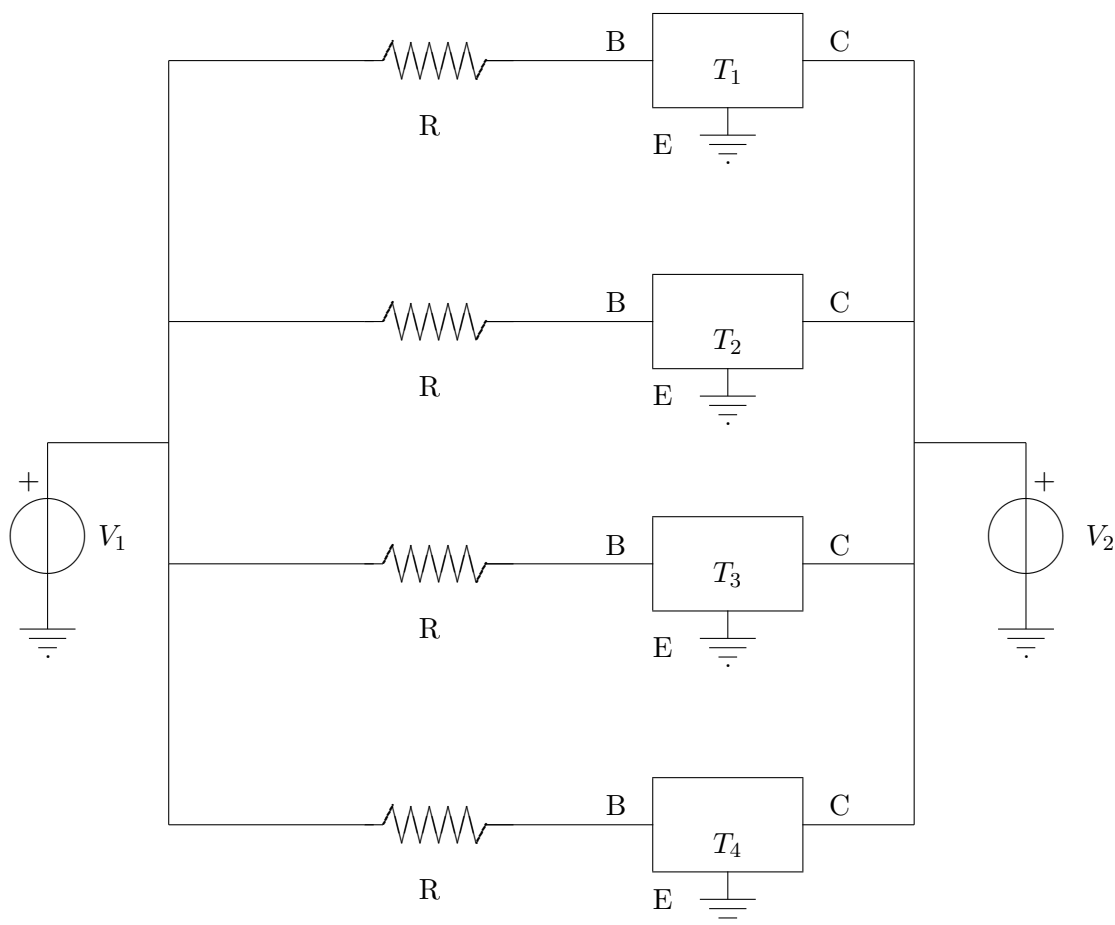


Figura 10.24: Circuito per lo studio dell'effetto delle resistenze intrinseche del transistor bipolare.

10.5.3

Si impieghino PSPICE e le tecniche descritte nel problema 10.5.1 per simulare il fenomeno di breakdown della giunzione polarizzata inversamente nel modello di transistor.

Si usa il circuito della figura 10.26 dove T3 e T4 sono i blocchi funzionali definiti nel problema PSPICE1 con l'inserimento dei parametri di breakdown dei diodi presenti nella rete T3. Tale effetto non è previsto nel modello di transistor di PSPICE, ma è possibile includerlo nel circuito equivalente della figura 10.26, specificando i parametri BV ed IBV (tensione inversa di rottura e corrente nel punto di rottura) per i diodi. Si usano i valori: $I_s = 10^{-14}$ A, $B_f = 100$, $B_r = 1$, $R_b = 100 \Omega$, $R_c = 10 \Omega$, $R_e = 1 \Omega$, $BV = 7$ V, $IBV = 1$ mA.

Il valore di BV scelto non è realistico, in quanto la tensione di rottura, per un dispositivo reale, è di alcune decine di Volt, ma permette di evidenziare il fenomeno della rottura con un campo di tensioni inverse limitato.

L'elevata rapidità di crescita della corrente in condizioni di breakdown consiglia di utilizzare per V2 un passo di simulazione minore rispetto al problema 10.5.1 e ridurre il numero di curve caratteristiche da tracciare, per evitare di aumentare eccessivamente i tempi di calcolo. Si sceglie per V1 l'intervallo $0 \div 2$ V con passo 0,5 V e per V2 l'intervallo

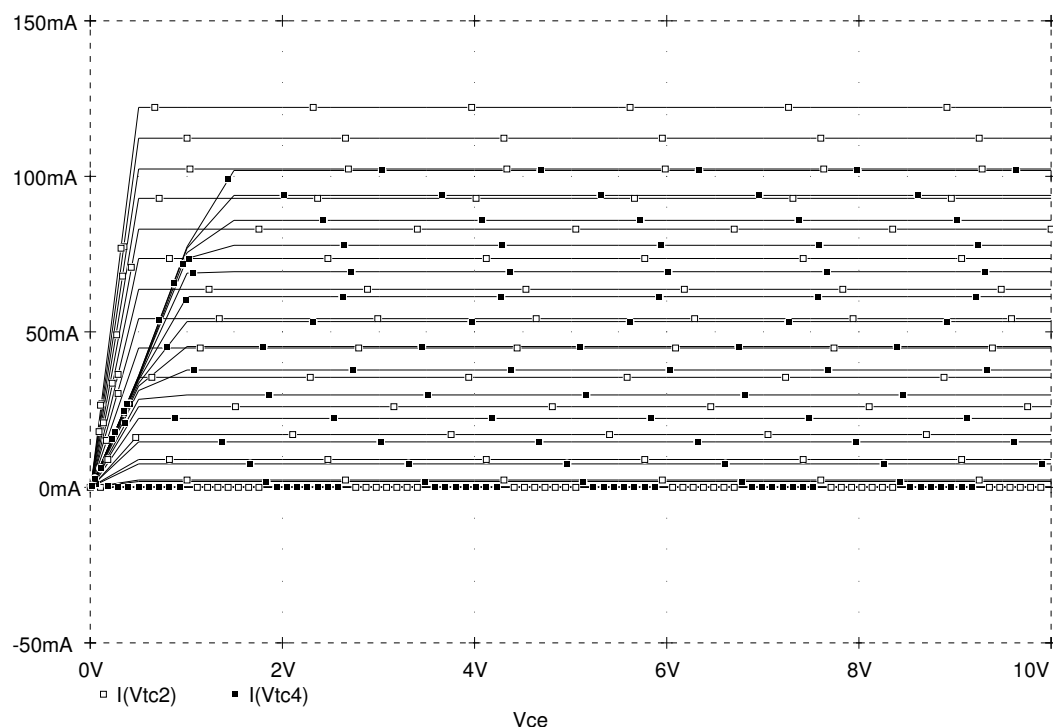


Figura 10.25: Caratteristiche di uscita: effetto delle resistenze intrinseche.

0 ÷ 10 V con passo 0,1 V. Il risultato della simulazione è dato nella figura 10.27.

10.5.4

Si vuole simulare con PSPICE l'effetto della modulazione della larghezza di base, cioè l'effetto Early.

Si usa un circuito costituito dal parallelo di tre blocchi: T1, T2 e T3. T1, impiegato per avere un termine di confronto, è il modello di transistor normale, senza effetto Early, T2 rappresenta il modello PSPICE dello stesso transistor includendo l'effetto Early e T3 (descritto in figura 10.28) è un modello circuitale approssimato. PSPICE permette di simulare l'effetto Early specificando il valore della tensione di Early (VAF) nel .MODEL del transistor, con conseguente modifica delle equazioni costitutive del modello. Nel circuito T3, l'aumento della corrente di collettore al crescere della V_{CE} è reso in modo approssimato mediante un generatore di corrente che inietta nel nodo di collettore una corrente proporzionale alla tensione V_{BC} . Con un'opportuna scelta del coefficiente di proporzionalità si riesce a ottenere un discreto accordo con il modello di Spice. I risultati riportati nella figura 10.29 sono stati ottenuti usando i seguenti valori: $I_S = 10^{-14}$ A, $\beta_F = 100$, $\beta_R = 1$, $V_{AF} = 100$ V, $K = 1$ mS, $R = 1$ k Ω , e i campi di variazione per V1 0 ÷ 2 V con passo 0,1 V e per V2 0 ÷ 10 V con passo 0,5 V.

10.5.5

L'uso del transistor bipolare per l'amplificazione di segnali richiede il funzionamento del dispositivo in zona attiva diretta, o zona lineare, per evitare distorsioni della forma d'onda. Il funzionamento in zona lineare si ottiene applicando alle giunzioni del BJT opportune tensioni continue, mediante reti di polarizzazione costituite da resistori e batterie: i valori risultanti delle tensioni V_{BE} e V_{CE} e delle correnti I_C e I_B costituiscono

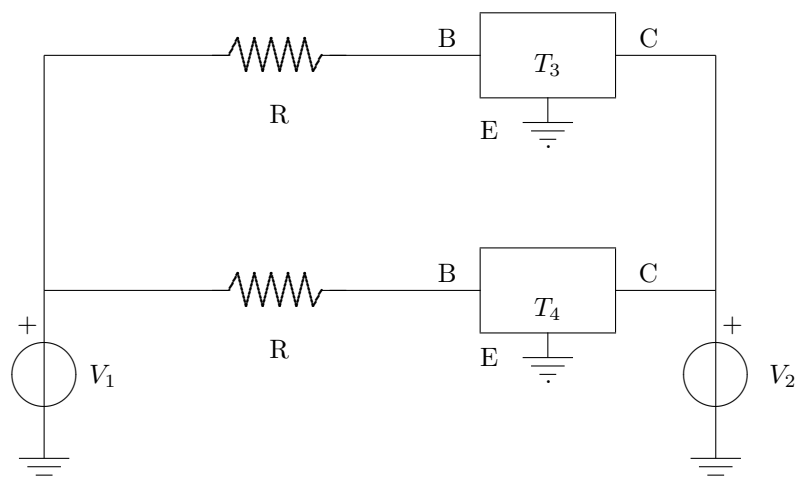


Figura 10.26: Circuito per la simulazione del fenomeno della rottura.

le coordinate del punto di funzionamento a riposo. Se tale punto di funzionamento (Q) cade entro la zona lineare del transistor, segnali di ampiezza contenuta possono essere studiati usando un modello linearizzato del dispositivo e trattati quindi come piccole variazioni di tensione o corrente intorno ai valori continui corrispondenti al punto Q .

Con riferimento al circuito della figura 10.30, trovare il punto di funzionamento a riposo.

Disponendo delle caratteristiche statiche del transistor, di ingresso ed uscita, è possibile ottenere il punto di funzionamento a riposo per via grafica, sovrapponendo la retta di carico alle caratteristiche del BJT. Con retta di carico si intende semplicemente la caratteristica tensione corrente del resistore di carico (in questo caso, R_C per la caratteristica di uscita e R_B per quella di ingresso) riportata sul piano $I_C \times V_{CE}$ o $I_B \times V_{BE}$. Tale retta è quindi espressa dalle relazioni

$$I_C = -\frac{V_{CE}}{R_C} + \frac{V_{CC}}{R_C}$$

$$I_B = -\frac{V_{BE}}{R_B} + \frac{V_{CC}}{R_B}$$

I punti di intersezione della retta di carico con le curve caratteristiche forniscono le coordinate del punto di funzionamento richiesto. In particolare, l'intersezione ottenuta sulla caratteristica di ingresso con la retta di carico di pendenza $1/R_B$ dà i valori di tensione e corrente di base nel punto Q (V_{BEQ} e I_{BQ}), come indicato nella figura 10.31. Il valore I_{BQ} si usa poi per individuare la curva della caratteristica di uscita la cui intersezione (fig. 10.32) con la retta di carico di pendenza $1/R_C$ fornisce tensione e corrente di collettore nel punto Q (V_{CEQ} e I_{CQ}). Nelle due figure, le caratteristiche di ingresso ed uscita del BJT sono state ottenute mediante simulazione con PSPICE. Il listato dei comandi usati per la simulazione è il seguente

```
PUNTO DI FUNZIONAMENTO DI UN BJT
*
.LIB EVAL.LIB
*
* netlist
*
RB 1 4 330K
```

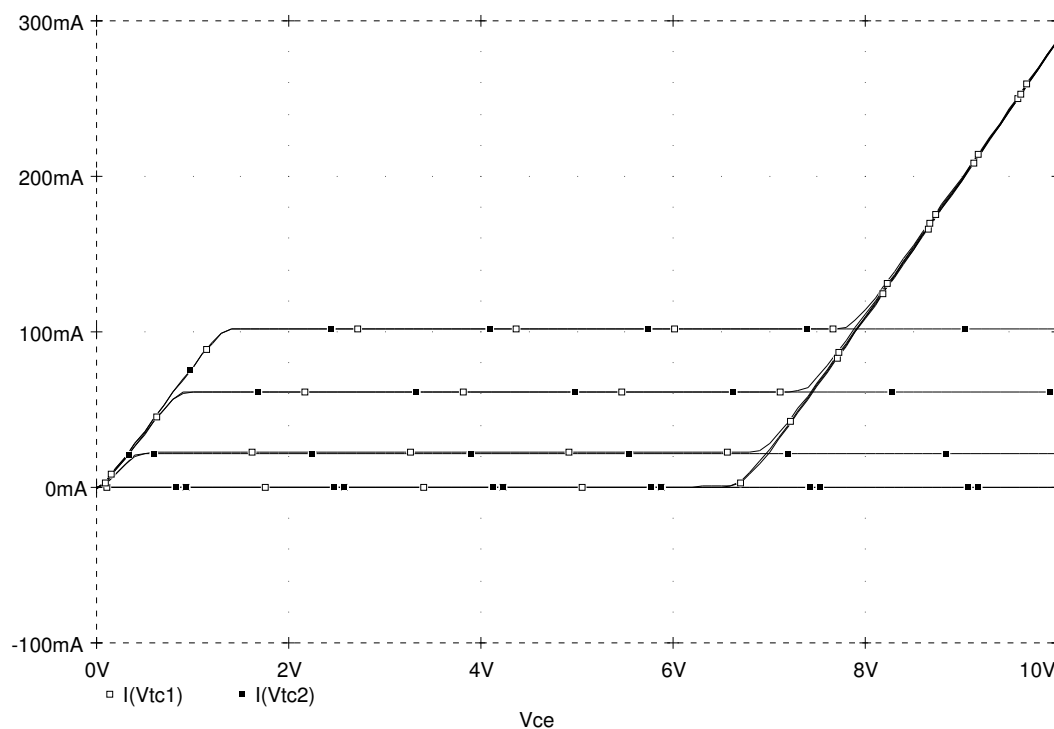


Figura 10.27: Caratteristiche di uscita: effetto del breakdown.

```
RC 2 3 1K
VCC 3 0 10
VBB 4 0 10
Q1 2 1 0 SIMnpn
*
* analisi dc
*
.DC VCC 0 15 0.05 VBB 0 20 5
.PROBE
.END
```

Per il transistor, è stata adottata una versione semplificata del modello del componente commerciale 2N2222A, contenuto nella libreria “EVAL.LIB” e riportato sotto:

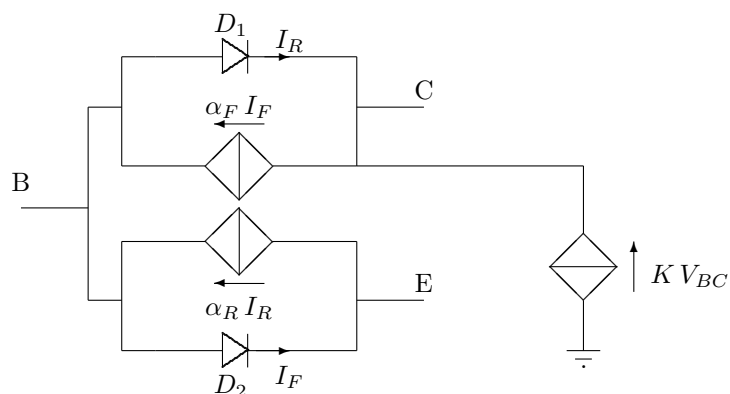


Figura 10.28: Modello approssimato per la simulazione dell'effetto Early.

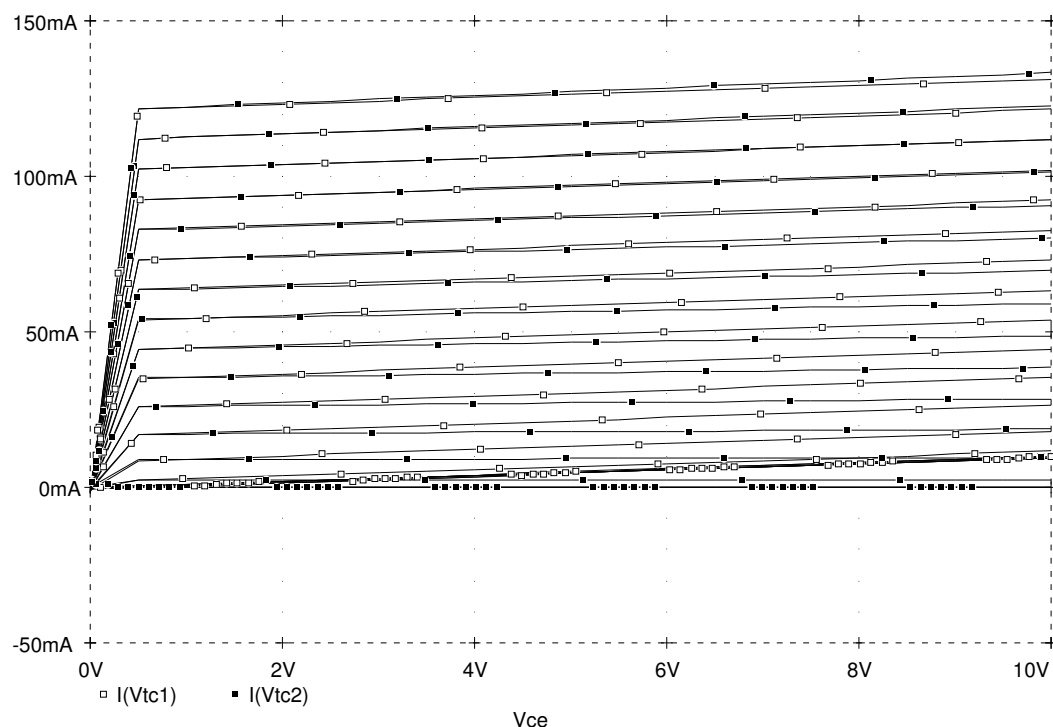


Figura 10.29: Simulazione dell'effetto Early.

```
.model Q2N2222A npn(Is=14.34f Xti=3 Eg=1.11 Vaf=74.03 Bf=255.9
+ Ne=1.307 Ise=14.34f Ikf=.2847 Xtb=1.5 Br=6.092 Nc=2 Isc=0 Ikr=0
Rc=1
+ Cjc=7.306p Mjc=.3416 Vjc=.75 Fc=.5 Cje=22.01p Mje=.377 Vje=.75
+ Tr=46.91n Tf=411.1p Itf=.6 Vtf=1.7 Xtf=3 Rb=10)
* National pid=19 case=TO18
* 88-09-07 bam creation
```

Poiché le caratteristiche dei transistori sono raramente disponibili, è più comodo ricavare il punto di funzionamento per via analitica. La caratteristica di ingresso è quella di un diodo a giunzione polarizzato direttamente e presenta variazioni di tensione assai limitate, anche per escursioni ampie di corrente. Pertanto è ragionevole assumere $V_{BE} = 0,7 \text{ V}$, costante al variare di I_B . Si può quindi scrivere

$$I_{BQ} = \frac{V_{CC} - V_{BE}}{R_B} \simeq \frac{10 - 0,7}{330000} = 28,18 \mu\text{A}$$

Nota I_{BQ} , la corrente di collettore si ottiene come

$$I_{CQ} = \beta \cdot I_{BQ}$$

Assumendo $\beta = 100$, si ha $I_{CQ} = 2,8 \text{ mA}$, da cui

$$V_{CEQ} = V_{CC} - I_{CQ} \cdot R_C = 7,2 \text{ V}$$

Il valore di β non è mai disponibile con precisione, essendo soggetto a forti variazioni di origine tecnologica; il costruttore fornisce solitamente i valori minimo e massimo di tale parametro, che nel caso del 2N2222A sono 100 e 300 rispettivamente. Il metodo di

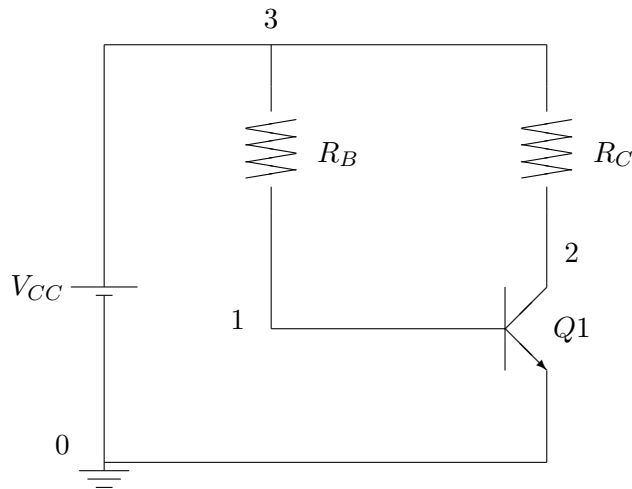


Figura 10.30: Circuito di polarizzazione di un transistor bipolare.

stima del punto di funzionamento indicato è quindi soggetto a errori rilevanti e questo problema si supera soltanto con opportune reti di polarizzazione, che stabilizzano il punto di funzionamento sia rispetto alla dispersione dei valori di β , sia rispetto alle variazioni di temperatura (si vedano i problemi 10.5.6, 10.5.7, 10.5.8).

10.5.6

Con riferimento al circuito della figura 10.30, si usi il simulatore PSPICE per studiare la variazione del punto di funzionamento al variare del valore di β e della temperatura.

La dispersione dei valori di β per un transistor reale è di entità piuttosto rilevante (tra 100 e 300 per il 2N2222A) e questo ha effetti evidenti sul punto di funzionamento del circuito della figura 10.30. Tali effetti sono visibili nella figura 10.33, dove le caratteristiche di uscita sono tracciate per valori diversi di β . La retta di carico sovrapposta alle caratteristiche permette di evidenziare il significativo spostamento del punto di funzionamento. La figura è stata ottenuta mediante il seguente sorgente:

```
STABILITA' DEL PUNTO DI LAVORO DI UN BJT
*
.LIB EVAL.LIB
*
* netlist
*
RB 1 4 330K
RC 2 3 1K
VCC 3 0 10
VBB 4 0 10
Q1 2 1 0 SIMnnpn
*
* analisi
*
.DC VCC 0 15 0.05 npn SIMnnpn (Bf) 88 200 20
*
.PROBE
.END
```

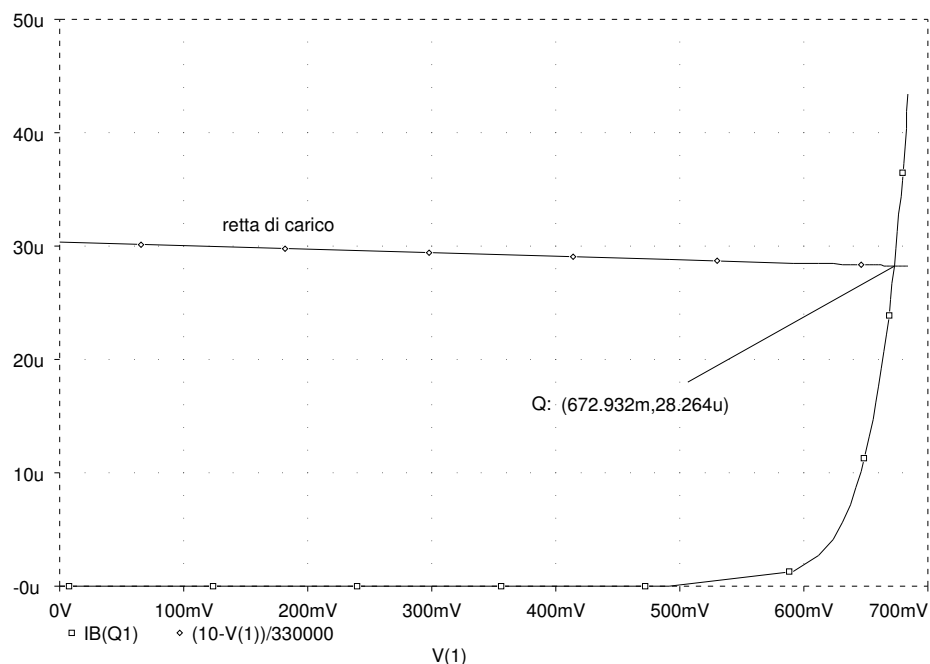


Figura 10.31: Punto di funzionamento a riposo sulla caratteristica di ingresso.

Circuito e modello sono gli stessi del problema 10.5.5, ma l'analisi è parametrica rispetto a B_f (β), il cui valore è variato da 88 a 188, con incrementi di 20 unità.

Le variazioni termiche hanno effetto su tre parametri principali del modello:

- su β , il cui valore cresce tipicamente del 0,5%-1% °C;
- su V_{BE} , tensione diretta della giunzione base-emettitore, che diminuisce di 2,5 mV/°C;
- su I_{CBO} , corrente inversa della giunzione di collettore, che raddoppia ogni 10°C.

Poiché la corrente di collettore è

$$I_C = \beta \cdot I_B + (\beta + 1) \cdot I_{CBO} = \beta \frac{V_{CC} - V_{BE}}{R_B} + (\beta + 1) \cdot I_{CBO}$$

le variazioni dei tre parametri indicati si ripercuotono su I_C e quindi sul punto di funzionamento. L'effetto di tale dipendenza è rappresentato nella figura 10.34. Le caratteristiche riportate in figura sono state ottenute mediante i seguenti comandi

STABILITA' DEL PUNTO DI LAVORO DI UN BJT

```
*
.LIB EVAL.LIB
*
* netlist
*
RB 1 4 330K
RC 2 3 1K
VCC 3 0 10
VBB 4 0 10
Q1 2 1 0 Q2N2222A
*
* analisi
*
.DC VCC 0 15 0.05 TEMP -53 100 20
.PROBE
.END
```

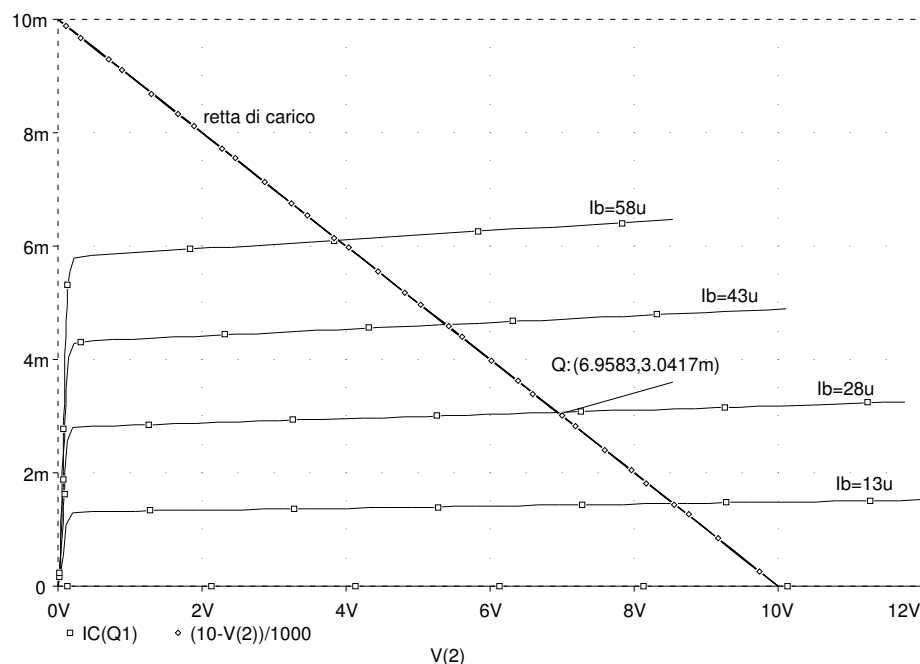


Figura 10.32: Punto di funzionamento a riposo sulla caratteristica di uscita.

L'analisi in continua è questa volta parametrica rispetto alla temperatura, il cui valore è variato tra -53°C e 87°C , a passi di 20°C . Come si vede dalla figura, lo spostamento del punto di funzionamento è considerevole, anche per piccole variazioni termiche, e rende di fatto non utilizzabile la configurazione circuitale della figura 10.30; sono quindi necessarie reti di polarizzazione che rendano stabile il punto di lavoro (una classica configurazione è riportata a titolo di esempio nel problema 10.5.7).

10.5.7

Con riferimento al circuito della figura 10.35, si usi il simulatore PSPICE per studiare la variazione del punto di funzionamento al variare del valore di β .

La differenza essenziale del circuito della figura 10.35 rispetto a quello della figura 10.30, è la resistenza R_E sull'emettitore del BJT. Tale resistenza rende stabile il punto di funzionamento del circuito: infatti un aumento della corrente di collettore, dovuto a variazioni termiche o di β , provoca un aumento della caduta di tensione su R_E e quindi una diminuzione di I_B , che contrasta l'aumento iniziale di I_C , come si può verificare dalla seguente equazione

$$I_B = \frac{V_{CC} - V_{BE} - R_E \cdot I_E}{R_B} \simeq \frac{V_{CC} - V_{BE} - R_E \cdot I_C}{R_B}$$

La presenza di questo meccanismo di controreazione rende automatica la polarizzazione del transistor. La simulazione con PSPICE fornisce il risultato della figura 10.36. Nella simulazione è stato assunto come parametro il valore di β , che varia tra 100 e 300; risulta evidente come lo spostamento del punto di funzionamento conseguente alla dispersione dei valori di β sia molto più limitato rispetto a quanto rilevato dalla figura 10.33 del problema 10.5.6. I comandi usati per la simulazione sono

STABILITA' DEL PUNTO DI LAVORO DI UN BJT
*

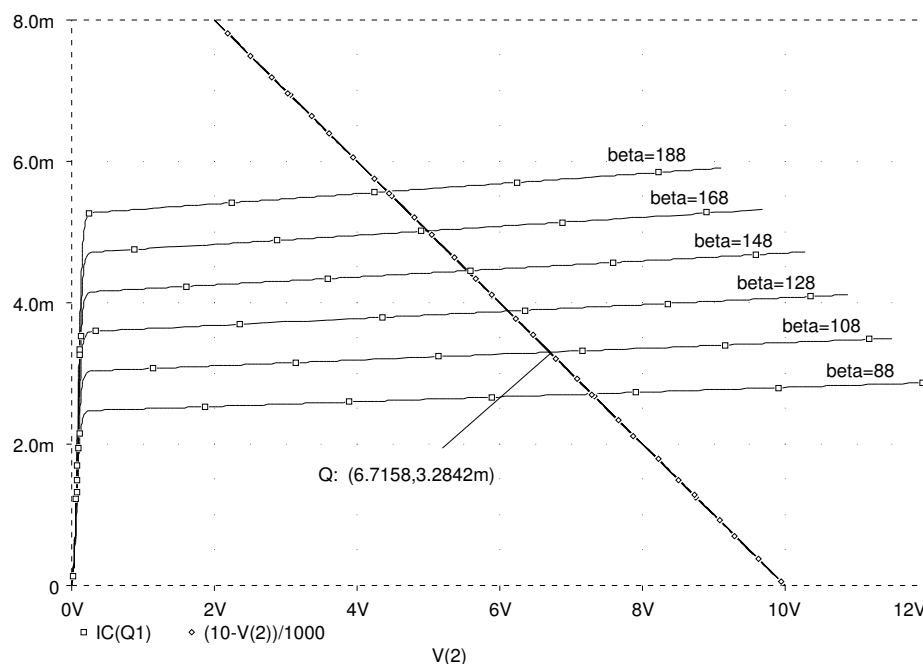


Figura 10.33: Variazione del punto di funzionamento con β .

```
.LIB EVAL.LIB
*
* netlist
*
RB 1 4 6K
RC 2 3 5K
VCC 3 0 10
VBB 4 0 1.5
RE 6 0 1K
Q1 2 1 6 SIMnnpn
*
* analisi
*
.DC VCC 0 15 0.05 npn SIMnnpn (Bf) 100 300 50
.PROBE
.END
```

Risultato analogo si trova simulando il circuito rispetto a variazioni termiche: anche in questo caso, la presenza della resistenza R_E di emettitore conferisce maggiore stabilità al punto di funzionamento.

10.5.8

Con riferimento al circuito della figura 10.37, si usi il simulatore PSPICE per ottenere il punto di funzionamento a riposo e valutare l'amplificazione del segnale V_S .

I valori dei componenti sono gli stessi del problema 10.4.3: $R_C = 5\text{ k}\Omega$, $R_B = 6\text{ k}\Omega$, $R_E = 1\text{ k}\Omega$; V_{CC} e V_{BB} sono batterie da 10 V e 1,5 V rispettivamente, v_S genera una sinusoide di 500 mV di ampiezza e 1 kHz di frequenza. Il transistor è il 2N2222A, con $\beta = 160$.

Si intende usare il circuito della figura 10.37 per amplificare il segnale sinusoidale v_S e si suppone che tale segnale sia a bassa frequenza, ovvero che possano essere trascurati

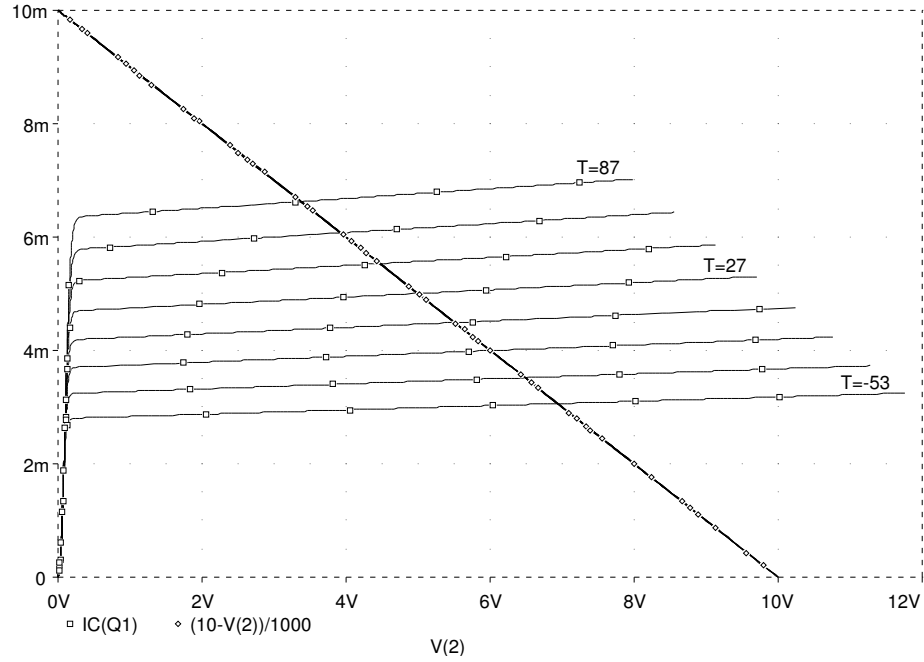


Figura 10.34: Variazione del punto di funzionamento con la temperatura.

gli effetti capacitivi delle giunzioni del transistor: questo, per componenti commerciali di fascia medio-bassa è vero fino a qualche decina di kHz.

Il calcolo analitico del punto di funzionamento, effettuato nel problema 10.4.3, dà: $I_B = 4,8 \mu\text{A}$, $I_C = \beta \cdot I_B = 771 \mu\text{A}$ e $V_{CE} = 5,29 \text{ V}$. Poiché al circuito di ingresso, sul nodo 4, è applicata una tensione $v(4)$ non più costante, ma variabile nel tempo come

$$v(4) = V_{BB} + v_S = 1,5 + 0,5 \sin(2\pi \cdot 10^3 t)$$

la retta di carico sul piano $I_B \times V_{BE}$, di equazione

$$I_B = \frac{v(4) - V_{BE}}{R_B + R_E(1 + \beta)}$$

si sposta, mantenendo pendenza costante, come indicato nella figura 10.38.

In modo corrispondente, il punto di funzionamento si sposta intorno alla propria posizione di riposo (Q), seguendo il valore di I_{BQ} ; se le oscillazioni intorno a Q sono piccole, la zona interessata della caratteristica si può ritenere costante e variazioni sinusoidali di V_{BE} si traducono in variazioni sinusoidali di I_B , senza distorsioni.

Sul piano delle caratteristiche di uscita, al variare di I_B , il punto di funzionamento si sposta lungo la retta di carico, come indicato nella figura 10.39.

Se nella zona di spostamento del punto di lavoro le caratteristiche di uscita del BJT sono sufficientemente parallele ed equidistanziate, le variazioni sinusoidali di I_B producono variazioni sinusoidali della corrente di collettore, $I_C = \beta \cdot I_B$, e della tensione collettore-emettitore, V_{CE} . Ne consegue che anche la tensione di uscita V_{out} subisce una variazione sinusoidale e rappresenta quindi una copia amplificata senza distorsioni del segnale di ingresso, V_s . Le due tensioni di ingresso ed uscita sono confrontate nella figura 10.40⁸. I comandi usati per le simulazioni PSPICE sono

USO DEL BJT COME AMPLIFICATORE

⁸In realtà, si vede dalla figura che la forma d'onda di ingresso è stata invertita, ovvero che l'uscita ha uno sfasamento di π radianti rispetto all'ingresso.

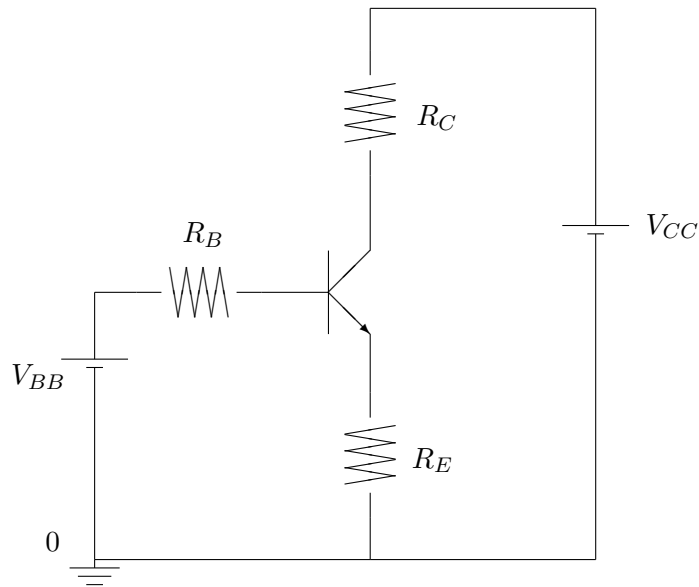


Figura 10.35: Circuito di autopolarizzazione di un transistor bipolare.

```
*
.LIB EVAL.LIB
*
* netlist
*
RB 1 4 6K
RC 2 3 5K
VCC 3 0 10
VBB 5 0 1.5
RE 6 0 1K
Q1 2 1 6 Q2N2222A
VS 4 5 SIN(0 0.5 1K)
*
* analisi
*
.TRAN 1US 2MS
.PROBE
.END
```

10.5.9

Per analizzare il comportamento dinamico del transistor bipolare, si simuli la risposta del circuito invertitore di figura 10.41 quando al suo ingresso sia applicata un'onda quadra tra le tensioni 5 V e 0 V, con periodo pari a 40 ns e duty cycle del 25%. Inizialmente, si usi il modello del transistor ideale e si verifichi l'assenza di ritardi e comportamenti capacitivi. Successivamente, si ripeta l'analisi considerando gli effetti dei tempi di transito e delle capacità di giunzione del dispositivo, prima singolarmente e poi complessivamente, cercando di evidenziare i diversi effetti che questi hanno sul comportamento del transistor.

I parametri del transistor sono: $I_s = 10^{-14}$ A, $B_f = 100$, $B_r = 1$, $T_f = 100$ pS, $T_r = 1$ ns, $C_{je} = 2$ pF, $C_{jc} = 1$ pF, $C_{js} = 3$ pF, mentre i resistori dell'invertitore hanno resistenze: $R_b = 1$ k Ω e $R_c = 1$ k Ω .

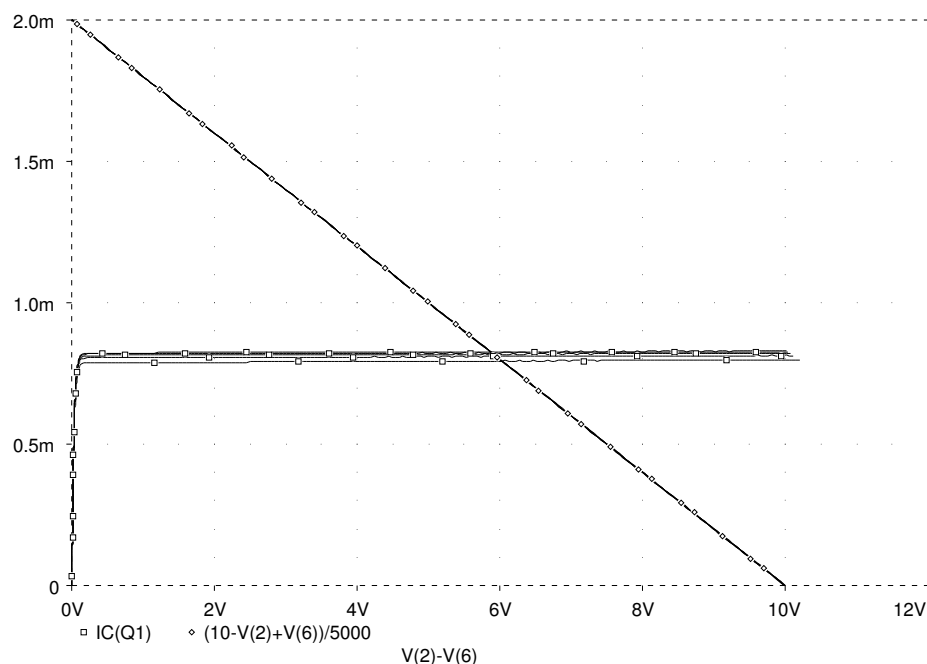


Figura 10.36: Variazione del punto di funzionamento con β .

La forma d'onda assegnata può essere specificata con l'opzione PULSE nella dichiarazione del generatore di ingresso; il risultato è la tensione presente sul collettore. L'analisi deve essere effettuata nel dominio del tempo, quindi si utilizza la scheda **.TRAN** specificando un intervallo di tempo per la simulazione che comprenda tutta la durata dello stimolo: si sceglie l'intervallo $0 \div 50$ ns con un passo di simulazione di 0,1 ns. Si può verificare che, aumentando il periodo della forma d'onda e quindi il tempo dell'analisi, il comportamento dinamico tende ad avvicinarsi a quello ideale.

Per separare gli effetti sul ritardo alla risposta all'onda quadra (fig. 10.42) è utile con PSPICE (cfr. problema 10.5.1) effettuare la simulazione su una struttura costituita dal *parallelo* di quattro circuiti che differiscono unicamente per le caratteristiche (specificate con la scheda **.MODEL**) dei transistori. In particolare, per T1 non è specificato alcun parametro dinamico (curva $V(C1)$), per T2 si assegnano soltanto i tempi di transito (curva $V(C2)$), per T3 soltanto le capacità di giunzione a polarizzazione nulla (curva $V(C3)$) e infine, per T4, tutti i parametri dinamici (curva $V(C4)$). I vantaggi che si ottengono con questo metodo sono sostanzialmente due: a) è necessario un unico circuito e quindi un unico passo di analisi, b) i risultati della simulazione di ogni sottocircuito sono disponibili con **PROBE** contemporaneamente, quindi sono direttamente confrontabili sullo schermo. Ovviamente è necessario isolare le varie sezioni del circuito, cioè porre ogni transistor in maglie indipendenti dagli altri, per evitare accoppiamenti capacitivi.

10.5.10

Con riferimento al circuito della figura 10.43, si usi il simulatore PSPICE per studiarne il comportamento dinamico, in presenza di un'onda quadra all'ingresso. I valori dei componenti sono: $R_C = 470 \, \Omega$, $R_B = 3,9 \, \text{k}\Omega$; V_{CC} è una batteria da 5 V e il transistor è il 2N2222A.

Usato come interruttore, il transistor opera alternativamente in zona di saturazione e di interdizione. Nel primo caso, la tensione V_{CE} risulta molto piccola (dell'ordine

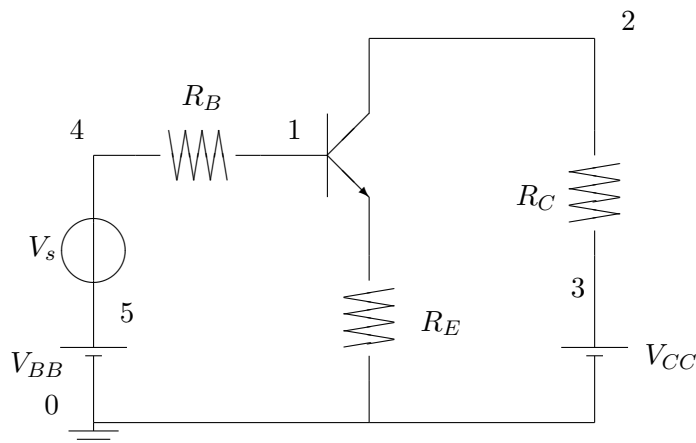


Figura 10.37: Uso del BJT come amplificatore.

di 0,2 V) mentre la corrente di collettore può essere molto elevata; nel secondo caso, risulta $I_C \simeq 0$ e V_{CE} può salire fino al limite della rottura (breakdown). Pertanto, nella due condizioni indicate, il transistor emula bene il comportamento di un interruttore ideale:

- interruttore chiuso: capacità di sostenere correnti elevate e caduta di tensione nulla;
- interruttore aperto: corrente nulla e capacità di sostenere tensioni elevate.

Quando l'ingresso del circuito è sottoposto a una tensione variabile tra due livelli alto e basso (onda quadra), la rete di polarizzazione del BJT deve essere in grado di portare il dispositivo alternativamente in saturazione e in interdizione. Questo può essere verificato sul circuito della figura 10.43, supponendo in ingresso un'onda quadra di periodo 100 μ s, tra i livelli 0 V e 5 V.

Dal punto di vista del comportamento dinamico, interessano principalmente 4 tempi, definiti come segue:

- “tempo di salita” (*rise time*), tempo impiegato dalla forma d'onda per salire dal 10% al 90% del valore finale (attraversamento della zona lineare);
- “tempo di discesa” (*fall time*), tempo impiegato dalla forma d'onda per scendere dal 90% al 10% del valore finale (attraversamento della zona lineare);
- “tempo di ritardo” (*delay time*), tempo entro il quale la forma d'onda di uscita sale al 10% del valore finale, a partire dalla commutazione dell'ingresso;
- “tempo di immagazzinamento” (*storage time*), tempo entro il quale la forma d'onda di uscita scende al 90% del valore finale, a partire dalla commutazione dell'ingresso; questo tempo è richiesto per l'eliminazione dei portatori minoritari.

I valori di queste quattro grandezze rilevate sul circuito in questione tramite PSPICE sono riportati nelle figure 10.44, 10.45, 10.46 e 10.47.

I comandi usati per la simulazione sono

```

COMMUTAZIONE DI UN BJT
*
.LIB EVAL.LIB
*
```

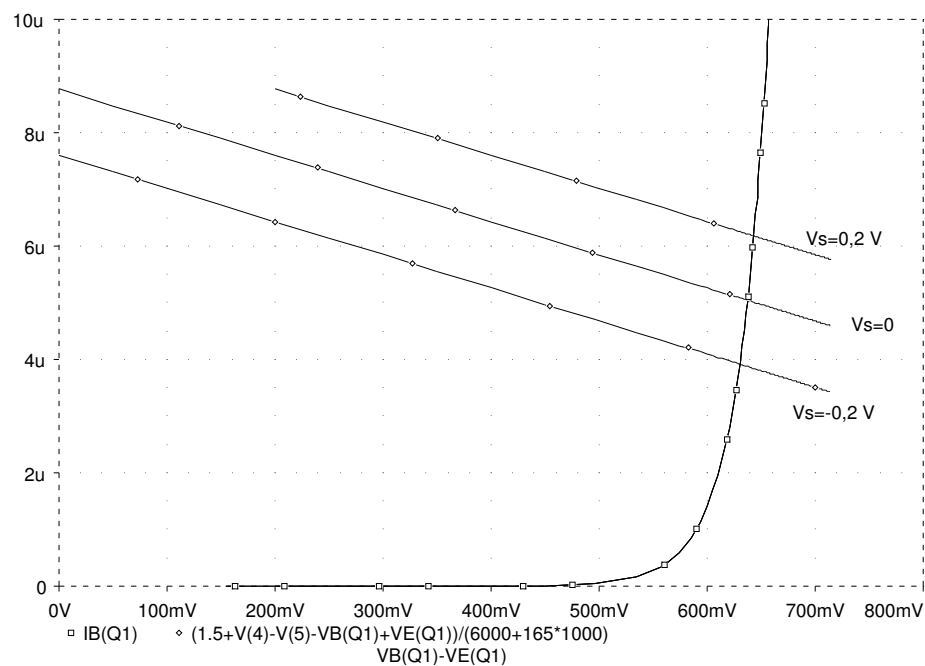



Figura 10.38: Variazione del punto di funzionamento sulla caratteristica di ingresso.

```
* netlist
*
RB 1 4 3.9K
RC 2 3 470
VCC 3 0 5
Q1 2 1 0 Q2N2222A
VS 4 0 PULSE(5 0 0 0 0 50u 100u)
*
* analisi
*
*.DC VCC 0 15 0.05 npn npn1 (Bf) 100 300 50
.TRAN 1n 150u
.probe ; *ipsp*
.END
```

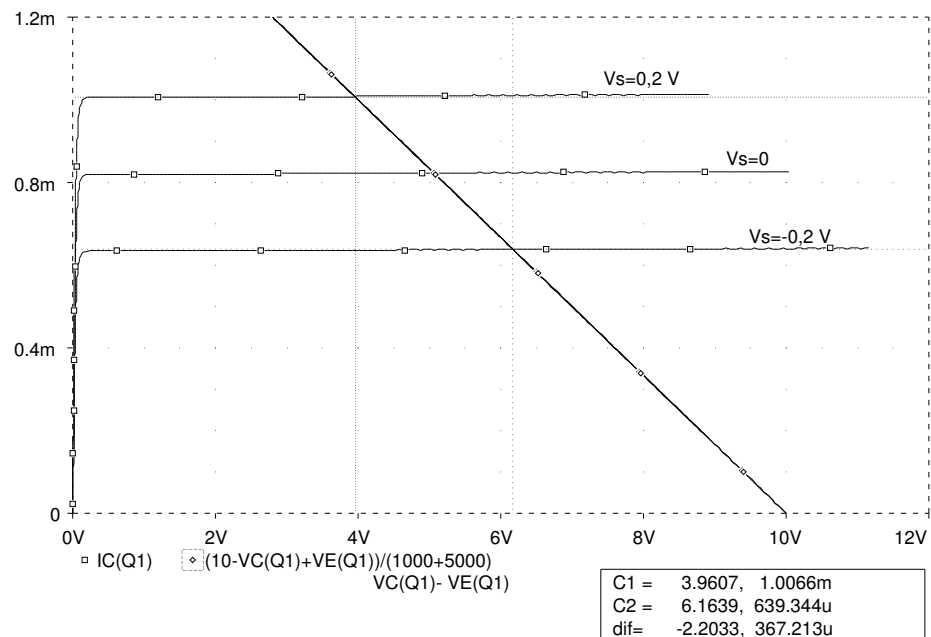


Figura 10.39: Variazione del punto di funzionamento sulla caratteristica di uscita.

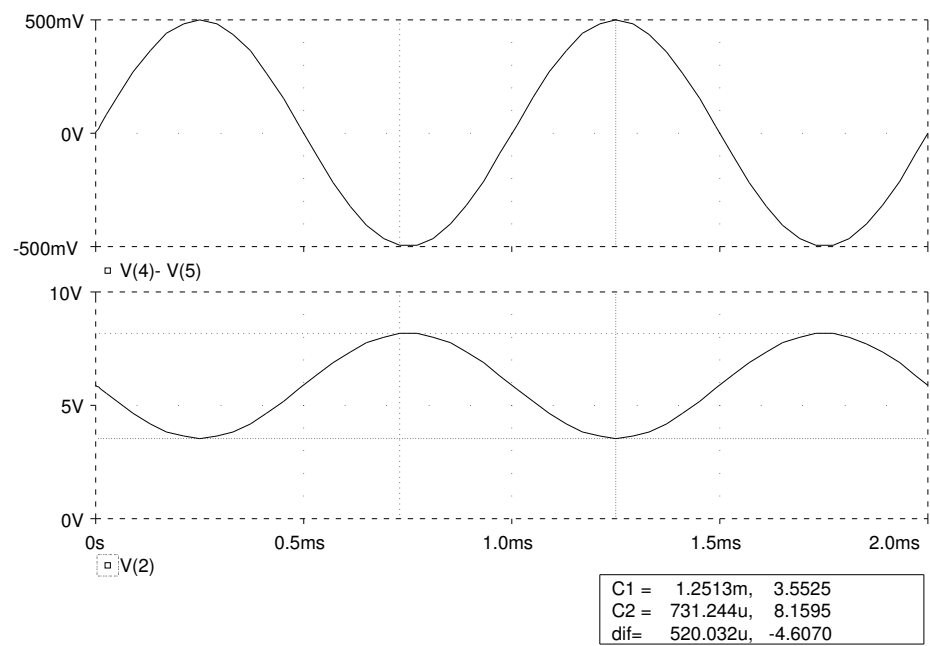


Figura 10.40: Andamento delle tensioni di ingresso e uscita.

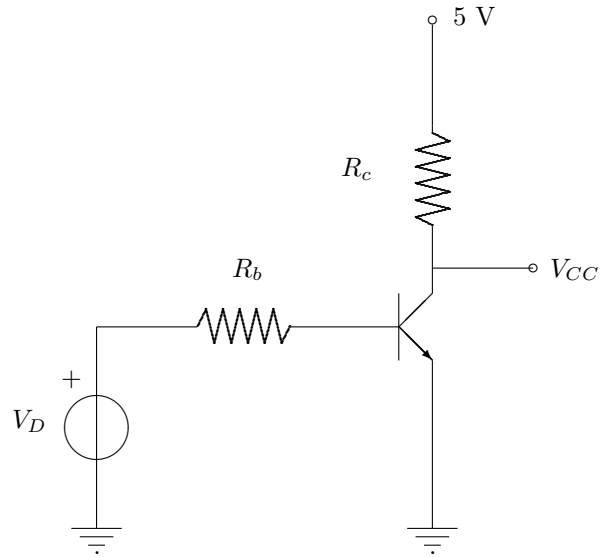


Figura 10.41: Circuito invertitore.

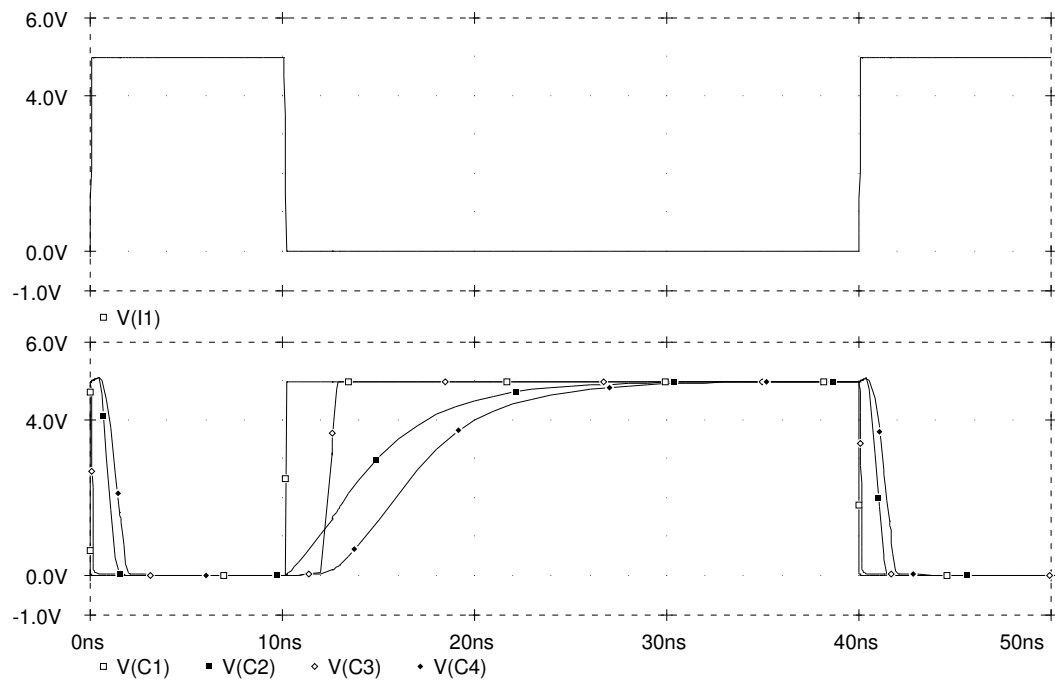


Figura 10.42: Comportamento dinamico del transistor.

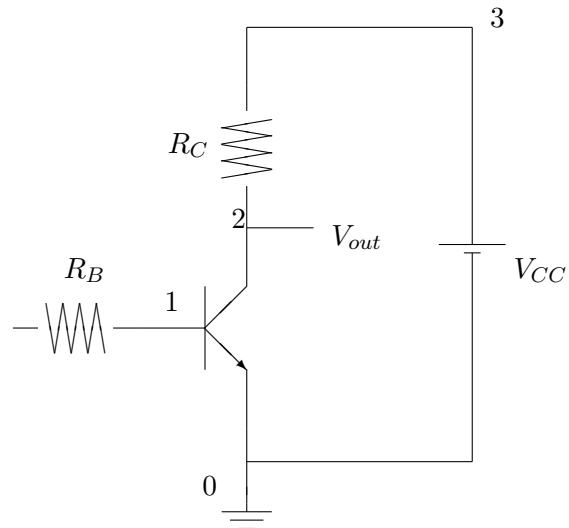


Figura 10.43: Uso del BJT come interruttore.

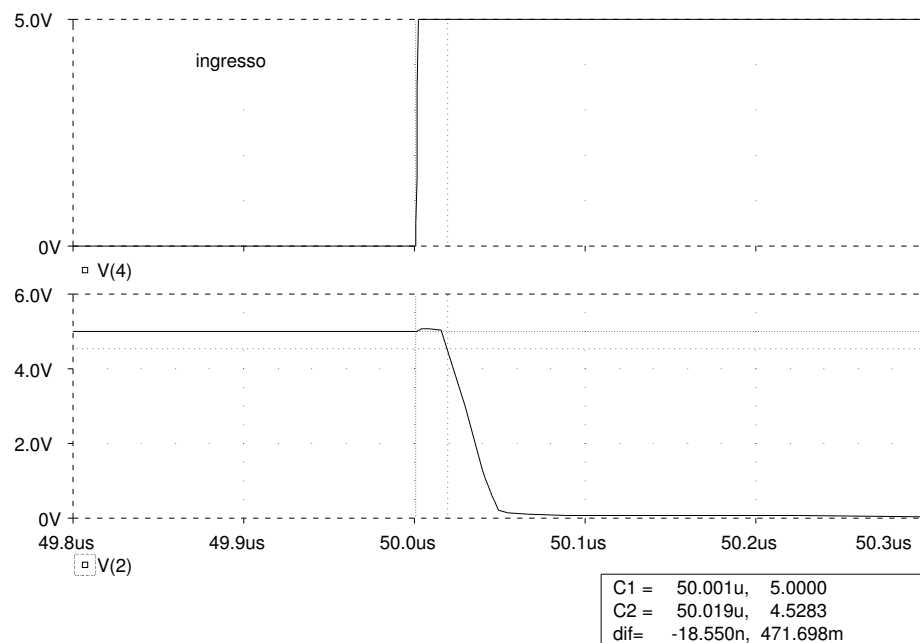


Figura 10.44: Misura del tempo di ritardo.

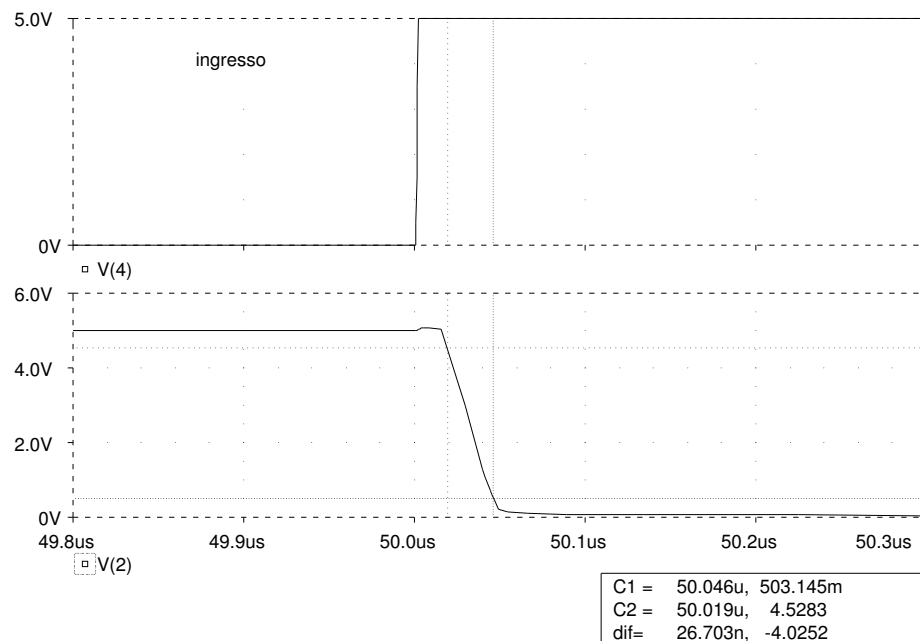


Figura 10.45: Misura del tempo di discesa.

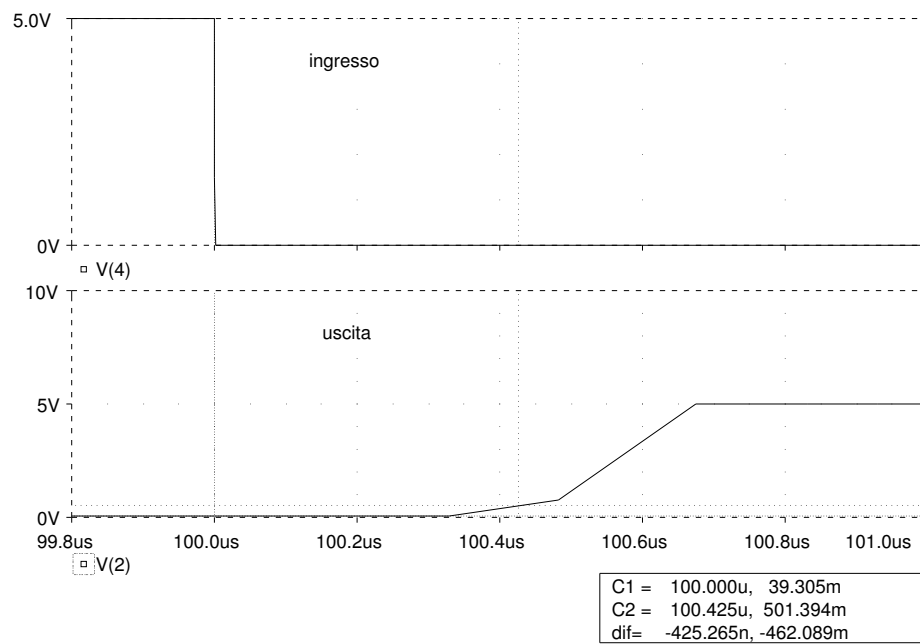


Figura 10.46: Misura del tempo di immagazzinamento.

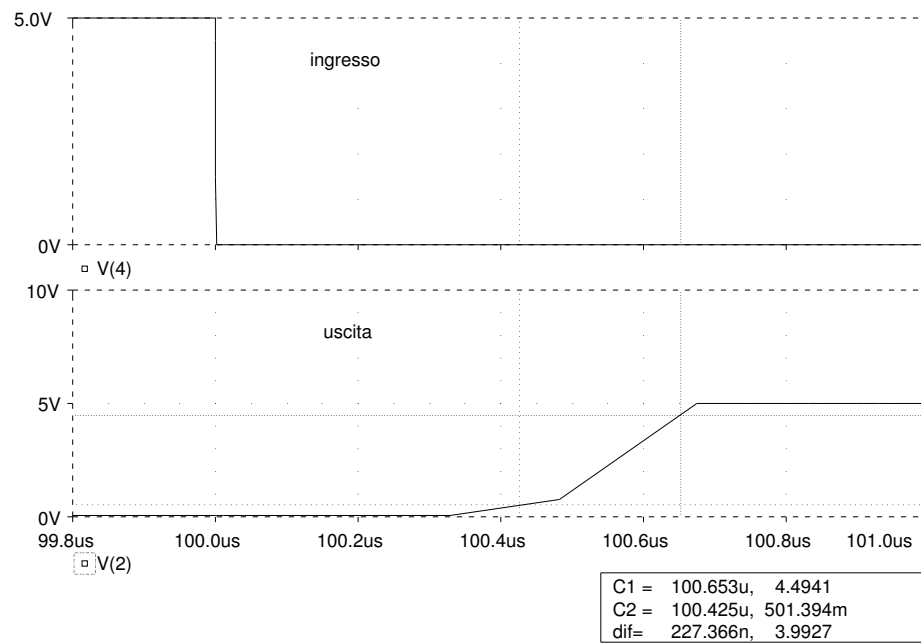


Figura 10.47: Misura del tempo di salita.

Capitolo 11

Sistemi Metallo Ossido Semiconduttore: il MOSFET

La parte iniziale del capitolo è dedicata all'esame delle grandezze elettriche che caratterizzano un transistor MOSFET e all'analisi della struttura tecnologica dei dispositivi metallo-ossido-semiconduttore (MOS) mediante l'uso del simulatore di processo SUPREM.

Per la comprensione del comportamento del MOSFET si studia il sistema metallo-isolante-semiconduttore (MIS): esaminandone grandezze quali le concentrazioni dei portatori, la densità di carica, il campo elettrico e il potenziale, si possono chiarire concetti fondamentali quali l'accumulo dei portatori, la tensione di banda piatta e infine l'inversione di popolazione, sia debole che forte. Passando poi a un dispositivo meno idealizzato, si individuano alcuni fenomeni particolari, come l'effetto sul valore della tensione di soglia delle cariche intrappolate nell'ossido e all'interfaccia.

La descrizione del comportamento elettrico di un MOSFET viene fatta introducendo relazioni tra corrente e tensione che tengono conto di fenomeni quali gli effetti della saturazione della velocità dei portatori, della degradazione della mobilità superficiale e della conduzione sottosoglia. Questi ultimi fenomeni risultano particolarmente importanti in dispositivi ottenuti tramite un'operazione di scalamento delle dimensioni da dispositivi più grandi, per i quali è necessario tener conto delle variazioni della tensione di soglia legate agli effetti di "canale corto" e di "canale stretto".

L'insieme degli strumenti di analisi e la conoscenza dei parametri influenti sui diversi fenomeni analizzati porta all'uso del modello statico del MOSFET con PSPICE. Come per i dispositivi introdotti nei capitoli precedenti, si impiegano i modelli PSPICE per ottenere mediante simulazione le caratteristiche dei vari tipi di MOSFET.

Il capitolo si conclude con l'esame di un modello dinamico del MOSFET (fondamentale per lo studio dei circuiti digitali), che richiede un'analisi accurata delle capacità del sistema MOS e delle regioni di "drain" e di "source" verso il substrato. Tale modello viene applicato in regime di ampio segnale nella simulazione dei transistori di commutazione.

11.1 Struttura fisica dei MOSFET

11.1.1 Simulazione della regione di gate con SUPREM

Si progetti, ricorrendo al simulatore SUPREM3, un processo di fabbricazione di un MOSFET a canale n in modo da rispettare le seguenti specifiche:

- *substrato $< 100 >$ con una concentrazione di boro pari a 10^{15} atomi al cm^3 ;*
- *accrescimento dell'ossido di campo utilizzando un processo ad alta pressione in vapore: 30 minuti a 5 atm a 1000°C ;*
- *protezione delle regioni attive con la tecnica LOCOS;*
- *correzione della tensione di soglia ricorrendo a un'implantazione ionica di boro con 50 keV e dose di $2 \cdot 10^{11}$ atomi al cm^2 ;*
- *realizzazione del gate in silicio policristallino di $0,5 \mu\text{m}$ drogato con fosforo.*

Dato che la zona elettricamente utile di un MOSFET (zona attiva) è quella sottostante il gate e dato che si usa un simulatore monodimensionale (SUPREM3), tutto il processo viene considerato in una sezione in corrispondenza del gate. L'applicazione delle tecniche LOCOS avviene attraverso le seguenti fasi:

- creazione di uno strato intermedio di SiO_2 , con spessore di $0,05 \mu\text{m}$, tramite ossidazione in atmosfera secca a 1050 gradi;
- deposizione di uno strato di nitrato di silicio di $0,2 \mu\text{m}$ di spessore, tramite deposizione chimica da fase vapore (CVD);
- creazione dell'ossido di campo. Il processo di ossidazione ovviamente interessa anche le regioni attive protette dallo strato di nitrato.

```

TITLE      SUPREM-3 Simulazione processo MOS
COMMENT    Inizializzazione del substrato di silicio
INITIALIZE  < 100 > SILICON BORON=1E15
+          THICKNESS=1.5 DX=.002 XDX=.02 SPACES=120
COMMENT    Crescita dell'ossido di protezione
DIFFUSION   TEMPERATURE=1050 THICKNESS=.05 DRYO2
COMMENT    Deposizione dello strato di nitrato di protezione
DEPOSIT     NITRIDE THICKNESS=.2 DX=.02 SPACES=10
COMMENT    Crescita dell'ossido di campo
PRINT      LAYER ENABLE
DIFFUSION   TEMPERATURE=1000 TIME=30
+          STEAM PRESSURE=5 PRINT
    
```

I risultati forniti da SUPREM al termine della crescita dell'ossido di campo sono riportati nella tabella, dove ogni riga fornisce lo spessore in μm di ogni strato della regione attiva, partendo dal substrato e andando verso la superficie. I valori sono confrontati con i valori iniziali nominali, prima della crescita finale.

	prima	dopo
Si	1,500	1,478
SiO_2	0,050	0,050
Si_3N_4	0,200	0,182
SiO_2	0,000	0,010

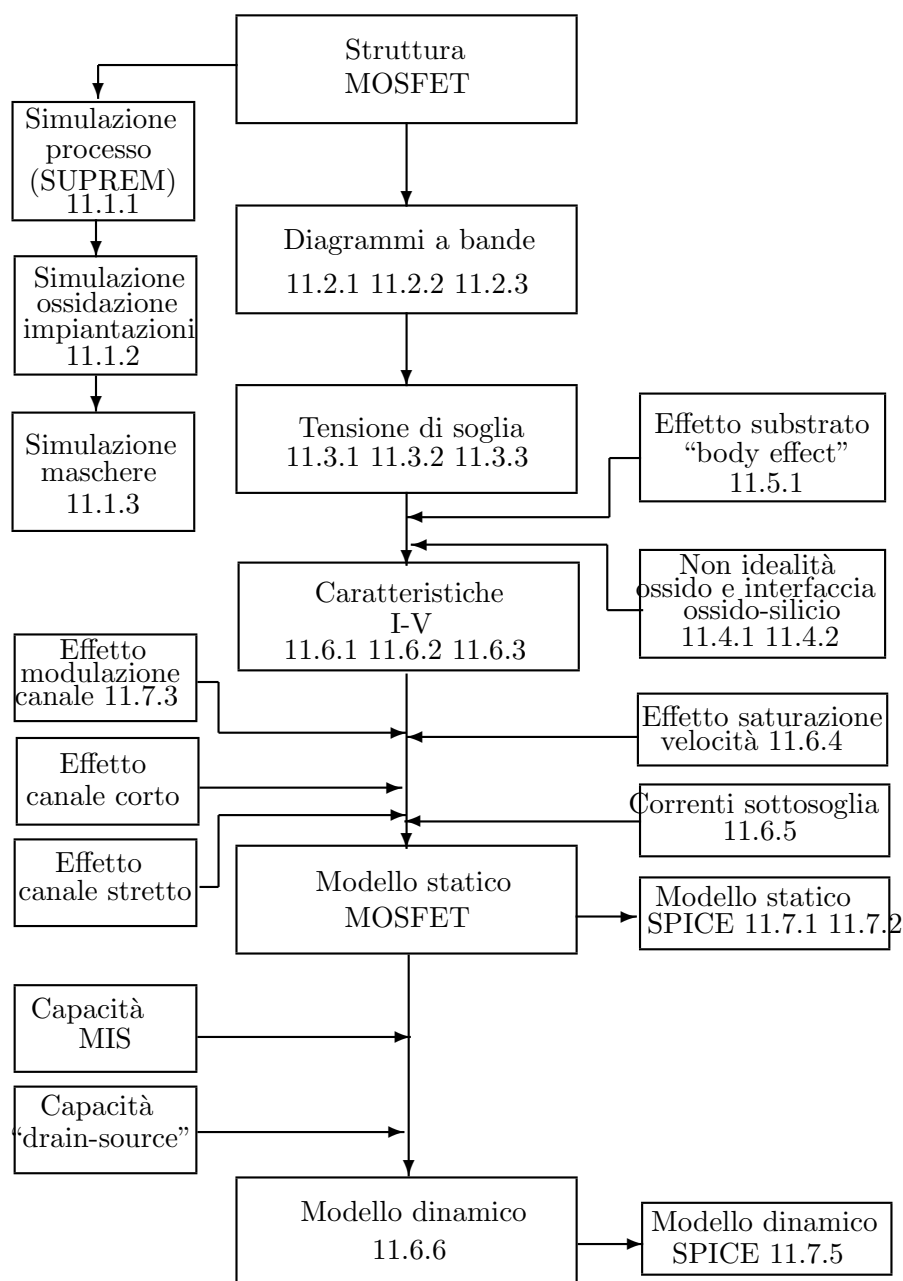


Figura 11.1: Struttura del capitolo 11.

Come si vede lo strato di nitrato ha protetto in modo molto efficace, limitando a valori trascurabili l'ulteriore ossidazione.

- Dopo la creazione dell'ossido di campo, nelle regioni attive vengono rimossi gli strati protettivi e si procede alla crescita dell'ossido di gate. Questo processo avviene in ossigeno secco diluito con azoto e con l'aggiunta del 5% di HCl per neutralizzare eventuali ioni alcalini. Al simulatore viene chiesto di ottimizzare il processo di ossidazione in termini di percentuale di azoto.
- Il gate viene quindi realizzato con un processo di deposizione chimica da fase vapore di silicio policristallino drogato molto intensamente con fosforo.

```

COMMENT      Rimozione dalla zona attiva degli strati protettivi
ETCH         OXIDE
ETCH         NITRIDE
ETCH         OXIDE
COMMENT      Impiantazione di boro per correzione VT
IMPLANT      BORON DOSE=2E11 ENERGY=50
PRINT        SUMMARY
COMMENT      Crescita dell'ossido di gate ottimizzata
LOOP         OPTIMIZE
ASSIGN       NAME=N2 N.VALUE=0 LOWER=0 UPPER=100 OPTIMIZE
DIFFUSION    TEMP=1000 TIME=40 HCL%=5 F.O2=100-@N2 F.N2=@N2
EXTRACT      NAME=TOX THICKNESS LAYER=2 TARGET=0.4
L.END
PRINT        SUMMARY
COMMENT      Deposizione e drogaggio gate in polisilicio
DEPOSIT      POLYSILICON THICKNESS=0.5 TEMPERATURE=620
DIFFUSION    TEMPERATURE=950 TIME=60 SS.PHOSPHORUS PRINT
PLOT         CHEMICAL NET RIGHT=1.5 LINE=2
SAVEFILE     STRUCTURE FILE=MOSGATE
    
```

Le concentrazioni delle impurità nei differenti strati della regione attiva (dopo la realizzazione del gate in polisilicio) sono riportate in funzione della profondità a partire della superficie nella figura 11.2. Si noti che l'impiantazione di boro necessaria, per la correzione della tensione di soglia presenta una concentrazione nel substrato pari a $4 \div 5 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ in corrispondenza del canale e un valore superiore nell'ossido, a causa del coefficiente di segregazione del boro nell'ossido maggiore di uno. Si noti inoltre come all'interno dell'ossido si origina una giunzione ($N_d = N_a$) a 130\AA dall'interfaccia polisilicio ossido; giunzione che comunque non può presentare alcuna attività elettrica. La struttura fino ad ora ottenuta non è ancora quella finale e i profili di drogaggio nella regione di gate non hanno ancora l'aspetto finale. Infatti mancano le impiantazioni delle regioni di drain e di source e i successivi cicli di rinvenimento e ossidazione, che modificheranno anche i profili di drogaggio nella regione di gate.

```

COMMENT      Impiantazione dell'arsenico delle regioni di drain source
IMPLANT      ARSENIC DOSE=5E15 ENERGY=50 GAUSSIAN
DIFFUSION    TEMPERATURE=1000 TIME=15 DRYO2
DIFFUSION    TEMPERATURE=1000 TIME=15 STEAM
DIFFUSION    TEMPERATURE=1000 TIME=20
PRINT        LAYER
COMMENT      Andamento delle impurità
PLOT         CHEMICAL NET RIGHT=1.5 LINE=2
    
```

Nella figura 11.3 è tracciato il profilo delle concentrazioni di impurità nella regione di gate al termine della fabbricazione delle regioni di source e drain e della successiva ossidazione. Si noti come la "giunzione" nell'ossido di gate si sia spostata a 320\AA dall'interfaccia polisilicio ossido e come la concentrazione del boro nel canale sia rimasta praticamente invariata.

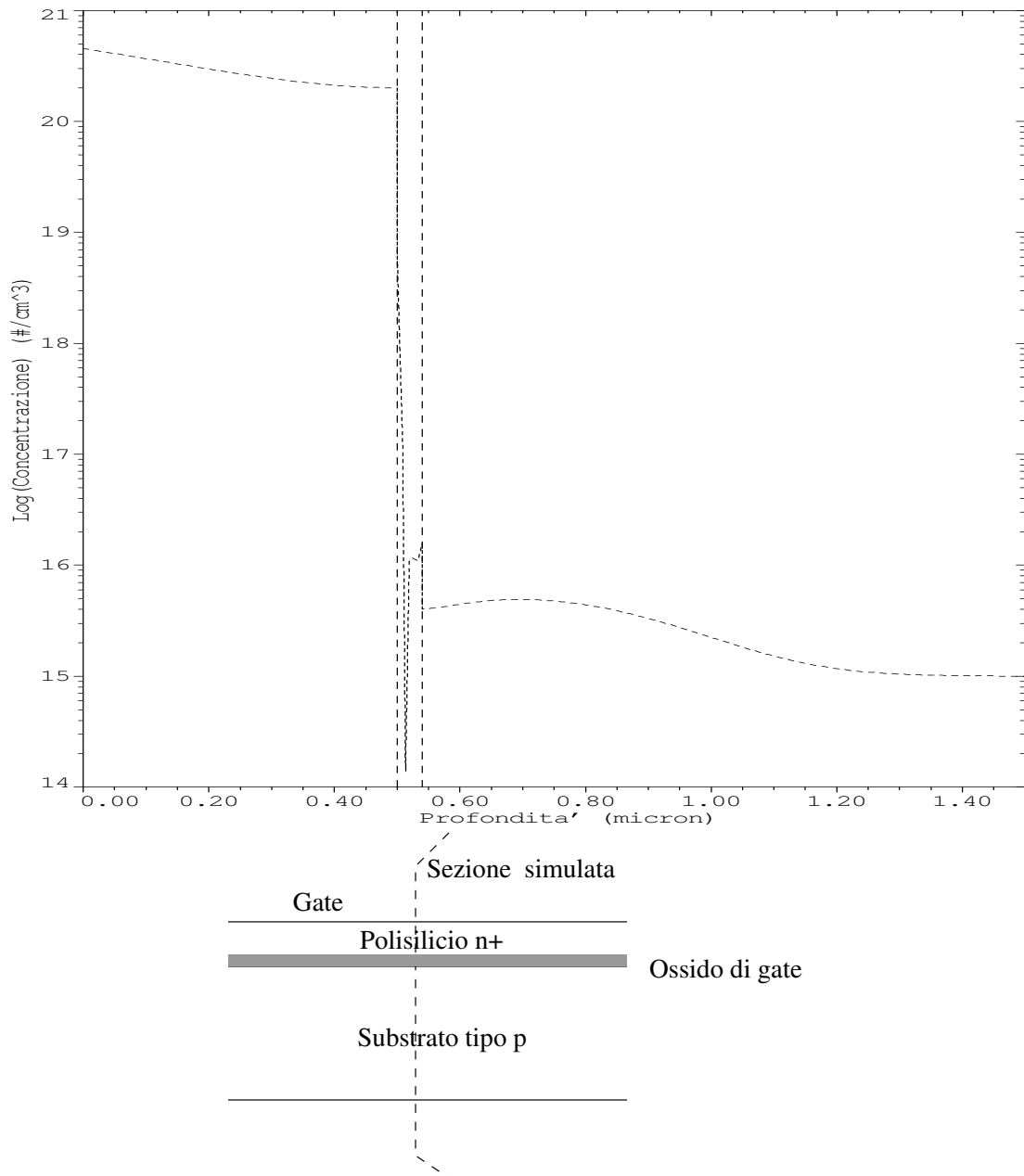


Figura 11.2: Profili delle impurità $|N_d - N_a|$ nella regione di gate prima della realizzazione delle regioni di drain e di source: lo strato di polisilicio si estende da 0 a 500 nm di profondità, l'ossido di gate da 500 a 540 nm e il substrato da 540 nm in poi.

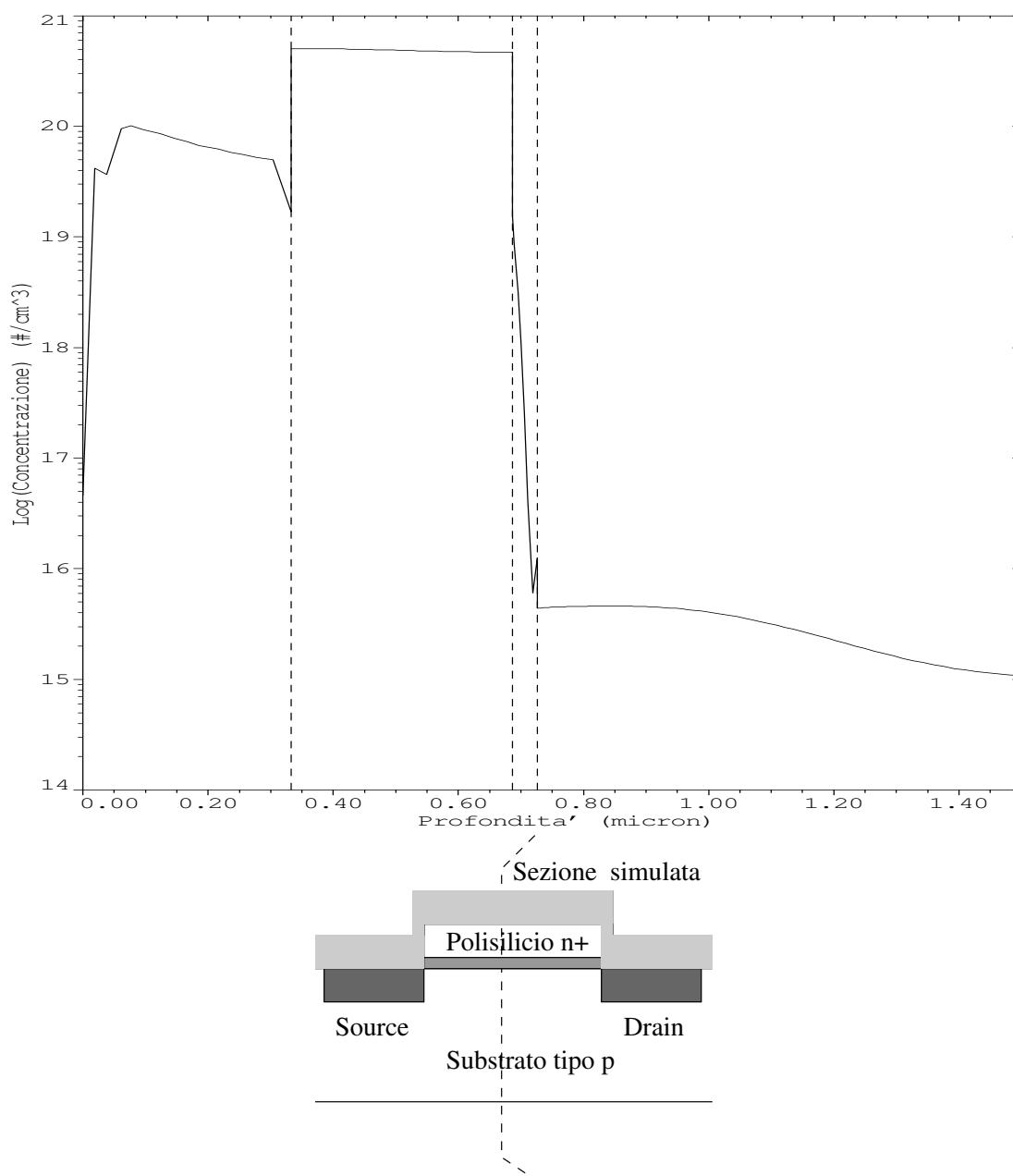


Figura 11.3: Profili delle impurità $|N_d - N_a|$ nella regione di gate dopo la realizzazione delle regioni di drain e di source e la successiva ossidazione: lo strato di ossido si estende da 0 a 332 nm di profondità, il polisilicio da 332 a 688 nm, l'ossido di gate da 688 a 728 nm e il substrato da 728 nm in poi.

11.1.2 Simulazione delle regioni di source-drain con SUPREM

Si studino, utilizzando il simulatore di processo SUPREM, i profili delle concentrazioni di impurità nelle regioni di drain e di source del MOSFET descritto nell'esercizio precedente, rispettando le seguenti specifiche di fabbricazione:

- impiantazione di arsenico a 50 keV con una dose di $5 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-2}$;
- diffusione a 1000 gradi per 15 minuti in ossigeno secco;
- diffusione a 1000 gradi per 15 minuti in vapore;
- diffusione a 1000 gradi per 20 minuti.

Si valuti inoltre la profondità delle giunzioni di drain e di source.

La simulazione delle regioni di drain e di source può essere effettuata partendo dalla struttura memorizzata alla fine della simulazione SUPREM effettuata nel precedente esercizio con l'istruzione:

```
SAVEFILE STRUCTURE FILE=MOSGATE
```

La struttura presente nel file MOSGATE è quella relativa alla zona attiva dopo la deposizione del silicio policristallino; occorre a questo punto rimuovere tramite attacco nelle regioni di source e di drain gli strati di polisilicio e di ossido. Si simulano l'impiantazione delle regioni di source e di drain e i successivi processi termici di diffusione (*drive in*) e di ossidazione in vapore.

```
INITIALIZE STRUCTURE=MOSGATE
COMMENT Attacco dello strato di polisilicio e di ossido sul D/S
ETCH POLYSILICON
ETCH OXIDE
COMMENT Impiantazione dell'arsenico delle regioni di drain source
IMPLANT ARSENIC DOSE=5E15 ENERGY=50 GAUSSIAN
DIFFUSION TEMPERATURE=1000 TIME=15 DRYO2
DIFFUSION TEMPERATURE=1000 TIME=15 STEAM
DIFFUSION TEMPERATURE=1000 TIME=20
PRINT LAYER
COMMENT Valutazione della profondità di giunzione
EXTRACT NAME=XJ CHEMICAL NET X.EXTRACT Y=0
ASSIGN NAME=XJ PRINT
COMMENT Andamento delle impurità
PLOT CHEMICAL NET RIGHT=1.5 LINE=2
```

La giunzione si situa a $0,27 \mu\text{m}$ di profondità dalla superficie del silicio; l'andamento delle concentrazioni di impurità è riportata nella figura 11.4.

11.1.3 Simulazione delle operazioni di mascheratura

Utilizzando SUPREM si simuli l'intero processo di fabbricazione per il MOSFET studiato nei due esercizi precedenti. Si descrivano le maschere necessarie all'intero processo e si traccino i profili di drogaggio nelle regioni di gate e di source.

Mediante il simulatore SUPREM è possibile studiare un processo planare come sequenza di passi di mascheratura: infatti pur essendo un simulatore monodimensionale permette di ripetere più volte, per differenti punti, un'analisi monodimensionale. In questo caso risulta utile ripetere l'analisi nel punto di coordinate 0,0 ovvero nel centro del gate, e in 0,2 in corrispondenza del source; i rispettivi profili di drogaggio sono riportati nelle figure 11.3 e 11.4. In SUPREM le maschere, una volta definite, possono essere applicate con l'istruzione MASK APPLY e devono essere rimosse al termine dell'operazione con l'istruzione MASK REMOVE.

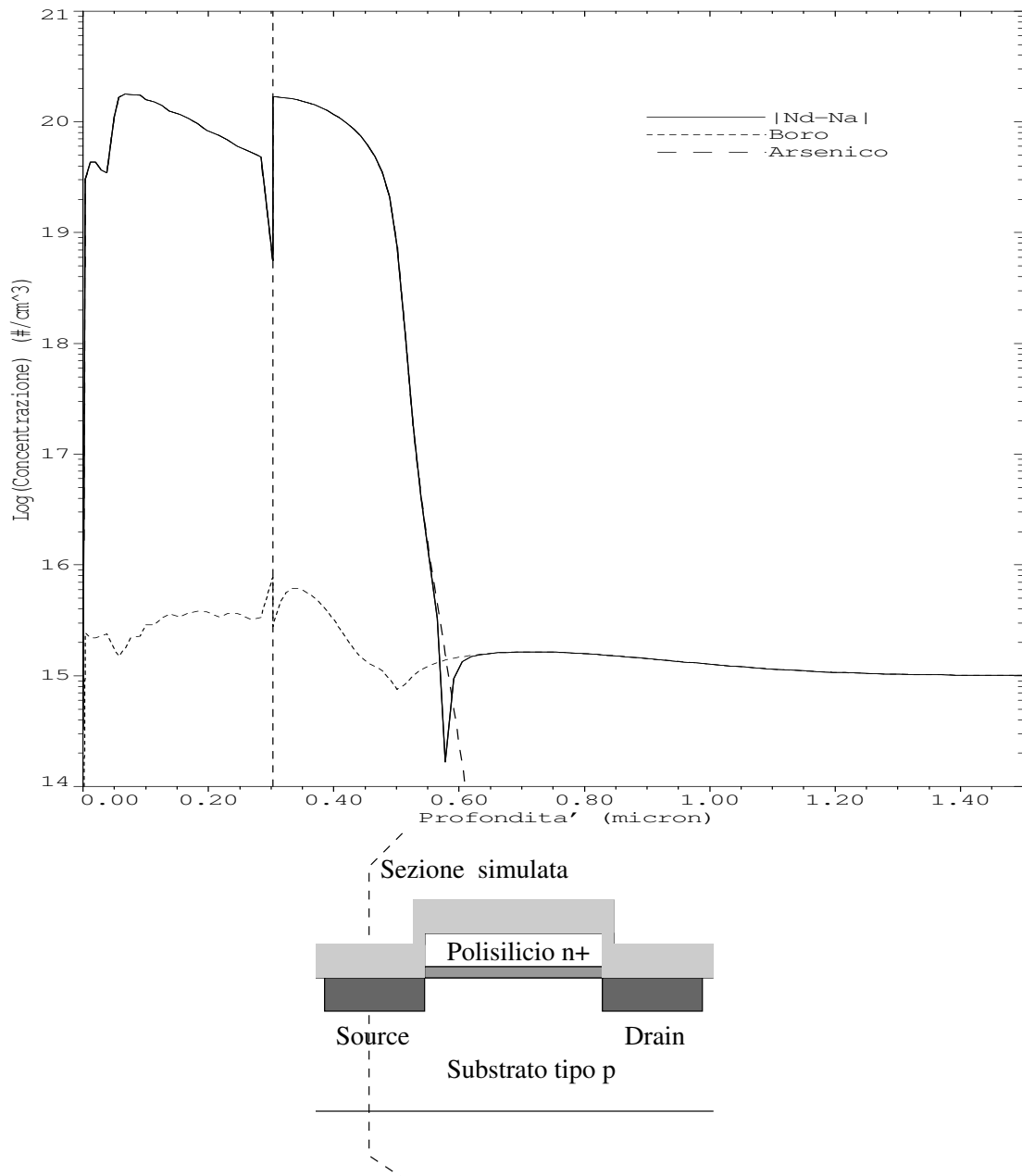


Figura 11.4: Concentrazione totale delle impurità nelle regioni di drain e di source: lo strato di ossido si estende da 0 a 302 nm di profondità e la giunzione di Source a 277 nm dalla superficie del silicio.

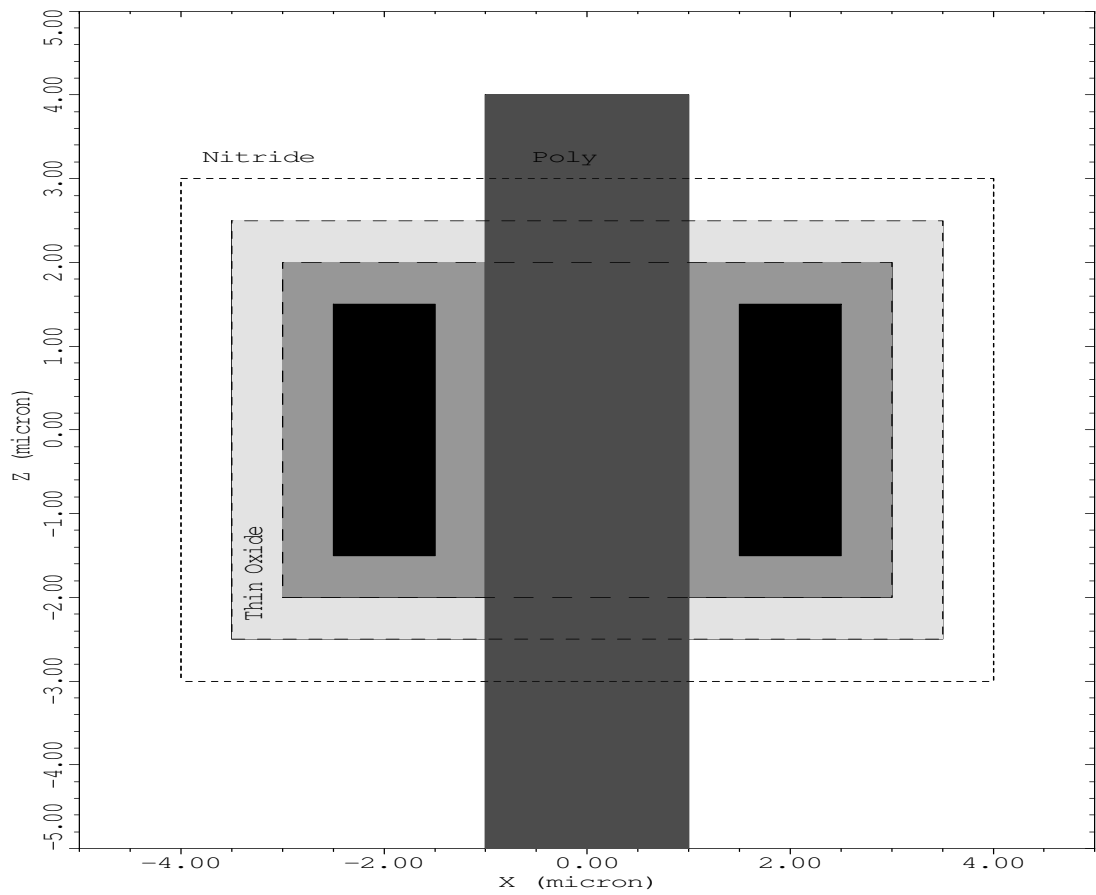


Figura 11.5: Maschere per la fabbricazione N-MOSFET.

```

TITLE      SUPREM-3 Simulazione processo MOS
COMMENT    Definizione delle maschere
MASK      NAME=NITRIDE RECT.1=(-4.0 -3.0 4.0 3.0) CLEAR
MASK      NAME=THINOX RECT.1=(-3.5 -2.5 3.5 2.5)
MASK      NAME=POLY RECT.1=(-1.0 -10.0 1.0 4.0) CLEAR
MASK      NAME=NSD RECT.1=(-2.5 -1.5 1.5 1.5)
MASK      NAME=CONTACT RECT.1=(-2.5 -1.5 1.5 1.5)
+          RECT.2=( 2.5 -1.5 1.5 1.5)
COMMENT    Inizializzazione del substrato di silicio
INITIALIZE < 100 > SILICON BORON=1E15
+          THICKNESS=1.5 DX=.002 XDX=.02 SPACES=120
COMMENT    Simulazione delle regioni di gate e di source
LOOP       STEPS=2
ASSIGN     NAME=XLOC N.VALUE=(0 2)
ASSIGN     NAME=ZLOC N.VALUE=(0 0)
INITIALIZE < 100 > SILICON BORON=1E15
+          X.LOCATION=@XLOC Z.LOCATION=@ZLOC
+          THICKNESS=1.5 DX=.002 XDX=.02 SPACES=120
COMMENT    Crescita dell'ossido di protezione
DIFFUSION  TEMPERATURE=1050 THICKNESS=.05 DRYO2
COMMENT    Deposizione dello strato di nitrato di protezione
DEPOSIT    NITRIDE THICKNESS=.2 DX=.02 SPACES=10
COMMENT    Mascheratura e rimozione del nitrato
MASK      APPLY NAME=NITRIDE
ETCH       NITRIDE
MASK      REMOVE
COMMENT    Crescita dell'ossido di campo
PRINT     LAYER ENABLE
DIFFUSION  TEMPERATURE=1000 TIME=30
+          STEAM PRESSURE=5 PRINT

```

La geometria delle maschere utilizzate nel processo è visualizzata in figura 11.5.

```

COMMENT    Rimozione dalla zona attiva degli strati protettivi
ETCH       OXIDE
ETCH       NITRIDE
MASK      APPLY NAME=THINOX
ETCH       OXIDE THICK=.05
COMMENT    Impiantazione di boro per correzione VT
IMPLANT    BORON DOSE=2E11 ENERGY=50
PRINT     SUMMARY
COMMENT    Crescita dell'ossido di gate ottimizzata
LOOP       OPTIMIZE
ASSIGN     NAME=N2 N.VALUE=0 LOWER=0 UPPER=100 OPTIMIZE
DIFFUSION  TEMP=1000 TIME=40 HCL%=5 F.O2=100-@N2 F.N2=@N2
EXTRACT    NAME=TOX THICKNESS LAYER=2 TARGET=0.4
L.END
PRINT     SUMMARY
COMMENT    Deposizione e drogaggio gate in polisilicio
DEPOSIT    POLYSILICON THICKNESS=0.5 TEMPERATURE=620
DIFFUSION  TEMPERATURE=950 TIME=60 SS.PHOSPHORUS PRINT
SAVEFILE   STRUCTURE FILE=MOSGATE
COMMENT    Attacco dello strato di polisilicio e di ossido sul D/S
MASK      APPLY NAME=POLY
ETCH       POLYSILICON
ETCH       OXIDE
MASK      REMOVE
COMMENT    Impiantazione dell'arsenico delle regioni di drain source

```



```

MASK APPLY NAME=NSD
IMPLANT ARSENIC DOSE=5E15 ENERGY=50 GAUSSIAN
MASK REMOVE
DIFFUSION TEMPERATURE=1000 TIME=15 DRYO2
DIFFUSION TEMPERATURE=1000 TIME=15 STEAM
DIFFUSION TEMPERATURE=1000 TIME=20
PRINT LAYER
COMMENT Valutazione della profondità di giunzione
EXTRACT NAME=XJ CHEMICAL NET X.EXTRACT Y=0
ASSIGN NAME=XJ PRINT
COMMENT Andamento delle impurità
PLOT CHEMICAL NET nelle due regioni.....
    
```

11.2 Diagramma a bande dei sistemi MOS

In un sistema MOS, indicando con Φ_S e Φ_M i lavori di estrazione rispettivamente nel semiconduttore e nel metallo, la tensione che, applicata al metallo, rende piatte le bande di energia nel semiconduttore vale

$$V_{FB0} = \Phi_M - \Phi_S$$

Il fenomeno per ora tenuto in conto è esclusivamente quello della differenza delle due funzioni lavoro, di qui il simbolo V_{FB0} ; altri fenomeni possono modificare tale valore, per esempio le cariche superficiali all'interfaccia ossido semiconduttore e le cariche all'interno dell'ossido. In generale in un semiconduttore la relazione che lega la concentrazione dei portatori alla posizione del livello di Fermi è data da:

$$\begin{aligned} n_p &= n_i e^{(E_F - E_i)/kT} \\ p_p &= n_i e^{(E_i - E_F)/kT} \end{aligned}$$

I vari fenomeni che si verificano nella struttura MIS (metallo isolante semiconduttore) si determinano osservando il diagramma a bande all'interfaccia isolante-semiconduttore.

In particolare si indicano con:

$q\Phi_p$, la differenza $E_f - E_i$ all'interno del semiconduttore (negativo in un materiale p),
 $q\Phi(x)$, la differenza tra il valore di E_F (costante in tutto il semiconduttore) e il valore corrente di $E_i(x)$,

$q\Phi_s$, valore di $q\Phi(x)$ all'interfaccia isolante semiconduttore.

Per un semiconduttore di tipo p si ha quindi

$(V_G - V_{FB})$	Φ_s	Cond. super.	Densità
Negativa	$ \Phi_s > \Phi_p $	accumulo	$p_s > N_a$
0	$ \Phi_s = \Phi_p $	neutralità	$p_s = N_a$
Positiva	$ \Phi_s < \Phi_p $	svuotamento	$n_i < p_s < N_a$
Positiva	0	intrinseco	$p_s = n_i$
Positiva	$ \Phi_s < \Phi_p $	inversione	$n_s < N_a$
Positiva	$\Phi_s = -\Phi_p$	forte inversione	$n_s = N_a$

Le tensioni di soglia per un MOSFET a canale n e a canale p sono date rispettivamente da

$$V_{Tn} = V_{FB} + V_S + 2|\Phi_p| + \frac{1}{C_{ox}} \sqrt{2q\epsilon_s N_a (2|\Phi_p| + V_S - V_B)}$$

$$V_{Tp} = V_{FB} + V_S - 2|\Phi_n| - \frac{1}{C_{ox}} \sqrt{2q\epsilon_s N_d (2|\Phi_n| + V_S - V_B)}$$

Se si definisce come parametro dell'effetto di substrato

$$\gamma = \frac{\sqrt{2\epsilon_s q N_a}}{C_{ox}}$$

per la tensione di soglia V_{T0} ottenuta con $V_S = V_B = 0$ vale la relazione

$$V_{T0} = V_{FB} + 2|\Phi_p| + \gamma\sqrt{2|\Phi_p|}$$

mentre applicando una tensione al substrato si ha

$$V_T = V_{T0} + V_S + \gamma(\sqrt{2|\Phi_p| + V_S - V_B} - \sqrt{2|\Phi_p|})$$

11.2.1

Si considerino due sistemi Metallo-Ossido-Semiconduttore costituiti da alluminio, biossido di silicio di spessore 300 Å e, rispettivamente, silicio di tipo n drogato con $N_d = 5 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ e silicio di tipo p con $N_a = 1,3 \times 10^{16} \text{ cm}^{-3}$. Si traccino i diagrammi a bande per questi due sistemi nelle seguenti condizioni:

- a) all'equilibrio termico;*
- b) in condizioni di banda piatta.*

a)

Nel caso del semiconduttore di tipo n con concentrazione di drogante pari a $N_d = 5 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$, è possibile calcolare la posizione del livello di Fermi nel semiconduttore lontano dalla superficie come

$$E_C - E_F = kT \ln \frac{N_C}{N_d} = 0,22 \text{ eV}$$

Per le grandezze necessarie a tracciare il diagramma a bande si ha:

$$\begin{array}{ll} \text{Al} & : \quad q\Phi_M = 4,1 \text{ eV} \\ \text{Si} & : \quad q\chi = 4,05 \text{ eV} \\ & \quad q\Phi_S = q\chi + E_C - E_F = 4,27 \text{ eV} \\ \text{SiO}_2 & : \quad q\chi = 0,95 \text{ eV} \\ & \quad E_g = 8 \text{ eV} \end{array}$$

Inoltre il valore della barriera di potenziale tra il metallo e l'ossido vale

$$q\Phi_M - q\chi_{ox} = (4,1 - 0,95) \text{ eV} = 3,15 \text{ eV}$$

mentre per la barriera di potenziale tra silicio e ossido si ha

$$q\chi - q\chi_{ox} = (4,05 - 0,95) \text{ eV} = 3,1 \text{ eV}$$

Con i dati disponibili è possibile tracciare il diagramma a bande soltanto in modo qualitativo, in quanto per poterlo tracciare in modo accurato sarebbe necessario calcolare la caduta di tensione sui 300 Å di ossido. La tensione di banda piatta vale

$$V_{FB} = \Phi_M - \Phi_S = (4,1 - 4,27) \text{ V} = -0,17 \text{ V}$$

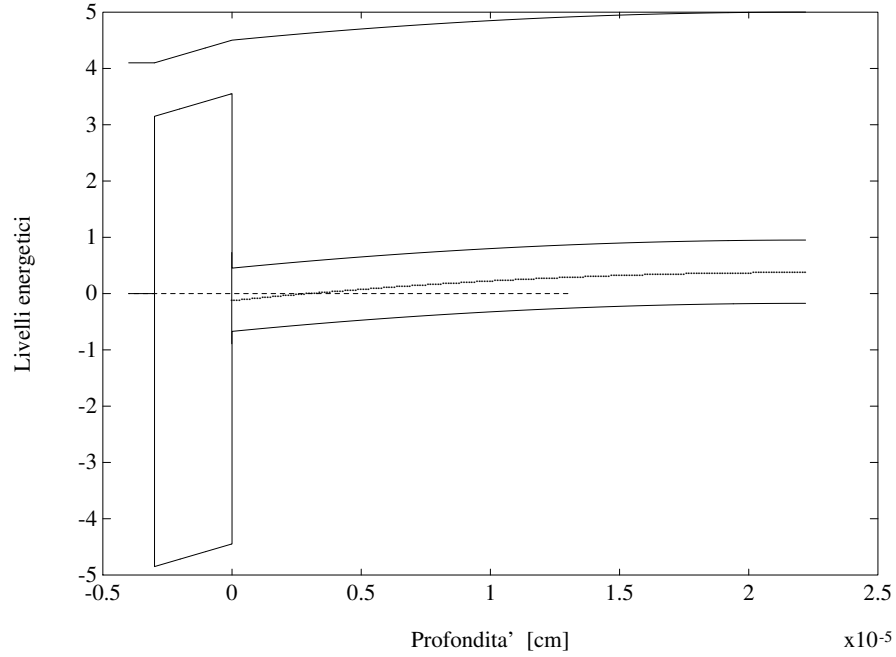


Figura 11.6: Diagramma a bande per il sistema MOS costituito da alluminio, SiO_2 e silicio drogato di tipo p con $N_a = 1,3 \times 10^{16} \text{ cm}^{-3}$.

b)

Nel caso di semiconduttore di tipo p con concentrazione $N_a = 1,3 \times 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ è possibile costruire il diagramma a bande qualitativo all'equilibrio termodinamico procedendo allo stesso modo del caso precedente.

$$E_F - E_V = kT \ln \frac{N_V}{N_a} = 0,17 \text{ eV}$$

$$q\Phi_S = q\chi + E_g - (E_F - E_V) = 5 \text{ eV}$$

E quindi la tensione di banda piatta è

$$V_{FB} = \Phi_M - \Phi_S = -0,9 \text{ V}$$

È quindi necessario applicare una tensione negativa pari a 0,9 V al metallo per portare il sistema in condizione di banda piatta.

11.2.2

Si consideri la struttura MOS del problema 11.2.1 con silicio drogato di tipo p e si calcoli la frazione della tensione di contatto (tensione di banda piatta) che cade sullo strato di ossido. Si traccino i diagrammi a bande all'equilibrio termodinamico.

Ipotesi: si suppone che all'equilibrio la carica totale nel canale sia solo quella dovuta alla zona svuotata, ovvero si trascura la carica dello strato di inversione eventualmente presente all'equilibrio termodinamico.

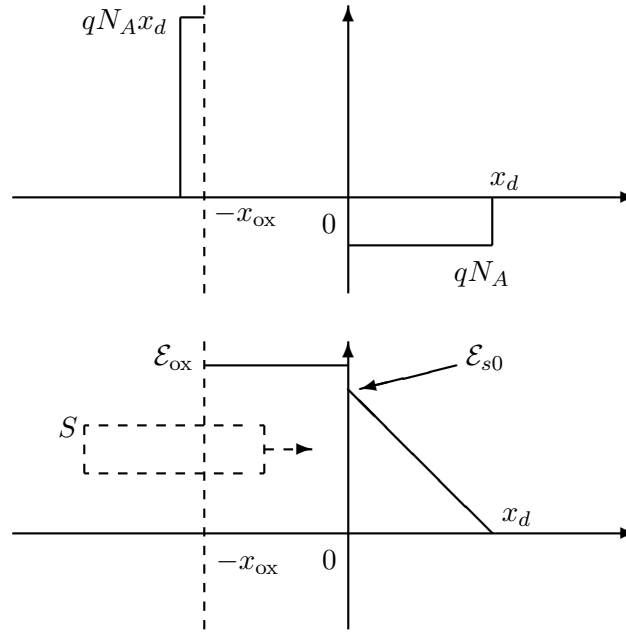


Figura 11.7: Andamento qualitativo della carica spaziale nella struttura MOS e del corrispondente campo elettrico.

Se la carica totale nel canale è solo quella dovuta alla zona svuotata e se vale l'ipotesi di completo svuotamento, la densità di carica $\rho(x)$ è

$$\rho(x) = qN_a x$$

Il valore del campo elettrico si ottiene applicando l'equazione di Poisson alla distribuzione di carica

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon}$$

Integrando si ottiene l'andamento riportato nella figura 11.7 dove si può notare che il campo elettrico presenta una discontinuità dovuta ai differenti valori della costante dielettrica. Si tratta di un andamento qualitativo in quanto l'estensione nel semiconduttore della distribuzione di carica fissa dipende da come si ripartisce il potenziale di contatto tra ossido e semiconduttore.

Per calcolare l'intensità del campo nell'ossido \mathcal{E}_{ox} , si applica il teorema di Gauss al cilindro di sezione S che attraversa la superficie di interfaccia tra metallo e ossido in $x = -x_{ox}$. Considerando il caso in cui l'ossido sia ideale, cioè privo di cariche intrappolate al suo interno o all'interfaccia, semplici considerazioni di neutralità elettrica complessiva portano a concludere che tale cilindro contiene (sulla superficie metallica) la carica $SqN_a x_d$. Quindi:

$$\int_s \mathcal{E} dS = \frac{Q}{\epsilon_{ox}} = \frac{qN_a S x_d}{\epsilon_{ox}} = \mathcal{E}_{ox} S$$

da cui si ottiene

$$\mathcal{E}_{ox} = \frac{qN_a}{\epsilon_{ox}} x_d$$

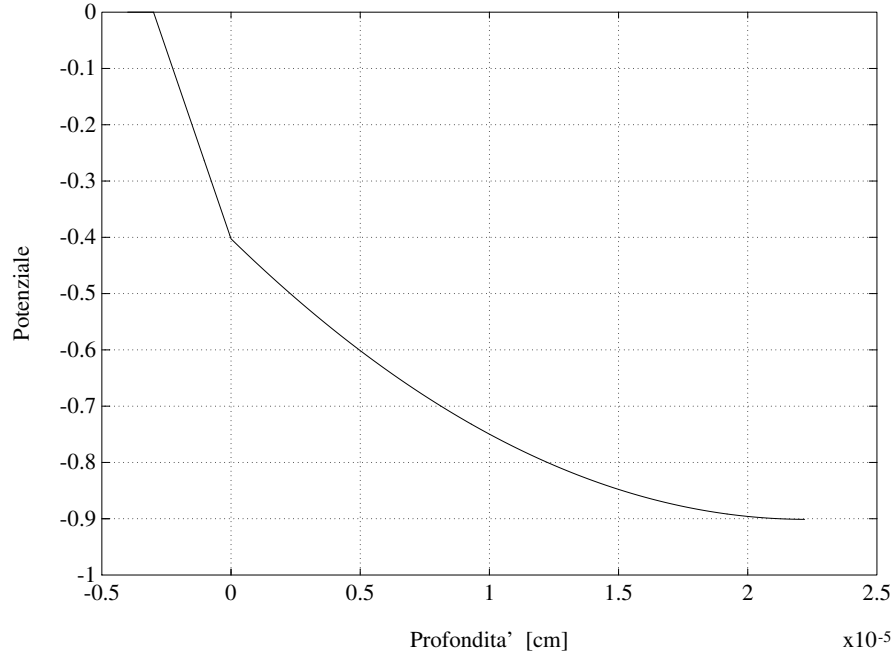


Figura 11.8: Andamento del potenziale nel sistema metallo-ossido-semiconduttore.

Integrando l'equazione di Poisson nel semiconduttore procedendo verso l'interfaccia, si ottiene l'intensità del campo \mathcal{E}_{s0} nel silicio all'interfaccia ossido-semiconduttore

$$\mathcal{E}_{s0} = \int_{x_d}^0 \frac{\rho}{\epsilon_s} dx = \frac{qN_a}{\epsilon_s} x_d$$

L'espressione avrebbe potuto anche essere ottenuta dalla condizione dalla continuità del vettore spostamento dielettrico all'interfaccia ossido semiconduttore

$$\epsilon_{\text{ox}} \mathcal{E}_{\text{ox}} = \epsilon_s \mathcal{E}_{s0} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{E}_{s0} = \mathcal{E}_{\text{ox}} \frac{\epsilon_s}{\epsilon_{\text{ox}}}$$

Se V_{ox} e V_s sono le cadute di tensione sull'ossido e sulla regione di carica spaziale del semiconduttore, le espressioni per campo elettrico e potenziale sono le seguenti:

Ossido	Silicio
$\mathcal{E}_{\text{ox}} = \frac{qN_a}{\epsilon_{\text{ox}}} x_d$	$\mathcal{E}_{s0} = \frac{qN_a}{\epsilon_s} x_d$
$V_{\text{ox}} = \mathcal{E}_{\text{ox}} x_{\text{ox}}$	$V_s = \frac{1}{2} \mathcal{E}_{s0} x_d$
$V_{\text{ox}} = \frac{qN_a}{\epsilon_{\text{ox}}} x_d x_{\text{ox}}$	$V_s = \frac{qN_a}{2\epsilon_s} x_d^2$

Indipendentemente dallo spessore dell'ossido,

$$-V_{FB} = V_{ox} + V_s$$

è quindi possibile organizzare le equazioni in un sistema di due equazioni nelle due incognite V_{ox} e x_d

$$x_d = \sqrt{\frac{2\epsilon_s}{qN_a} V_s} = \sqrt{\frac{2\epsilon_s}{qN_a} (-V_{FB} - V_{ox})}$$

$$V_{ox} = x_{ox} \mathcal{E}_{ox} = x_{ox} \frac{\epsilon_s}{\epsilon_{ox}} \mathcal{E}_{s0} = x_{ox} \frac{\epsilon_s}{\epsilon_{ox}} \frac{qN_a}{\epsilon_s} x_d$$

da cui

$$x_d = V_{ox} \frac{\epsilon_{ox}}{x_{ox}} \frac{1}{qN_a}$$

Eguagliando le due relazioni per x_d ed esprimendo tutto in funzione di V_{ox} si ottiene:

$$V_{ox} = \frac{1}{C_{ox}} qN_a \sqrt{\frac{2\epsilon_s}{qN_a} (-V_{FB} - V_{ox})}$$

$$C_{ox}^2 V_{ox}^2 = 2\epsilon_s qN_a (-V_{FB} - V_{ox})$$

che porta all'equazione di secondo grado

$$V_{ox}^2 + 2 \frac{\epsilon_s qN_a}{C_{ox}^2} V_{ox} + \frac{2\epsilon_s qN_a V_{FB}}{C_{ox}^2} = 0$$

Introducendo i valori numerici del problema

$$\begin{aligned} C_{ox} &= \frac{\epsilon_{ox}}{x_{ox}} = 3,9 \cdot 10^{-9} \text{ F/cm}^2 \\ x_{ox} &= 300 \text{ \AA} = 0,3 \cdot 10^{-5} \text{ cm} \end{aligned}$$

e risolvendo l'equazione si ottiene $V_{ox} = 0,4027 \text{ V}$. La percentuale della tensione di banda piatta che cade sull'ossido è quindi

$$\frac{0,402}{0,90} \times 100 = 45,65\%$$

L'ampiezza della regione di svuotamento vale allora

$$x_d = \sqrt{\frac{2\epsilon_s}{qN_a} (-V_{FB} - V_{ox})} = 0,223 \text{ }\mu\text{m}$$

Il diagramma a bande della regione di interfaccia è riportato nella figura 11.9. Un modo alternativo per trovare x_d consiste semplicemente nello scrivere la tensione di banda piatta sostituendo per ogni termine l'espressione riportata nella tabella

$$-V_{FB} = V_{ox} + V_s = \frac{qN_a}{\epsilon_{ox}} x_d x_{ox} + \frac{qN_a}{2\epsilon_s} x_d^2$$

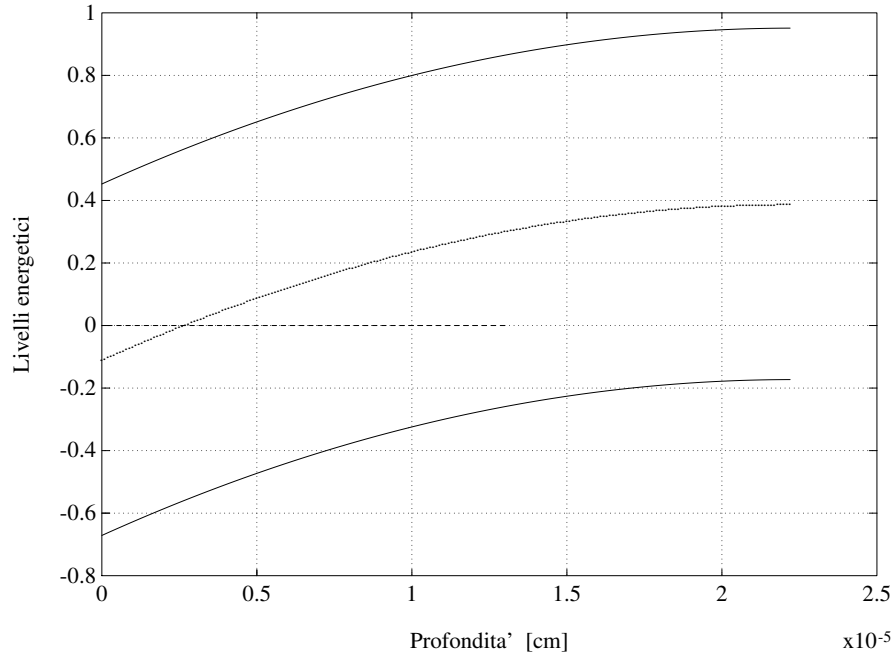


Figura 11.9: Diagramma a bande del sistema MOS con ossido spesso 300 Å all'interfaccia ossido-semiconduttore.

11.2.3

Si valuti la concentrazione dei portatori liberi nella zona di svuotamento e all'interfaccia ossido semiconduttore nella struttura MOS considerata nei problemi 11.2.1 e 11.2.2.

11.3 Tensione di soglia in un MOSFET

11.3.1 V_T di un MOSFET con gate in alluminio

Per le strutture MOS considerate nel problema 11.2.1, a) si determini l'espressione della tensione di soglia, supponendo che il canale derivante dal fenomeno dell'inversione sia in condizioni di equilibrio termodinamico, ovvero a potenziale nullo ($V_C = 0$), e che il substrato si trovi anch'esso a potenziale nullo $V_B = 0$; b) si calcoli la tensione di soglia se lo spessore dell'ossido è di 300 Å, il drogaggio $N_a = 1,3 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ e il gate è in alluminio.

a)

Cominciando ad analizzare il sistema realizzato con silicio drogato di tipo p si traccia il diagramma a bande in equilibrio. Particolare rilievo assumono le grandezze

$$q\Phi_p = E_f - E_i$$

nel corpo del semiconduttore e

$$q\Phi_S = E_f - E_i$$

all'interfaccia: tali grandezze, attraverso le equazioni di Schokley, forniscono le concentrazioni dei portatori liberi e sono quindi degli *indicatori* della condizione del semiconduttore nelle varie sezioni del sistema MOS. La definizione della tensione di soglia in un sistema MOS è legata alla condizione di forte inversione, nella quale la concentrazione

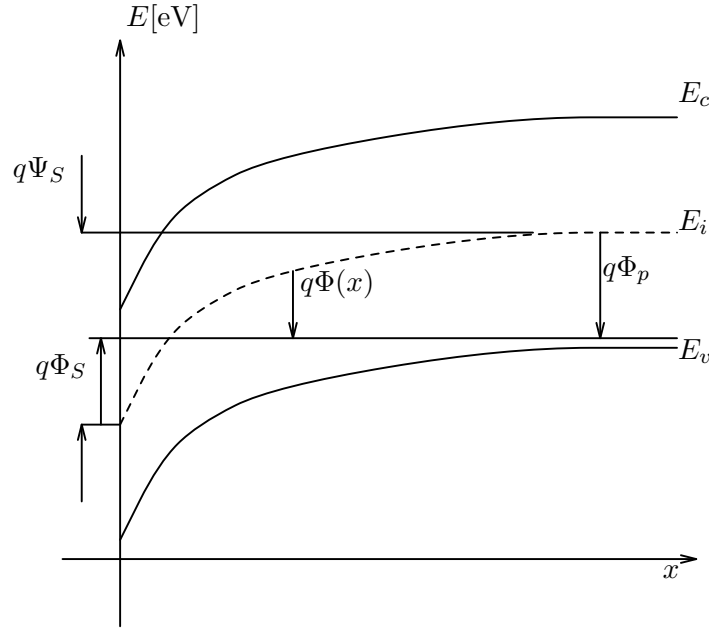


Figura 11.10: Diagramma a bande del sistema MOS con silicio di tipo p, in condizione di inversione.

dei portatori liberi all'interfaccia eguaglia quella di tipo opposto nel corpo del semiconduttore ($\Phi_s = -\Phi_p$). Nella determinazione dell'espressione della tensione di soglia si *manterrà* l'ipotesi che il sistema si trovi in condizione di forte inversione e si cercherà la tensione per la quale la carica dei portatori della popolazione invertita si annulla: il raggiungimento di tale valore di tensione identifica l'innescio del fenomeno.

In realtà la carica totale Q_t all'interno del semiconduttore è somma di due contributi: il primo dovuto alla carica fissa il secondo alla carica di inversione

$$Q_t = Q_d + Q_n$$

La caduta di tensione sulla zona svuotata è

$$V_s = \Phi_p - \Phi_s = \Psi_s$$

Allora, poiché in condizione di forte inversione è $\Phi_s = -\Phi_p$, si ha

$$V_s = 2\Phi_s = -2\Phi_p = \frac{qN_a}{2\epsilon_s}x_d^2$$

quindi l'estensione della regione svuotata di portatori vale

$$x_d = \sqrt{\frac{2\epsilon_s}{qN_a}2(-\Phi_p)} = \sqrt{\frac{4\epsilon_s}{qN_a}|\Phi_p|}$$

La carica elettrica (per unità di area) degli ioni nella zona svuotata vale

$$Q_d = -qN_ax_d = -\sqrt{4\epsilon_sqN_a|\Phi_p|}$$

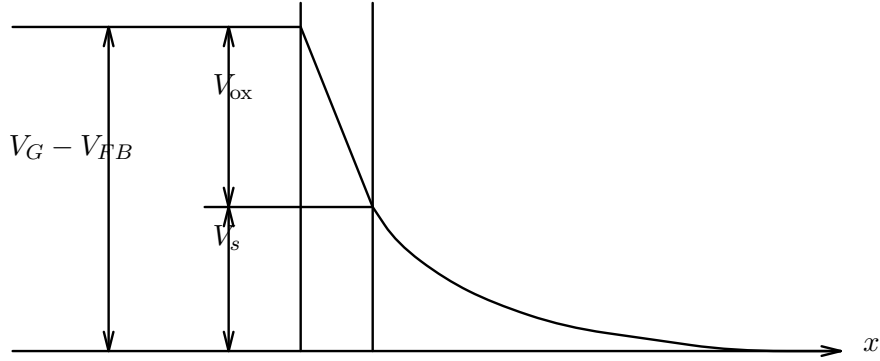


Figura 11.11: Andamento del potenziale nel sistema metallo-ossido-semiconduttore.

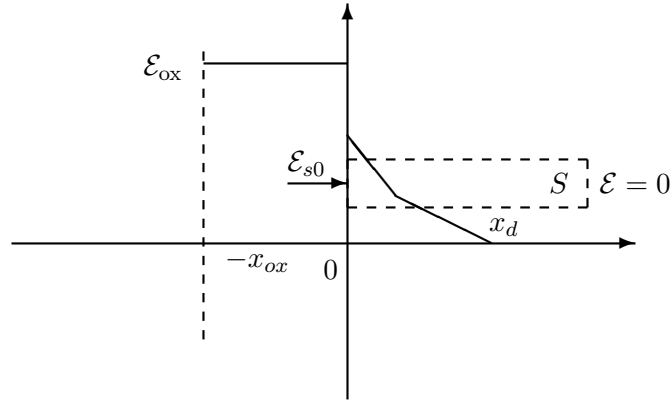


Figura 11.12: Cilindretto posto all'interfaccia ossido-semiconduttore sul quale viene applicato il teorema di Gauss.

Per ottenere la condizione di inversione, si è applicata una tensione V_G sul gate che, depurata del valore che rende piatta le bande dell'ossido e del semiconduttore, deve essere pari alla caduta nell'ossido e a quella nel semiconduttore (ora in forte inversione)

$$V_{ox} + 2|\Phi_p| = V_G - V_{FB}$$

Il campo nell'ossido vale

$$\mathcal{E}_{ox} = \frac{V_{ox}}{x_{ox}} = \frac{1}{x_{ox}}[V_G - V_{FB} - 2|\Phi_p|]$$

Applicando il teorema di Gauss¹ a un cilindretto posto lungo il semiconduttore, in modo da contenere la densità di carica totale per unità d'area Q_t (figura 11.12) e l'interfaccia ossido semiconduttore, si ha per il campo nell'ossido l'espressione

$$\mathcal{E}_{S0} = -\frac{Q_t}{\epsilon_s}$$

Il segno meno deriva dal fatto che il campo \mathcal{E}_{S0} è entrante nel cilindretto. Applicando

¹L'integrale del campo elettrico uscente moltiplicato per la costante dielettrica eguaglia la carica contenuta nel volume.

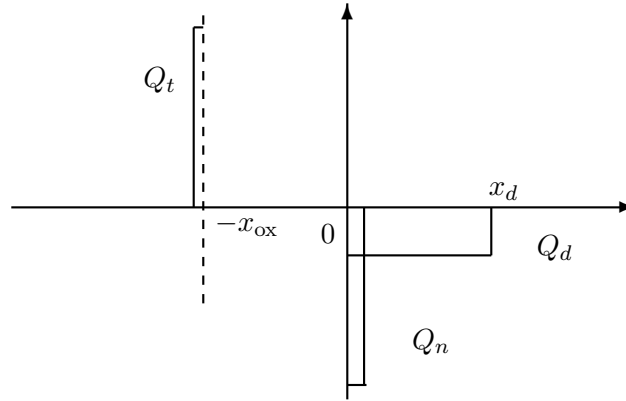


Figura 11.13: Distribuzioni della carica di svuotamento Q_d e della carica della popolazione di inversione Q_n , compensate dalla distribuzione alla superficie del metallo Q_t .

la condizione della continuità del vettore spostamento dielettrico, si ha

$$\begin{aligned}\epsilon_{\text{ox}} \mathcal{E}_{\text{ox}} &= \epsilon_s \mathcal{E}_{S0} \\ Q_t &= -\epsilon_{\text{ox}} \mathcal{E}_{\text{ox}} = -\frac{\epsilon_{\text{ox}}}{x_{\text{ox}}} [V_G - V_{FB} - 2|\Phi_p|]\end{aligned}$$

È quindi possibile esprimere la carica di inversione come

$$Q_n = Q_t - Q_d = -C_{\text{ox}}[V_G - V_{FB} - 2|\Phi_p|] + \sqrt{4\epsilon_s q N_a |\Phi_p|}$$

La tensione di soglia si calcola come la tensione di gate necessaria per avere una carica di inversione Q_n nulla, pur avendo fino a ora supposto che il sistema si trovi in condizione di forte inversione². Quindi imponendo $Q_n = 0$, la soglia $V_G = V_T$ per la formazione del canale è calcolabile come:

$$V_{Tn} = V_{FB} + 2|\Phi_p| + \frac{1}{C_{\text{ox}}} \sqrt{4\epsilon_s q N_a |\Phi_p|}$$

b)

Nel caso in esame, con $N_a = 1,3 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$, si ha

$$\begin{aligned}\Phi_p &= (E_F - E_i) = -0,392 \text{ V} \\ Q_d &= 5,8 \cdot 10^{-8} \text{ C/cm}^2 \\ C_{\text{ox}} &= \frac{\epsilon_{\text{ox}}}{x_{\text{ox}}} = 1,15 \cdot 10^{-7} \text{ F/cm}^2 \\ V_{FB} &= \Phi_M - \Phi_S = \Phi_M - \left[\chi + \frac{1}{2q} E_g + |\Phi_p| \right] = -0,9 \text{ V}\end{aligned}$$

e quindi la tensione di soglia vale $V_{Tn} = 0,39 \text{ V}$.

Per quanto riguarda il MOSFET a canale n, si ha:

$$V_{Tp} = V_{FB} - 2|\Phi_n| - \frac{1}{C_{\text{ox}}} \sqrt{4\epsilon_s q N_d |\Phi_n|}$$

²Il fatto che in realtà esista già della carica invertita nel canale giustifica la presenza di una corrente di conduzione sottosoglia (problema 11.6.5).

Se si considera ancora ideale l'ossido, la tensione di banda piatta coincide con il potenziale di contatto tra alluminio e silicio

$$\begin{aligned} E_C - E_F &= 0,22 \text{ eV} \\ |\Phi_n| &= 0,34 \text{ V} \\ Q_d &= 3,36 \cdot 10^{-8} \text{ C/cm}^2 \end{aligned}$$

e quindi la tensione di soglia vale $V_{Tp} = -1,14 \text{ V}$.

11.3.2 Tensione di soglia di un MOSFET con gate in polisilicio

Si consideri un MOSFET a canale p con

- *substrato drogato con $N_d = 5 \cdot 10^{15}$ atomi donatori per cm^3 ;*
- *gate in silicio policristallino, drogato con $N_a = 10^{19}$ atomi accettori per cm^3 ;*
- *spessore dell'ossido di gate, $x_{ox} = 250 \text{ \AA}$.*

Si calcolino la tensione di banda piatta e la tensione di soglia.

Formalmente la valutazione della tensione di soglia quando il gate è in polisilicio non cambia rispetto al caso del gate in alluminio. La tensione di banda piatta è definita come differenza tra i potenziali di estrazione del gate e del substrato

$$V_{FB} = \Phi_G - \Phi_S$$

Poiché il gate in silicio policristallino è drogato in modo da renderlo degenere, il potenziale di estrazione è sostanzialmente pari all'affinità elettronica

$$\Phi_G = \chi = 4,05 \text{ V}$$

Per il substrato si ha invece

$$\begin{aligned} \Phi_S &= \chi + \frac{E_g}{2q} - \frac{1}{q}(E_F - E_i) \\ \frac{1}{q}(E_i - E_F) &= \Phi_n = \frac{kT}{q} \ln \left(\frac{N_d}{n_i} \right) = 0,391 \text{ V} \end{aligned}$$

Avendo assunto una temperatura $T = 300 \text{ K}$, l'ampiezza della banda proibita nel silicio vale $E_g = 1,12 \text{ eV}$ e la concentrazione intrinseca $n_i = 1,45 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$, si ottiene $\Phi_S = 4,219 \text{ V}$, per cui

$$V_{FB} = (4,05 - 4,219) \text{ V} = -0,169 \text{ V}$$

Per ottenere l'espressione della tensione di soglia di un MOSFET a canale p (problema 11.3.1), si esamina la carica elettrica presente nel canale in condizioni di forte inversione. Questa è dovuta a due contributi: la carica di svuotamento (Q_d), legata agli atomi donatori ionizzati, e la carica di inversione (Q_p), legata alle lacune. Sotto l'ipotesi di completo svuotamento, in condizioni di forte inversione ($V_s = 2|\Phi_n|$) e nell'ipotesi di avere $V_C = V_B = 0$, nella regione svuotata³ si ha

$$Q_d = q N_d x_d = q N_d \sqrt{\frac{2\epsilon_S}{q N_d} 2|\Phi_n|} = \sqrt{4\epsilon_S q N_d |\Phi_n|}$$

³La tensione $V_s = 2|\Phi_n|$ in condizioni di forte inversione tiene conto anche della carica di portatori mobili e non solo di quella della regione svuotata. Il primo contributo però si trascura e si pensa che la tensione che sostiene la regione svuotata sia proprio $2|\Phi_n|$.

Applicando la legge di Gauss al volume tra l'interfaccia ossido-silicio e la regione neutra del silicio (dove il campo è nullo), si ha

$$Q_t = \epsilon_{\text{ox}} \mathcal{E}_{\text{ox}} = Q_d + Q_p$$

Esprimendo il campo nell'ossido in funzione della tensione sull'ossido

$$\mathcal{E}_{\text{ox}} = \frac{V_{\text{ox}}}{x_{\text{ox}}} = \frac{1}{x_{\text{ox}}} (V_{FB} - V_G - 2|\Phi_n|)$$

si può scrivere

$$Q_t = \frac{\epsilon_{\text{ox}}}{x_{\text{ox}}} (V_{FB} - V_G - 2|\Phi_n|)$$

e dunque

$$Q_p = \sqrt{2q\epsilon_S N_d(2|\Phi_n|)} - \frac{\epsilon_{\text{ox}}}{x_{\text{ox}}} (V_G - V_{FB} - 2|\Phi_n|)$$

La tensione di soglia, per convenzione, è il valore di V_G per il quale la carica Q_p è nulla, pur essendo in forte inversione

$$V_{Tp} = V_{FB} - 2|\Phi_n| - \frac{1}{C_{\text{ox}}} \sqrt{2\epsilon_S q N_d(2|\Phi_n|)}$$

Sostituendo i valori si calcola il valore della capacità di gate

$$C_{\text{ox}} = 0,138 \cdot 10^{-6} \text{ F cm}^{-2}$$

della carica di svuotamento

$$Q_d = 6,12 \cdot 10^{-8} \text{ C/cm}^2$$

e della tensione di soglia

$$V_{Tp} = -1,143 \text{ V}$$

11.3.3 Correzione della tensione di soglia

Si consideri un MOSFET a canale n con gate in polisilicio drogato con atomi di fosforo ($N_d = 10^{19} \text{ cm}^{-3}$): lo spessore dell'ossido è $x_{\text{ox}} = 250 \text{ \AA}$ e la concentrazione del substrato $N_a = 2 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$.

a) Si calcoli la tensione di soglia supponendo l'ossido ideale.

b) Si immagini di voler modificare il valore della tensione di soglia tramite un'impiantazione ionica (operazione di "Threshold Adjusting"). Si valuti di quanto debba essere innalzata la concentrazione della regione di canale per portare la tensione di soglia al valore di 0,7 V.

a)

La tensione di soglia per un MOSFET a canale n viene descritta dall'espressione

$$V_{Tn} = V_{FB} + V_C + 2|\Phi_p| + \frac{1}{C_{\text{ox}}} \sqrt{2\epsilon_S q N_a(2|\Phi_p| + V_C - V_B)}$$

dove V_C e V_B sono le tensioni del canale e del substrato. Si valuta la tensione di banda piatta

$$\begin{aligned} V_{FB} &= \Phi_M - \Phi_S \\ q\Phi_S &= q\chi + \frac{1}{2}E_g - (E_F - E_i) \\ E_F - E_i &= -kT \ln \frac{N_a}{n_i} = -0,367 \text{ eV} \\ q\Phi_S &= 4,05 + 0,56 + 0,367 = 4,97 \text{ eV} ; \quad q\Phi_M = 4,05 \text{ eV} \\ V_{FB} &= -0,927 \text{ V} \end{aligned}$$

Il lavoro di estrazione del gate in silicio policristallino viene fatto coincidere con l'affinità elettronica del silicio, dato che per l'elevato drogaggio n^+ il livello di Fermi coincide con E_C . La capacità di gate vale

$$C_{ox} = \frac{\epsilon_{ox}}{x_{ox}} = 0,138 \cdot 10^{-6} \text{ F/cm}^2$$

ed è $\Phi_p = -0,367 \text{ V}$; con $V_C = V_B = 0$ la tensione di soglia vale

$$V_{Tn} = 0,098 \text{ V}$$

b)

Con l'attuale livello di drogaggio del substrato la tensione di soglia risulta ben al di sotto del valore prefissato di $0,7 \text{ V}$. Deve essere effettuata un'impiantazione ionica per modificare la concentrazione negli strati superficiali sotto il gate. Per calcolare la concentrazione a cui il substrato deve essere portato, bisogna risolvere numericamente l'equazione

$$0,7 = -E_g/2 + kT \ln \frac{N'_a}{n_i} + \frac{1}{C_{ox}} \sqrt{4\epsilon_s q N'_a kT \ln \frac{N'_a}{n_i}}$$

Si ottiene, applicando le tecniche descritte nell'appendice A, il valore $N'_a = 5,5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$.

11.4 Tensione di soglia con ossido non ideale

In un sistema MOS, indicando con Q_f la densità di carica superficiale all'interfaccia ossido semiconduttore e con $\rho(x)$ la distribuzione della densità di carica all'interno dell'ossido, la tensione di banda piatta non è più $V_{FB0} = \Phi_M - \Phi_S$, ma diventa

$$V_{FB} = V_{FB0} - \frac{Q_f}{C_{ox}} - \frac{1}{C_{ox}} \int_0^{x_{ox}} \frac{x}{x_{ox}} \rho(x) dx$$

dove x_{ox} è lo spessore dell'ossido e C_{ox} è la capacità per unità di area dell'ossido.

11.4.1 Effetto della carica superficiale

Si calcoli la tensione di soglia per i sistemi MOS dei problemi 11.2.1 e 11.3.1 supponendo che l'ossido non sia ideale, ma che presenti una carica positiva all'interfaccia con densità pari a $Q_f/q = 5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$.

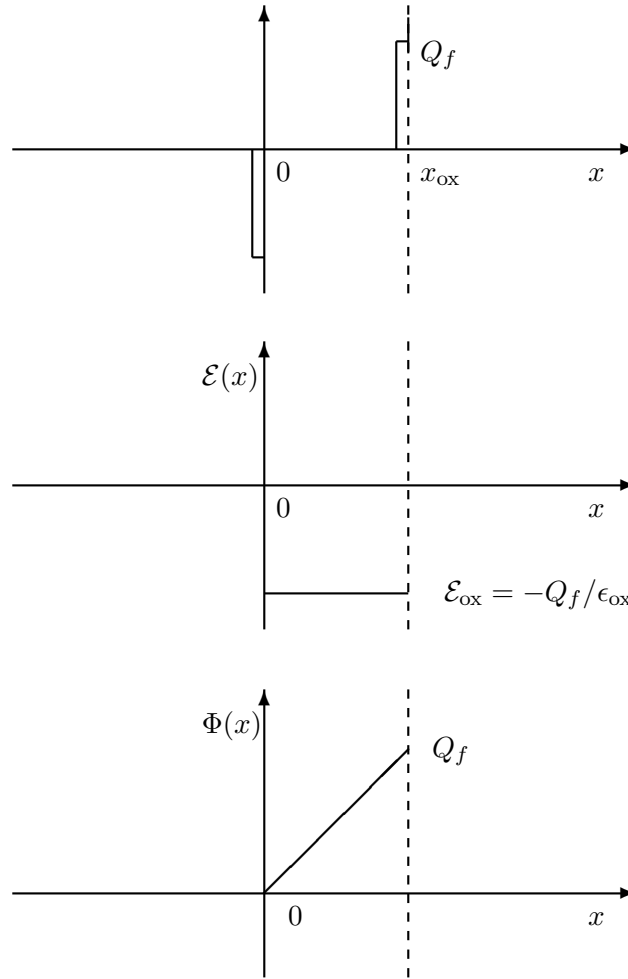


Figura 11.14: Distribuzione della carica nell'ossido, del campo e del potenziale associati.

In un sistema MOS reale non è possibile trascurare il fatto che l'ossido non è ideale ma presenta cariche all'interfaccia e in profondità, che modificano il valore della tensione di banda piatta e quindi la tensione di soglia.

Si può ragionare qualitativamente. La presenza di carica positiva all'interfaccia aumenta la quantità di carica dello strato di svuotamento, occorre quindi una tensione maggiore, in valore assoluto, per raggiungere la condizione di banda piatta; fisicamente, quando si raggiunge la condizione di banda piatta, la carica intrappolata è compensata dalla carica nel metallo.

$$\frac{Q_f}{q} = 5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2} \quad Q_f = 8 \cdot 10^{-8} \text{ C/cm}^2$$

Per entrambi i MOSFET, sia a canale n che a canale p, la carica all'interfaccia modifica la tensione di banda piatta di un termine pari a

$$\frac{Q_f}{C_{ox}} = \frac{8 \cdot 10^{-8}}{1,15 \cdot 10^{-7}} = 0,695 \text{ V}$$

Per quanto riguarda il transistor NMOS, la tensione di banda piatta e la corrispondente

tensione di soglia diventano

$$\begin{aligned} V_{FB} &= \Phi_{MS} - \frac{Q_f}{C_{ox}} = -0,9 - 0,695 = -1,595 \text{ V} \\ V_{Tn} &= V_{FB} + 2|\Phi_p| + \frac{1}{C_{ox}} \sqrt{4\epsilon_s q N_a |\Phi_p|} = -0,305 \text{ V} \end{aligned}$$

La presenza di una carica all'interfaccia diminuisce il valore della tensione di soglia rispetto alla condizione di ossido ideale, rendendola in questo caso addirittura negativa.

Per quanto riguarda il sistema MOS con substrato di tipo n con $N_d = 5 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ si ha

$$\begin{aligned} V_{FB} &= \Phi_{MS} - \frac{Q_f}{C_{ox}} = -0,17 - 0,695 = -0,865 \text{ V} \\ V_{Tp} &= V_{FB} - 2|\Phi_n| - \frac{1}{C_{ox}} \sqrt{4\epsilon_s q N_d |\Phi_n|} = -1,835 \text{ V} \end{aligned}$$

Si possono fare due considerazioni:

- 1) la tensione di soglia in un PMOS (substrato di tipo n) con un ossido non ideale tende a **crescere** in modulo (nell'espressione della tensione di soglia tutti i contributi sono comunque negativi);
- 2) la tensione di soglia in un NMOS (substrato di tipo p) al contrario si riduce in modulo e può **cambiare** segno (creando problemi di affidabilità tecnologica e conseguenti problemi di utilizzo circuitale⁴).

11.4.2 Effetto della carica nell'ossido

Si assuma che il MOSFET a canale n del problema 11.3.1 sia sottoposto a un'iniezione di elettroni caldi, dovuta all'azione del campo lungo il canale e tale da generare una corrente di gate I_g di 10 pA. La corrente di gate produce una distribuzione uniforme di cariche negative nell'ossido che fa variare nel tempo la tensione di banda piatta. Si determini dopo quanto tempo la tensione di soglia vale 5 V, sapendo che la frazione di elettroni iniettati che restano intrappolati nell'ossido è pari a $f = 1 \cdot 10^{-6}$ e l'area della regione di gate è $S = 4 \mu\text{m}^2$.

La presenza di una corrente di gate induce l'instaurarsi di una distribuzione uniforme di carica negativa nell'ossido

$$q\rho(x) = -\frac{I_g}{Sx_{ox}} \cdot f t$$

con conseguente variazione nel tempo della tensione di banda piatta rispetto al caso di ossido ideale

$$\begin{aligned} V_{FB}(t) &= V_{FB0} + \frac{1}{C_{ox}} \int_0^{x_{ox}} \frac{x}{x_{ox}} \cdot \frac{I_g}{Sx_{ox}} \cdot f t dx \\ &= V_{FB0} + \frac{x_{ox}^2}{2\epsilon_{ox}} \cdot \frac{I_g}{Sx_{ox}} \cdot f t \end{aligned}$$

⁴Storicamente questo fatto determinò l'affermarsi, almeno inizialmente, delle logiche p-MOS.

L'effetto sulla tensione di soglia risulta essere:

$$\begin{aligned} V_{Tn}(t) &= V_{Tn}(0) + \frac{x_{ox}^2}{2\epsilon_{ox}} \cdot \frac{I_g}{Sx_{ox}} \cdot f \cdot t \\ V_{Tn}(t_1) &= 0,388 + 3,62 \cdot 10^{-4} \cdot t_1 = 5 \text{ V} \end{aligned}$$

da cui si ottiene $t_1 = 12740\text{s}$ pari a 3,53 ore di funzionamento.

11.5 Effetto di substrato

11.5.1 Compensazione della tensione di soglia tramite l'effetto di substrato

Sia dato un dispositivo *n*-MOSFET ad arricchimento con

- gate in silicio policristallino con $N_d = 2,4 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$;
- substrato di tipo *p*, con $N_a = 8,9 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$;
- spessore dell'ossido di gate 150 nm.

Supponendo che l'ossido non sia ideale ma presenti una distribuzione uniforme di carica positiva pari a $C = 3 \cdot 10^{-3} \text{ C/cm}$, si calcoli la tensione che deve essere applicata al substrato per riportare la tensione di soglia al valore che si avrebbe nel caso di ossido ideale.

Nel caso di ossido ideale, la tensione di banda piatta vale

$$\left. \begin{aligned} \Phi_M &\simeq \chi = 4,05 \text{ V} \\ \Phi_p &= -0,346 \text{ V} \\ \Phi_S &= 4,956 \text{ V} \end{aligned} \right\} \implies V_{FB} = \Phi_M - \Phi_S = -0,906 \text{ V}$$

e la tensione di soglia

$$V_T = V_{FB} + 2|\Phi_p| + \frac{1}{C_{ox}} Q_d = 1,748 \text{ V}$$

Nel caso si abbia una distribuzione di carica nell'ossido, la tensione di banda piatta si modifica

$$\begin{aligned} V_{FB} &= V_{FB0} - \frac{1}{C_{ox}} \int_0^{x_{ox}} \frac{x}{x_{ox}} C dx = V_{FB0} - \frac{1}{C_{ox}} C \frac{1}{x_{ox}} \frac{1}{2} x_{ox}^2 \\ &= V_{FB0} - \frac{C}{2\epsilon_{ox}} x_{ox}^2 = -1,883 \text{ V} \end{aligned}$$

La tensione di soglia, per la presenza della carica nell'ossido, diventa $V'_{Tn} = 0,769 \text{ V}$, e quindi la variazione della tensione di soglia che deve essere indotta polarizzando il substrato è

$$\Delta V_T = \gamma(\sqrt{2|\Phi_p| + |V_{SB}|} - \sqrt{2|\Phi_p|}) = 0,977 \text{ V}$$

il fattore di substrato è calcolabile come:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\sqrt{2\epsilon_s q N_a}}{C_{ox}} = 2,361 \text{ V}^{-1/2} \\ \gamma\sqrt{2|\Phi_p| + |V_{SB}|} &= \Delta V_T + \gamma\sqrt{2|\Phi_p|} \\ |V_{SB}| &= \frac{(\Delta V_T + \gamma\sqrt{2|\Phi_p|})^2}{\gamma^2} - 2|\Phi_p| \end{aligned}$$

Il valore di tensione da applicare al substrato è

$$V_{SB} = 0,859 \text{ V}$$

11.6 MOSFET: Caratteristiche I-V

Nel funzionamento di un MOSFET si distinguono tre regioni fondamentali ⁵:

regione	V_{DS}	I_D
sottosoglia	$V_G < V_T$	$\frac{\mu k T W Q_n(V_S)}{q L} [1 - \exp(\frac{-q V_{DS}}{\xi k T})]$ $\xi = 1 + \frac{1}{2 C_{ox}} \sqrt{\frac{q \epsilon_s N_a}{ \Phi_p }}$ $Q_n(y) \simeq -\frac{k T}{2 q} \sqrt{\frac{q \epsilon_s N_a}{ \Phi_p }} \exp \frac{q [V_G - V_T - (V_C(y) - V_S)]}{\xi k T}$
quadratica	$V_G > V_T$ $V_{DS} < V_G - V_T$	$\frac{\mu_n W}{L} C_{ox} [(V_G - V_T) V_{DS} - \frac{V_{DS}^2}{2}]$
linearizzata	$V_G > V_T$ $V_{DS} \ll V_G - V_T$	$\mu_n C_{ox} \frac{W}{L} (V_G - V_T) V_{DS}$
saturazione	$V_G > V_T$ $V_{DS} \geq V_G - V_T$	$\frac{\mu_n W C_{ox}}{2 L} (V_G - V_T)^2$ $\frac{\mu_n W C_{ox}}{2 L} (V_G - V_T)^2 (1 + \lambda V_{DS})$

con λ fattore di modulazione della lunghezza di canale

11.6.1 Caratteristica di uscita del MOSFET

Sia dato un substrato di tipo p , con concentrazione di drogante $N_a = 2 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$, sul quale si intende realizzare un dispositivo MOS; sono usate le maschere illustrate nella figura 11.15 per delimitare l'area attiva ($M1$) e per formare il gate ($M2$). La tecnologia usata prevede gate in polisilicio, ossido di gate dello spessore di 100 \AA e livello di drogaggio per le zone di source e drain pari a 10^{20} cm^{-3} . Si tracci, quotandolo, il diagramma a bande attraverso la sezione gate-ossido-substrato. Inoltre si tracci la caratteristica di uscita del dispositivo, per tensioni V_{GS} pari a 1 V , 2 V e 5 V .

Per poter tracciare in modo accurato il diagramma a bande è necessario calcolare l'ampiezza della regione di svuotamento; nell'ipotesi che la regione di canale sia completamente svuotata, l'andamento del campo elettrico sarà del tipo illustrato nella figura 11.16. Integrando il campo è possibile scrivere un'equazione in x_d (problema 11.2.2)

$$x_d^2 \left(\frac{q N_a}{2 \epsilon_s} \right) + x_d \left(\frac{q N_a x_{ox}}{\epsilon_{ox}} \right) - |V_{FB}| = 0$$

⁵Le relazioni date valgono per l'analisi del MOSFET a canale lungo ($L \geq 3 \mu\text{m}$) non tenendo conto degli effetti di saturazione della velocità dei portatori, di canale corto e stretto.

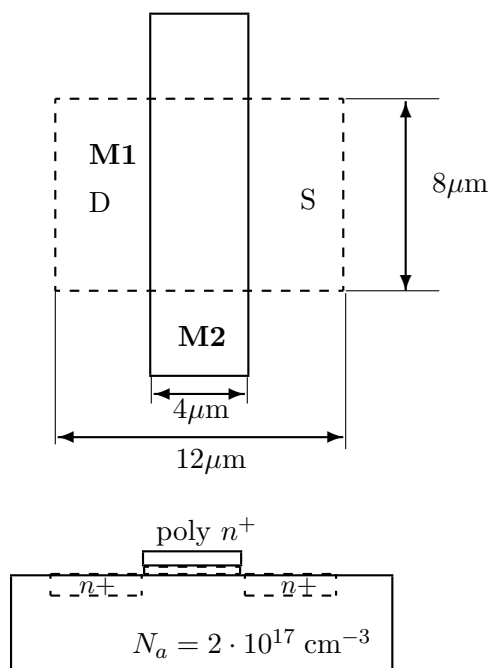


Figura 11.15: Struttura del MOSFET: la maschera a linea tratteggiata rappresenta la regione attiva, quella a tratto continuo la regione di gate.

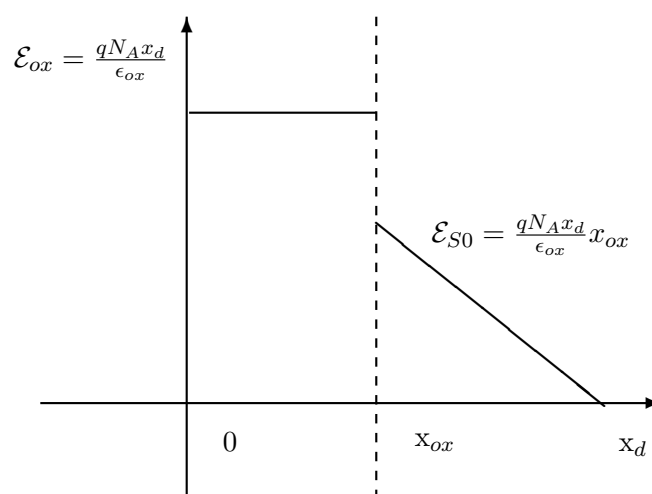


Figura 11.16: Andamento del campo.

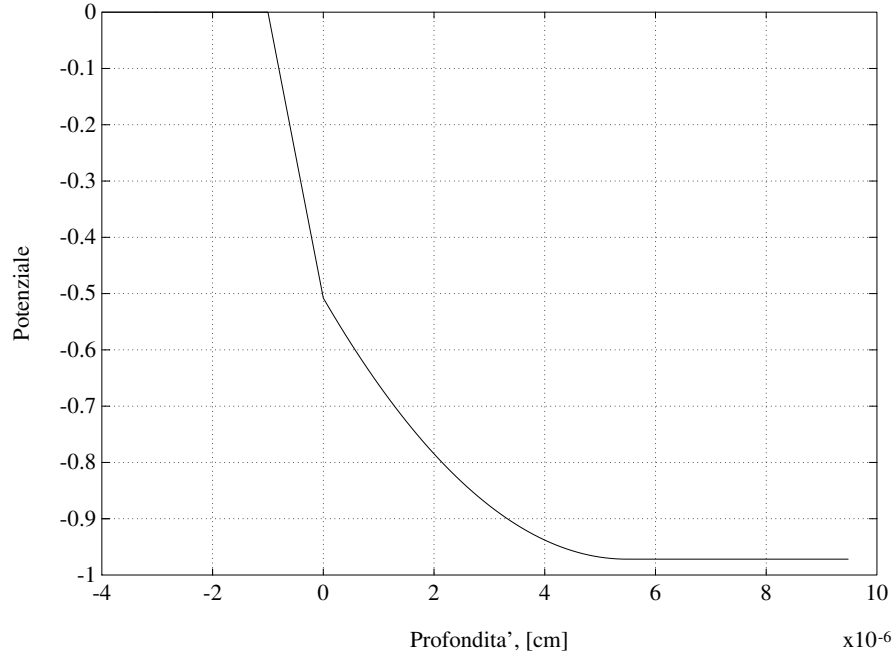


Figura 11.17: Potenziale nella regione di gate: la profondità 0 è l'interfaccia tra l'ossido e il silicio del substrato.

dove

$$\begin{aligned} q\Phi_S &= q\chi + E_g - kT \ln \frac{N_V}{N_a} = 5,07 \text{ eV} \\ qV_{FB} &= q\Phi_M - q\Phi_S = -1,02 \text{ eV} \end{aligned}$$

Risolvendo si ha

$$\begin{aligned} x_d &= 5,66 \cdot 10^{-6} = 0,056 \mu\text{m} \\ V_{ox} &= \frac{qN_a x_d}{\epsilon_{ox}} x_{ox} = 0,52 \text{ V} ; \quad V_s = 0,5 \text{ V} \end{aligned}$$

L'andamento del potenziale e il diagramma a bande sono riportati nelle figure 11.17 e 11.18. Per determinare la tensione di soglia, si calcola

$$C_{ox} = 3,45 \cdot 10^{-7} \text{ F cm}^{-2}$$

e si trova

$$\begin{aligned} q\Phi_p &= -\ln \frac{N_a}{n_i} = -0,427 \text{ eV} \\ V_T &= V_{FB} + 2|\Phi_p| + \frac{1}{C_{ox}} \sqrt{2\epsilon_s q N_a 2|\Phi_p|} = 0,524 \text{ V} \end{aligned}$$

Dato che il canale è lungo $8 \mu\text{m}$, è possibile utilizzare le relazioni I-V relative all'analisi a canale lungo con una mobilità a basso campo $\mu_n = 1417 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$ e la larghezza

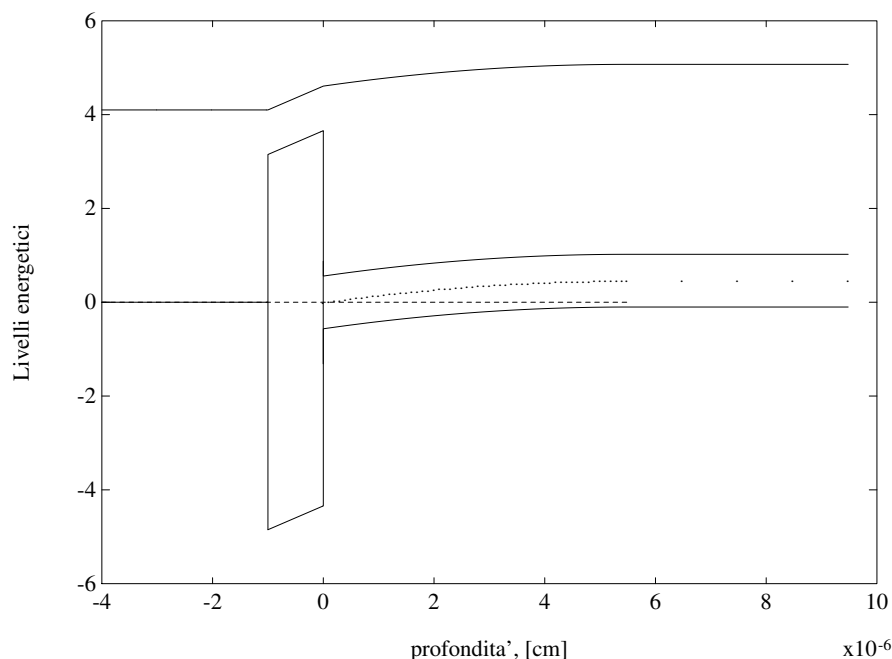


Figura 11.18: Diagramma a bande del MOSFET.

$W = 4 \cdot 10^{-4}$ cm ; quindi

$$\begin{aligned}
 I_{DS_{\text{sat}}} &= \mu_n C_{\text{ox}} \frac{W}{2L} (V_{GS} - V_T)^2 \\
 \mu_n C_{\text{ox}} \frac{W}{2L} &= 1417 \cdot 3,45 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{4}{4} = 4,88 \cdot 10^{-4} \\
 I_{DS} |_{1V} &= 4,88 \cdot 10^{-4} \times (1 - 0,524)^2 = 110 \mu\text{A} \\
 I_{DS} |_{2V} &= 4,88 \cdot 10^{-4} \times (2 - 0,524)^2 = 1063 \mu\text{A} \\
 I_{DS} |_{5V} &= 4,88 \cdot 10^{-4} \times (5 - 0,524)^2 = 9776 \mu\text{A}
 \end{aligned}$$

Le caratteristiche tensione corrente sono tracciate nella figura 11.19: si noti come la zona di saturazione sia raggiunta per valori di V_{DS} tanto più piccoli quanto più è piccola la V_{GS} .

11.6.2

Sia dato un dispositivo *n*-MOSFET ad arricchimento con

- mobilità a basso campo $510 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$;
- gate in silicio policristallino con $N_D = 2,4 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$;
- substrato di tipo *p*, con $N_A = 8,9 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$;
- lunghezza del canale pari a $5 \mu\text{m}$;
- larghezza del canale pari a $2 \mu\text{m}$;
- corrente di saturazione $I_{DS} = 30 \mu\text{A}$ per $V_{GS} = 4 \text{ V}$.

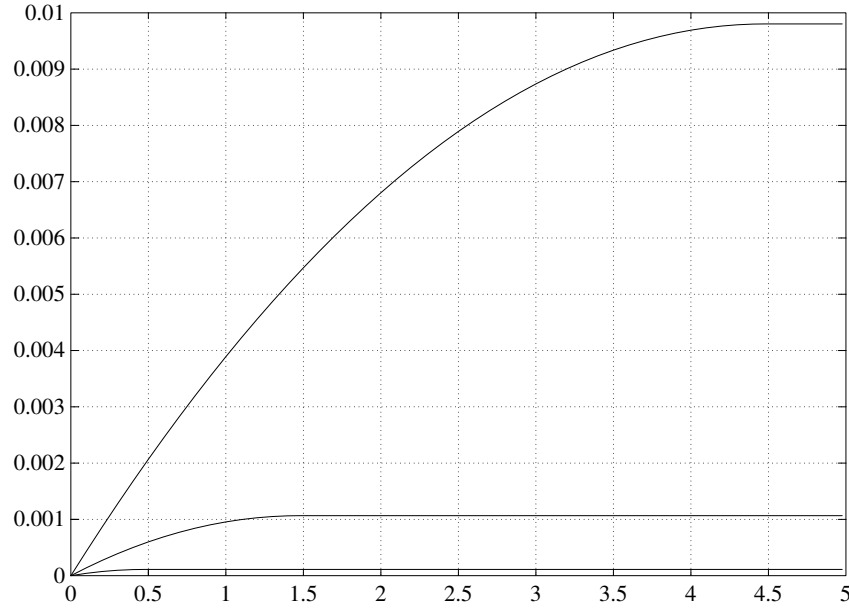


Figura 11.19: Andamento della corrente I_{DS} per $V_{GS}=1,2,5$ V (senza modulazione della lunghezza di canale).

Si ricavano, nell'ipotesi $V_S = V_B = 0$:

- a) lo spessore dell'ossido;
- b) la tecnica più opportuna per accrescere lo strato di ossido richiesto e il tempo necessario, supponendo di operare con $T=1000^\circ\text{C}$, $P=1$ atm;
- c) il valore della tensione di soglia;
- d) il diagramma a bande del sistema gate-ossido-canale, all'equilibrio termodinamico.

La lunghezza del canale permette di applicare l'analisi a *canale lungo*, inoltre considerando la corrente di saturazione e trascurando l'effetto di modulazione della lunghezza di canale si ha

$$I_{DS} = \frac{\mu_n W C_{\text{ox}}}{2L} (V_{GS} - V_T)^2$$

dove la tensione di soglia può essere espressa come

$$V_T = V_{FB} + 2|\Phi_p| + \frac{1}{C_{\text{ox}}} Q_d$$

Il gate è in polisilicio fortemente drogato di tipo n e il lavoro di estrazione vale

$$\begin{aligned} \Phi_M &\simeq \chi = 4,05 \text{ V} \\ E_i - E_f &= kT \ln \frac{N_a}{n_i} = q|\Phi_p| = 0,346 \text{ eV} \\ \Phi_S &= \chi + \left[\frac{1}{2} E_g - (E_f - E_i) \right] \frac{1}{q} = 4,956 \text{ V} \end{aligned}$$

e quindi la tensione di banda piatta

$$V_{FB} = \Phi_M - \Phi_S = -0,906 \text{ V}$$

La carica di svuotamento diventa

$$Q_d = \sqrt{2\epsilon_s q N_a 2|\Phi_p|} = 4,51 \cdot 10^{-8} \text{ C/cm}^2$$

Sostituendo l'espressione della tensione di soglia nella corrente di saturazione

$$I_{DS} = \frac{\mu_n W C_{ox}}{2L} \left[V_G - V_{FB} - 2|\Phi_p| - \frac{1}{C_{ox}} Q_d \right]^2$$

$$I_{DS} = \frac{\mu_n W C_{ox}}{2L} \left[(V_G - V_{FB} - 2|\Phi_p|)^2 + \frac{Q_n^2}{C_{ox}^2} - 2(V_G - V_{FB} - 2|\Phi_p|) \frac{Q_d}{C_{ox}} \right]$$

Riscrivendo l'equazione nell'incognita C_{ox}

$$(V_G - V_{FB} - 2|\Phi_p|)^2 C_{ox}^2 - \left[2(V_G - V_{FB} - 2|\Phi_p|) Q_d + \frac{2L}{\mu_n W} I_{DS} \right] C_{ox} + Q_d^2 = 0$$

Ponendo

$$A = (V_G - V_{FB} - 2|\Phi_p|)^2 = 17,75 \text{ V}^2$$

$$B = 2(V_G - V_{FB} - 2|\Phi_p|) Q_n + \frac{2L}{\mu_n W} I_{DS} = 67,42 \cdot 10^{-8} \text{ V C/cm}^2$$

$$C = Q_d^2 = 3,03 \cdot 10^{-15} \text{ C}^2 \text{ cm}^{-4}$$

si ha

$$C_{ox} = \frac{B \mp \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

quindi lo spessore dell'ossido vale

$$x_{ox} = \frac{2A\epsilon_{ox}}{B \mp \sqrt{B^2 - 4AC}} = \begin{cases} 99,55 \text{ nm} \\ 1047 \text{ nm} \end{cases}$$

Si valuta la tensione di soglia per i due spessori di ossido:

$$V_T = \begin{cases} 0,219 \text{ V} & \text{per } x_{ox} = 99,55 \text{ nm} \\ 4,344 \text{ V} & \text{per } x_{ox} = 1047 \text{ nm} \end{cases}$$

Il secondo valore non ha ovviamente senso, in quanto il MOSFET è in conduzione già con $V_{GS}=4 \text{ V}$.

Per quanto riguarda la crescita di 995 \AA di ossido di gate, la tecnica più opportuna è l'ossidazione in ossigeno secco⁶, che alla temperatura di 1000 gradi e alla pressione di un'atmosfera richiede circa 2 ore, anche se in vapore il tempo di realizzazione si sarebbe ridotto a meno di un terzo.

La determinazione del diagramma a bande all'equilibrio termodinamico richiede il calcolo della frazione della tensione di banda piatta che cade sull'ossido. Si ha

$$V_{ox} + V_s = |V_{FB}| = 0,906 \text{ V}$$

ed essendo

$$|V_{FB}| = \frac{qN_a}{\epsilon_{ox}} x_{ox} x_d + \frac{qN_a}{2\epsilon_s} x_d^2 ; \quad V_s = \frac{qN_a}{2\epsilon_s} x_d^2$$

⁶In realtà per un migliore controllo dello spessore dell'ossido accresciuto si miscela l'ossigeno con una percentuale di circa il 20% di azoto (problema 11.1.1).

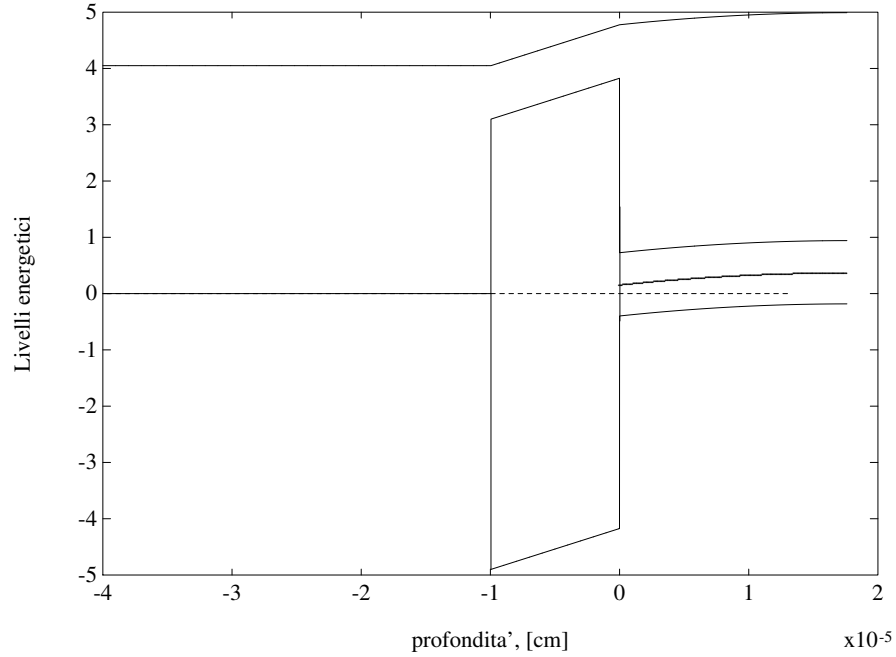


Figura 11.20: Diagramma a bande nella regione di gate.

si ottiene

$$x_d = 0,17 \mu\text{m} ; \quad V_s = 0,196 \text{ V}$$

Per cui il valore della tensione sull'ossido è

$$V_{\text{ox}} = 0,71 \text{ V}$$

Il diagramma a bande è riportato nella figura 11.20.

11.6.3 Scalamento del MOSFET (“scaling down”)

È dato un transistor MOS a canale n con le caratteristiche: lunghezza di canale $L = 6 \mu\text{m}$, larghezza $W = 4 \mu\text{m}$, spessore dell'ossido $x_{\text{ox}} = 500 \text{ \AA}$, drogaggio del substrato $N_a = 5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$, gate in polisilicio e mobilità a basso campo $1417 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Calcolare il valore della potenza dissipata sul dispositivo, quando $V_{GS} = V_{DS} = 5 \text{ V}$. Inoltre, volendo ridurre le dimensioni geometriche del dispositivo di un fattore $K = 2$, mantenendo costante il valore del campo elettrico, si richiede di determinare:

- 1) lo spessore dell'ossido ed il livello di drogaggio del substrato richiesti;
- 2) il valore della tensione di soglia;
- 3) la dissipazione di potenza, quando $V_{GS} = V_{DS} = 2,5 \text{ V}$.

Per la valutazione della dissipazione di potenza il MOSFET è polarizzato come indicato nella figura 11.21, con $V_{GS} = V_{DS} = 5 \text{ V}$. I dati tecnologici del MOSFET consentono di valutare la tensione di soglia, $V_T = 1,48 \text{ V}$, inoltre si possono calcolare la corrente e la potenza dissipata, usando le espressioni dell'analisi a canale lungo,

$$\begin{aligned} V_{GS} - V_T &= 3,52 \text{ V} < V_{DS} \Rightarrow \text{saturazione} \\ I_{DS} &= \frac{1}{2} \mu_n C_{\text{ox}} \frac{W}{L} (V_G - V_T)^2 = 403,8 \mu\text{A} \\ P_D &= I_D V_{DS} = 2,02 \text{ mW} \end{aligned}$$

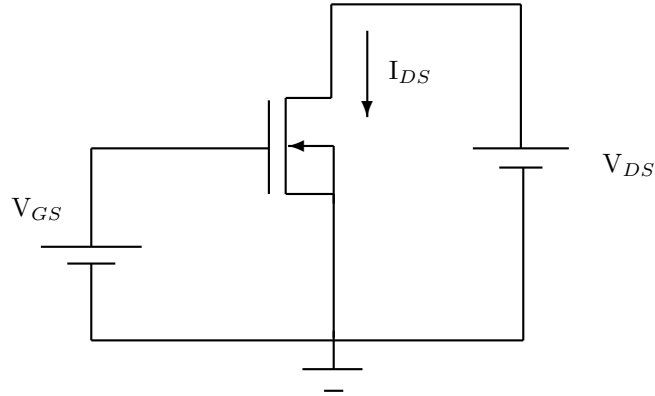


Figura 11.21: Circuito per la polarizzazione del MOSFET.

Effettuando uno scalamento (*scaling down*) a campo costante e con $K=2$, variano le grandezze relative al MOSFET, ma restano ancora applicabili le relazioni del caso di MOS a canale lungo:

- spessore dell'ossido:

$$x'_{\text{ox}} = \frac{1}{K} x_{\text{ox}} = 250 \text{ \AA}$$

- drogaggio substrato:

$$N'_a = N_a K = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$$

- tensione di soglia:

$$\begin{aligned} V'_{FB} &= -0,969 \text{ V} ; & \Phi'_P &= -0,409 \text{ V} \\ C'_{\text{ox}} &= K C_{\text{ox}} = 13,8 \cdot 10^{-8} \text{ F/cm}^2 \end{aligned}$$

quindi la tensione di soglia del MOSFET scalato diminuisce meno di $1/K$

$$V'_T = 1,042 \text{ V} > \frac{V_T}{K}$$

- La corrente di saturazione per $V_{GS} = 2,5 \text{ V}$ diventa

$$I'_{DS} = \frac{1}{2} \mu_n C'_{\text{ox}} \frac{W'}{L'} (V_G - V'_T)^2 = 138,6 \text{ \mu A}$$

e la corrispondente dissipazione di potenza

$$P'_D = 0,346 \text{ mW}$$

Si noti come procedendo ad un riscaldamento del dispositivo a campo costante la potenza dissipata per unità d'area resti praticamente costante: infatti in questo caso il numero di dispositivi integrabili per unità d'area aumenta di circa 4 ma la potenza dissipata per dispositivo si riduce anch'essa di un fattore 5.

11.6.4 Effetto di saturazione di velocità nel canale

Dato un MOSFET con $x_{\text{ox}} = 250 \text{ \AA}$, $V_T = 0,7 \text{ V}$, dimensioni del gate $L = 1,5 \text{ }\mu\text{m}$ e $W = 3 \text{ }\mu\text{m}$, sapendo che la velocità massima per i portatori nel canale è pari a $v_{\text{max}} = 4,7 \cdot 10^6 \text{ cm s}^{-1}$, calcolare il valore di mobilità, il campo elettrico longitudinale, la tensione e la corrente di saturazione per $V_{DS} = 5 \text{ V}$ e V_G compreso tra 1 e 5 V (si assuma per la mobilità a basso campo il valore di $510 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$). Si confrontino i valori di tensione e di corrente di saturazione con quelli ottenuti trascurando il fenomeno della saturazione di velocità dei portatori (analisi a canale lungo).

La mobilità, per valori elevati del campo elettrico, può essere espressa in funzione del campo con una relazione approssimata del tipo

$$\mu = \mu_0 \frac{1}{1 + \frac{\mu_0}{v_{\text{max}}} \mathcal{E}}$$

dove $\mu_0 = 510 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$ è la mobilità per valori bassi del campo elettrico. Con $V_{DS} = 5 \text{ V}$ e un canale lungo $L = 1,5 \text{ }\mu\text{m}$, il campo longitudinale vale

$$\mathcal{E} = \frac{V_{DS}}{L} = 33,3 \text{ kV cm}^{-1}$$

e la mobilità

$$\mu = 110,46 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

La corrente attraverso il dispositivo, tenendo conto della dipendenza della velocità dal campo elettrico, si può esprimere come

$$I_{DS} = \mu_0 C_{\text{ox}} \frac{W}{L} \frac{1}{1 + \frac{\mu_0}{v_{\text{max}}} \frac{V_{DS}}{L}} \left[(V_G - V_T) V_{DS} - \frac{1}{2} V_{DS}^2 \right]$$

La condizione di saturazione del dispositivo si raggiunge quando

$$\frac{dI_{DS}}{dV_{DS}} = 0$$

da cui si ottiene un'equazione di secondo grado in $V_{DS,\text{max}}$

$$\frac{\mu_0}{v_{\text{max}}} \frac{V_{DS,\text{max}}^2}{L} - 2(V_G - V_T) = 0$$

$$V_{DS,\text{max}} = \frac{L v_{\text{max}}}{\mu_0} \left[\sqrt{1 + 2 \frac{\mu_0}{L v_{\text{max}}} (V_G - V_T)} - 1 \right]$$

L'espressione della corrente di saturazione si ottiene sostituendo a V_{DS} il valore $V_{DS,\text{max}}$:

$$I_{DS,\text{max}} = \mu_0 C_{\text{ox}} \frac{W}{L} \frac{1}{1 + \frac{\mu_0}{v_{\text{max}}} \frac{V_{DS,\text{max}}}{L}} \left[(V_G - V_T) V_{DS,\text{max}} - \frac{1}{2} V_{DS,\text{max}}^2 \right]$$

Tale espressione per $L \rightarrow 0$ tende al limite a

$$I_{DS,\text{max}} = C_{\text{ox}} v_{\text{max}} W (V_G - V_T)$$

Al limite per canali molto corti, la corrente diventa sostanzialmente indipendente dal tipo di transistor (a canale n o p), in quanto la velocità di saturazione è la stessa per i due tipi di portatori: questo ha rilevanti conseguenze sul dimensionamento di strutture CMOS submicrometriche. Per lunghezze di gate superiori al micron risulta più accurata l'approssimazione

$$I_{DS} = I_{DS,\max} = \frac{1}{2} \mu_0 C_{\text{ox}} \frac{W}{L} V_{DS,\max}^2$$

Sostituendo i valori numerici, si trovano i risultati riportati nella tabella

	con saturazione di velocità		senza saturazione di velocità	
V_{GS} [V]	$V_{DS,\max}$ [V]	$I_{DS,\max}$ [μA]	$V_{DS,\max}$ [V]	$I_{DS,\max}$ [μA]
1	0,276	5,36	0,3	6,34
2	0,991	69,17	1,3	119,0
3	1,546	168,5	2,3	372,6
4	2,01	286,9	3,3	767,1
5	2,43	417,5	4,3	1300,0

Nella figura 11.22 sono confrontate le correnti di saturazione del dispositivo, con e senza effetto della saturazione di velocità. Senza saturazione di velocità, $V_{DS,\max}$ è funzione lineare della tensione di gate e quindi la corrente di saturazione varia quadraticamente con la tensione di gate ($V_G - V_T$); con saturazione di velocità $V_{DS,\max}$ varia con la radice quadrata di $V_G - V_T$, e dunque la corrente di saturazione mostra un andamento lineare. La saturazione della velocità nel canale riduce la $V_{D,\max}$ e la $I_{DS,\max}$ rispetto ai valori previsti per mobilità costante.

Un modello adeguato per i MOSFET scalati deve tener conto della saturazione di velocità dei portatori nel canale dovuta sia al campo longitudinale lungo il canale che al campo trasversale tra gate e canale. Infatti riducendo lo spessore dell'ossido, il campo trasversale può portare alla saturazione della velocità dei portatori ben prima di quanto si avrebbe tenendo in conto soltanto il campo longitudinale.

11.6.5 Correnti sottosoglia nel MOSFET

Si valuti la tensione di soglia di un MOSFET a canale n con

- $x_{\text{ox}} = 250 \text{ \AA}$
- $N_a = 2 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$
- $L = 1,5 \text{ }\mu\text{m}$
- $W = 3 \text{ }\mu\text{m}$

Si suppone di connettere n transistori in parallelo come illustrato nella figura 11.23: tutti i collettori terminano sul drain di un MOS a canale p (MP0) e per semplificare il problema tutti i gate sono pilotati dallo stesso segnale ϕ . Quando $\phi = 0$ gli NMOS in parallelo sono interdetti e quindi contribuiscono al circuito solo con la propria capacità parassita (drain D - substrato B). Il MOS a canale p con tensione $V_G = 0$ è invece in conduzione: il ruolo del p-MOS è di caricare il nodo di uscita D a una tensione pari a V_{DD} .

Interdicendo ora il p-MOS ($V_G = 5 \text{ V}$), si vuole che il nodo resti carico al valore V_{DD} . Ciò sarebbe vero se i MOS in parallelo fossero dei circuiti aperti ideali. In realtà essi sono percorsi da correnti di perdita: le correnti sottosoglia. Si valuti il massimo valore di n assumendo che il tempo di mantenimento ("fase di memoria") della tensione

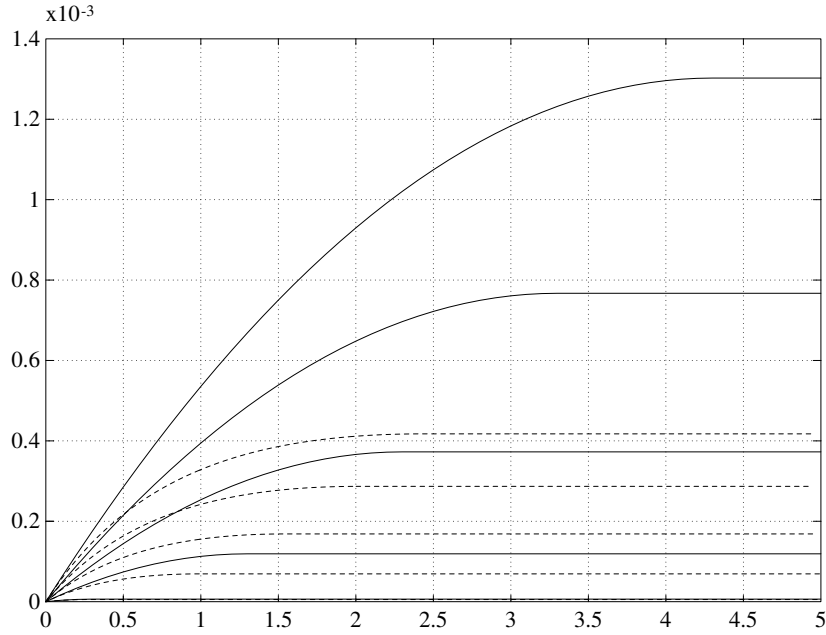


Figura 11.22: Caratteristiche d'uscita del MOSFET con (- -) e senza effetto di saturazione della velocità.

del nodo D sia superiore a un $1\ \mu\text{s}$ e fissando, come condizione peggiore, la tensione sul gate ("zero logico") al valore sottosoglia di $\phi = 50\ \text{mV}$. Si consideri che la capacità sul nodo di uscita sia costituita dalle capacità di drain dei MOSFET connessi in parallelo e da una capacità di carico aggiuntiva di $100\ \text{fF}$. Per valutare la corrente di scarica nei MOSFET si analizzi il fenomeno di conduzione sottosoglia; si utilizzino le seguenti relazioni per la corrente sottosoglia:

$$I_{Dst} = \frac{\mu_n k T W Q_n(S)}{q L} \left[1 - \exp \left(\frac{-q V_{DS}}{\xi k T} \right) \right]$$

$$Q_n(y) \simeq -\frac{k T}{2 q} \sqrt{\frac{q \epsilon_s N_a}{|\Phi_p|}} \exp \left\{ \frac{q [V_G - V_T - (V_C(y) - V_S)]}{\xi k T} \right\}$$

$$\xi = 1 + \frac{1}{2 C_{ox}} \sqrt{\frac{q \epsilon_s N_a}{|\Phi_p|}}$$

e si fissi convenzionalmente il tempo di mantenimento come quello per il quale la tensione non scende sotto il valore $0,5 V_{DD}$.

Dal problema 11.1.3 si hanno, per il MOSFET in esame, i seguenti valori

$$\begin{aligned} \Phi_p &= -0,367\ \text{V} \\ C_{ox} &= 0,138 \cdot 10^{-6}\ \text{F/cm}^2 \\ V_T &= 0,098\ \text{V} \end{aligned}$$

Se la tensione sui gate dei MOSFET a canale n è pari a $50\ \text{mV}$ e la tensione di soglia vale $98\ \text{mV}$, i MOSFET sono attraversati da una corrente di perdita verso massa (GND) dovuta alla conduzione sottosoglia. Utilizzando le relazioni indicate, si ha

$$\xi = 1 + \frac{1}{2 C_{ox}} \sqrt{\frac{q \epsilon_s N_a}{|\Phi_p|}} = 1,3443$$

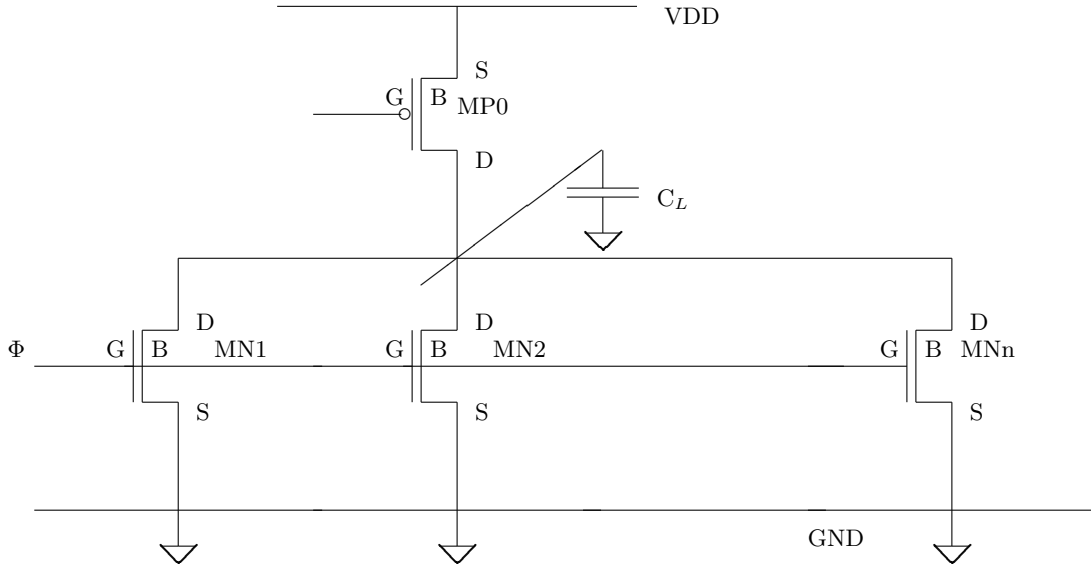


Figura 11.23: Circuito per la valutazione delle caratteristiche statiche.

e la densità di carica di inversione, calcolata al source⁷,

$$Q_n(S) \simeq -\frac{kT}{2q} \sqrt{\frac{q\epsilon_s N_a}{|\Phi_P|}} \exp\left[\frac{q[V_G - V_T]}{\xi kT}\right] = 3,128 \cdot 10^{-10} \text{ C cm}^{-2}$$

da cui, supponendo che il nodo di uscita sia carico a 5 V ($V_{DD} = 5 \text{ V}$)

$$I_{Dst} = \frac{\mu_n kTW Q_n(S)}{qL} \left[1 - \exp\left(\frac{-qV_{DS}}{\xi kT}\right)\right] \simeq 8,29 \text{ nA}$$

Valutando le capacità sui nodi di drain (area del drain: $A_D = 9 \mu\text{m}^2$) con un potenziale di 5 V si ottiene:

$$C_D(V_D) = A_D \sqrt{\frac{q\epsilon_s N_{eq}}{2(\Phi_i - V_D)}} = 1,5 \text{ fF}$$

Approssimando il transitorio come transitorio a corrente e capacità costante si può scrivere:

$$\begin{aligned} [(n \cdot C_D) + C_L] V_{DD}/2 &= I_{Dst} \cdot n \cdot T_m \\ n &= 66 \end{aligned}$$

Come si può notare le correnti di perdita, a causa della conduzione sottosoglia, possono creare problemi a strutture (“di tipo dinamico”) dove l’informazione è mantenuta come carica immagazzinata sulle capacità interne. Il problema della conduzione sottosoglia diventa particolarmente drammatico per MOSFET ridotti per scalamento mantenendo inalterate le tensioni di alimentazioni. Infatti in MOSFET a canale lungo, come quelli in esame, la corrente di conduzione sottosoglia è praticamente indipendente dalla tensione V_{DS} (anche se dipende in modo esponenziale da $V_G - V_T$). In questa situazione è

⁷Nello sviluppo analitico per ricavare la corrente sottosoglia, la carica di inversione al drain si considera praticamente nulla.

possibile limitare la corrente di dispersione semplicemente agendo sulla tensione V_G ⁸ indipendentemente dalla tensione di carico V_D ⁹.

11.6.6 Tempo proprio del MOSFET

È dato un transistor MOS a canale n avente le seguenti caratteristiche: $W = L = 5 \mu\text{m}$, spessore dell'ossido $x_{\text{ox}} = 500 \text{ \AA}$, gate in polisilicio di tipo n , concentrazioni di drogante nel substrato $N_a = 5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ e nelle zone di source e drain $N_d = 2 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$, profondità delle giunzioni $n^+ - p$, $1 \mu\text{m}$.

- a) Calcolare il valore della tensione di soglia.
- b) Calcolare il valore delle capacità di gate C_G , source C_S e drain C_D .
- c) Calcolare il tempo proprio del dispositivo, definito come il prodotto della resistenza in condizioni di corrente massima per la capacità di carico, pari a $C_D + C_G$. Si dia un'interpretazione fisica del significato di tale tempo.
- d) Tenendo conto dell'effetto della saturazione di velocità dei portatori, ricavare analiticamente l'espressione del tempo proprio in funzione del fattore di scalamento K a tensione costante.
- e) Fissato $K = 5$, ripetere il calcolo del tempo proprio, senza assumere che il transistor resti permanentemente in condizione di saturazione.

a)
Calcolo della tensione di soglia:

$$\begin{aligned} V_T &= V_{FB} + 2|\Phi_p| + \frac{1}{C_{\text{ox}}} \sqrt{4\epsilon_S N_a q |\Phi_p|} = 1,472 \text{ V} \\ V_{FB} &= -\frac{E_g}{2} - \frac{kT}{q} \ln\left(\frac{N_a}{n_i}\right) = -0,951 \text{ V} \\ \Phi_p &= -0,389 \text{ V} \\ C_{\text{ox}} &= \frac{\epsilon_{\text{ox}}}{x_{\text{ox}}} = 6,9 \cdot 10^{-8} \text{ F/cm} \end{aligned}$$

b)
Calcolo della capacità di gate, considerando trascurabili gli effetti capacitivi delle sovrapposizioni del gate sulle diffusioni di source e di drain:

$$\begin{aligned} C_{GO} &= C_{\text{ox}} WL = 17,25 \text{ fF} \quad \text{per } V_{DS} = 0 \\ C_G &= \frac{2}{3} C_{\text{ox}} WL = 11,50 \text{ fF} \quad \text{per } V_{DS} > 0 \end{aligned}$$

Le capacità di source e drain possono essere calcolate facendo le ipotesi $V_B = V_S = 0 \text{ V}$ e $V_D = 5 \text{ V}$; il potenziale intrinseco vale

$$\Phi_i = \frac{kT}{q} \ln\left(\frac{N_a N_d}{n_i^2}\right) = 0,933 \text{ V}$$

Tenendo conto della capacità dei bordi delle diffusioni, possono essere scritte le espressioni che portano al calcolo della capacità di source a potenziale applicato nullo

$$\begin{aligned} C_{J0} &= \sqrt{\frac{2\epsilon_S}{q N_a \Phi_i}} = 66,6 \cdot 10^{-9} \text{ F/cm}^2 \\ C_{SB0} &= C_{JO} WL + C_{JO} 2 x_J (W + L) = 30 \text{ fF} \end{aligned}$$

⁸Ad ogni incremento della tensione sottosoglia $|V_G - V_T|$ di 100 mV la corrente di perdita si riduce di un ordine di grandezza.

⁹Per MOS a canale più corto invece la corrente diventa estremamente sensibile alla V_{DS} a causa del fenomeno detto DIBL "Drain-Induced Barrier Lowering".

per il calcolo della capacità sul Drain si deve tener conto della tensione applicata pari a 5V e si ottiene

$$C_{DB} = \left[C_{JO} \left(1 - \frac{V_{BD}}{\Phi_i} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] [WL + 2x_j (W + L)] = 11,8 \text{ fF}$$

c)

Come “tempo proprio del dispositivo”, si indica il tempo necessario al MOSFET in condizioni di massima corrente per pilotare un secondo MOS (inizialmente scarico) a $0,63 V_{DD}$. In un MOSFET si ha la massima corrente per $V_{GS} = V_{DD}$ e per $V_{DS} = V_{DD}$, condizioni per cui il transistor si trova in saturazione. La resistenza di canale in condizioni di massima corrente vale

$$R_{ON} = \frac{V_{DD} 2L}{\mu_n C_{ox} W (V_{DD} - V_T)^2} = 12,9 \text{ k}\Omega$$

avendo usato $\mu_n = 900 \text{ cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$ per una concentrazione $N_a = 5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$. La capacità complessiva in uscita del MOSFET è la somma della capacità di drain sul nodo di uscita del primo MOSFET e della capacità di gate del secondo nelle condizioni di polarizzazione indicate.

$$C_{intr} = C_G(V_{GS} = V_{DD}) + C_D(V_{DS} = V_{DD}) = \left(\frac{2}{3} 17,25 + 11,8 \right) \text{ fF} = 23,30 \text{ fF}$$

Per cui il tempo proprio del MOSFET diventa

$$T_{MOS} = R_{ON} C_{intr} = 301 \text{ ps}$$

d)

La riduzione delle dimensioni di un MOSFET per scalamento geometrico agisce sul tempo proprio sotto due aspetti: la capacità intrinseca e la resistenza. In realtà, se lo scalamento avviene a potenziale costante, la crescita del valore del campo all'interno del canale porta alla progressiva saturazione della velocità dei portatori, riducendo l'influenza sul tempo proprio dello scalamento del dispositivo.

Può essere interessante valutare per quale valore di K il fenomeno della saturazione di velocità non possa più essere trascurato. A tal fine si equagliano le correnti di saturazione ottenute tenendo conto e no della saturazione di velocità

$$\mu_n C_{ox} \frac{W}{2L} (V_G - V_T)^2 = C_{ox} v_{\infty} W (V_G - V_T)$$

La lunghezza di canale che si ottiene è quella al di sotto della quale è necessario tener conto della saturazione della velocità dei portatori

$$L = \frac{\mu_n (V_{GS} - V_T)}{v_{\infty}} = 2,2 \text{ }\mu\text{m}$$

Ovvero il fattore di scalamento K limite è pari a 2,3.

Per quanto riguarda le capacità, nell'ipotesi che il MOS ne piloti un secondo inizialmente scarico, si può scrivere:

$$\begin{aligned} C_{intr} &= C_G + C_D \\ &= C_{ox} WL + C_D(V_{DS} = 0) 2(W + L) x_J + C_D(V_{DS} = 0) WL \end{aligned}$$

Attuando uno scalamento a tensione costante, l'espressione della capacità diventa

$$\begin{aligned} C_{intr} &= C_G + C_D \\ &= \frac{1}{K} C_{ox} WL + \frac{\sqrt{K}}{K^2} C_D(V_{DS} = 0) 2(W + L) x_J + \frac{\sqrt{K}}{K^2} C_D(V_{DS} = 0) WL \end{aligned}$$

Lo scalamento produce una riduzione della capacità complessiva proporzionale circa a $1/K^2$. Per quanto riguarda la corrente¹⁰, se $L > 2,2 \mu\text{m}$, si ha

$$\begin{aligned} I_{DS} &= \frac{1}{2} \mu_n C_{\text{ox}} \frac{W}{L} (V_G - V_T)^2 \\ I_{DS} &= \frac{1}{2} K \mu_n C_{\text{ox}} \frac{W}{L} (V_G - V_T)^2 \end{aligned}$$

ha andamento proporzionale a K ; se invece $L < 2,2 \mu\text{m}$, si ottiene

$$\begin{aligned} I_{DS} &= \frac{1}{2} C_{\text{ox}} W v_{\infty} (V_G - V_T) \\ I_{DS} &= \frac{1}{2} K C_{\text{ox}} \frac{1}{K} W v_{\infty} (V_G - V_T) \end{aligned}$$

la corrente resta praticamente costante con K . Il tempo proprio, avrà quindi un andamento proporzionale a $1/K^2$ per MOSFET non in saturazione di velocità e proporzionale a $1/K$ in caso contrario:

$$T_{MOS} = \frac{V_{DD}}{C_{\text{ox}} v_{\infty} W (V_{DD} - V_T)} \left[C_{\text{ox}} W L + \sqrt{\frac{\epsilon_{Si} q N_a}{2(\Phi_i - V_{BD})}} (W L + 2x_J (W + L)) \right] \frac{1}{K}$$

e)

Si usa il MOSFET ridotto con fattore di scalamento $K = 5$ e si assume di calcolare il tempo per il quale la tensione sul nodo di uscita scende del 63% cioè raggiunge 1,85 V. Durante questo transitorio, il MOSFET passa dalla regione di saturazione a quella quadratica per $V_D = V_{D,\text{max}}$.

$$C_L = (C_D + C_G) = 5,8 \text{ fF}$$

Per valutare in modo accurato il tempo proprio è necessario tenere conto del fatto che la tensione di soglia varia con lo scalamento: si ha $V_T = 0,717 \text{ V}$. Con $K = 5$ si deve tener conto della saturazione della velocità dei portatori

$$V_{D,\text{max}} = \frac{L v_{\infty}}{\mu_0} \left[\sqrt{1 + \frac{2\mu_0}{L v_{\infty} (V_{DD} - V_T)}} - 1 \right] = 1,86 \text{ V}$$

Durante il tempo di scarica, il MOSFET si trova in differenti condizioni di conduzione: da 5 V a 1,86 V si trova in saturazione, da 1,86 V a 1,85 V in zona quadratica (assolutamente trascurabile). Si può quindi calcolare il transitorio a corrente costante:

$$(5 - V_{D,\text{max}}) = \frac{I_{D,\text{max}}}{C_L} = 21,8 \text{ ps}$$

Si noti che per $K = 5$ il tempo proprio calcolato nel punto d) era di 24 ps.

11.7 Modello del MOSFET in SPICE

I parametri fondamentali che devono essere introdotti nel modello SPICE del MOSFET a livello 1 e 2, sono riportati nella tabella 11.7

Parametro	-	-	Default	Tipico	-
LEVELS	-	modello	-	-	-
VT0	V_{T0}	tensione di soglia	1	1	V
KP	-	param. transcond.	$2 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5}$	AV^{-2}
GAMMA	γ	effetto substr.	0	0.35	$\text{V}^{1/2}$
PHI	$2 \Phi_P $	pot. superficiale	0.6	0.65	V
LAMBDA	λ	mod. lung. canale	0	0.02	V^{-1}
RD	r_D	resistenza drain	0	10	Ω
RS	r_S	resistenza source	0	10	Ω
IS	I_0	corrente inversa	10^{-14}	10^{-15}	A
UO	μ_0	mobilità a basso campo	600	700	$\text{cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$
VMAX	v_{\max}	velocità di saturazione	0	$5 \cdot 10^4$	ms^{-1}
UCRIT	-	campo critico per mob.	$1 \cdot 10^4$	$1 \cdot 10^4$	Vcm^{-1}
UEXP	-	esponente per mobilità	0	0.1	
XJ	x_d	profondità di giunzione	0	$1 \cdot 10^{-6}$	m
CJ	C	capacità di giunzione	0	$2 \cdot 10^{-4}$	Fm^{-2}
CJSW	-	capacità di perimetro	0	$1 \cdot 10^{-9}$	Fm^{-1}
MJ	-	coeff. di giunzione	0.5	0.5	-
MJSW	-	coeff. di giunzione	0.33	0.33	-
CGB0	-	capacità verso il bulk	0	$2 \cdot 10^{-10}$	Fm^{-1}
CGD0	-	capacità di sovrapp. drain	0	$4 \cdot 10^{-11}$	Fm^{-1}
CGS0	-	capacità di sovrapp. source	0	$4 \cdot 10^{-11}$	Fm^{-1}

Tabella 11.1: Parametri principali per la definizione dei modelli a livello 1 e 2 del MOSFET in SPICE

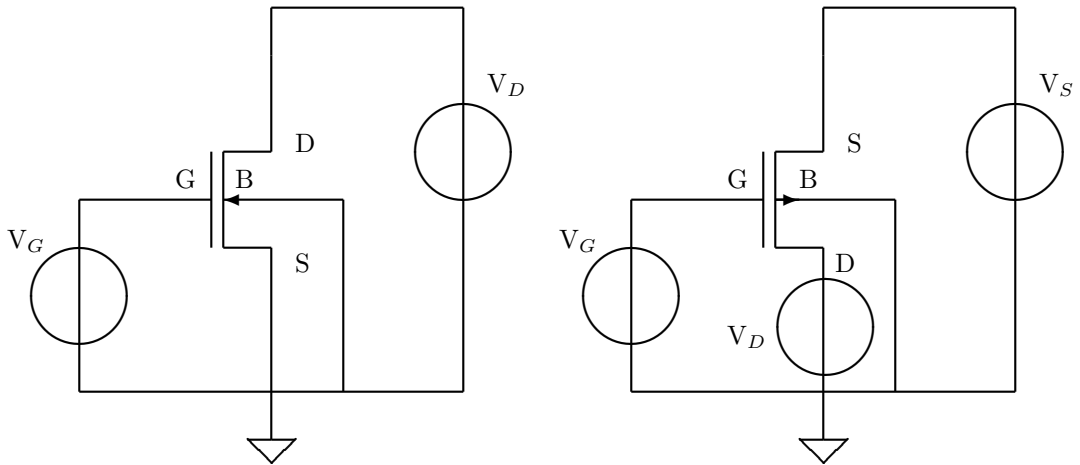


Figura 11.24: Circuiti per la valutazione delle caratteristiche statiche.

11.7.1 Caratteristiche statiche MOSFET

Riferendosi ai circuiti nella figura 11.24 si ricavano le transcaratteristiche di ingresso e le caratteristiche di uscita dei transistori MOSFET a canale n e p. Per i transistori MOS si usino i parametri caratteristici riportati nella tabella e $W=3\text{ }\mu\text{m}$ e $L=1,5\text{ }\mu\text{m}$.

Parametro SPICE	NMOS	PMOS
Level	2	2
TOX	250e-10	250e-10
NSUB	2e16	5e16
VTO	0.7	-1.1
UO	510	210

Le transcaratteristiche di ingresso possono essere ottenute fissando $V_{DS} = 5\text{ V}$ e misurando la corrente I_{DS} al variare di V_{GS} . Per quanto riguarda le caratteristiche di uscita la corrente I_{DS} viene misurata al variare di V_{DS} tra 0 e 5 V a passi di 1 V della tensione V_{GS} . Il comando SPICE .DC permette infatti l'annidamento di cicli nel seguente modo:

.DC VD 0 5 0,05V VG 0 5 1V

Nella figura 11.25 sono riportate le caratteristiche di uscita dei MOSFET a canale n e a canale p: si noti come, pur avendo i mosfet le stesse caratteristiche fisiche, a parità di tensione la corrente nel P-MOSFET sia decisamente ridotta rispetto a quella del N-MOSFET. Ciò è essenzialmente dovuto alla differente mobilità a basso campo. Nella figura 11.26 sono riportate le transcaratteristiche di ingresso dei due transistori.

11.7.2 Effetto di substrato

Facendo riferimento al MOSFET a canale n del problema precedente, si studi, mediante simulazioni con PSPICE, la variazione della tensione di soglia al variare della polarizzazione del substrato da 0 a -10 V .

Il modo più conveniente per visualizzare l'influenza della tensione di substrato sulla tensione di soglia è tracciare la transcaratteristica di ingresso al variare della tensione di substrato con passi di 2 V. I risultati sono in accordo con il valore di gamma calcolato:

$$\Delta V_T = \frac{\sqrt{2\epsilon_s q N_a}}{C_{ox}} \left(\sqrt{2|\Phi_p| + |V_{SB}|} - \sqrt{2|\Phi_p|} \right) = 1,42\text{ V}$$

infatti avendo posto $|V_{SB}| = 10\text{ V}$ si è ottenuto uno spostamento della tensione di soglia pari a 1,42 V rispetto a 1,40 V valutati nella simulazione.

11.7.3 Modulazione della lunghezza di canale

Usando come strumento il simulatore PSPICE si studi il fenomeno della modulazione della lunghezza di canale. Si valuti in particolare come al diminuire della lunghezza di canale tale fenomeno influenzi in modo sempre più rilevante la corrente in saturazione. Come .MODEL si usino i seguenti parametri:

¹⁰Si considera la tensione di soglia quasi costante per semplicità, anche se questa varia come \sqrt{K} .

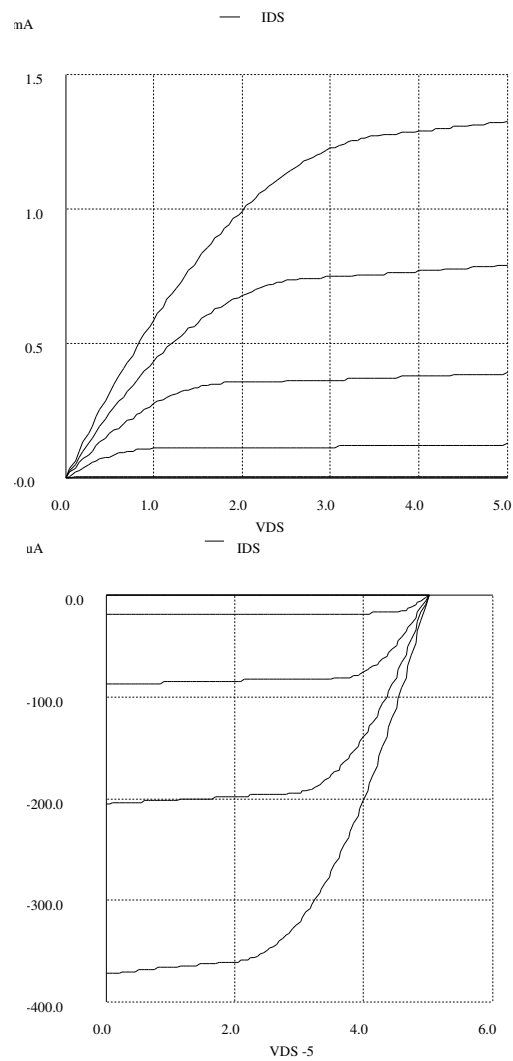


Figura 11.25: Caratteristiche di uscita dei MOSFET a canale n e a canale p.

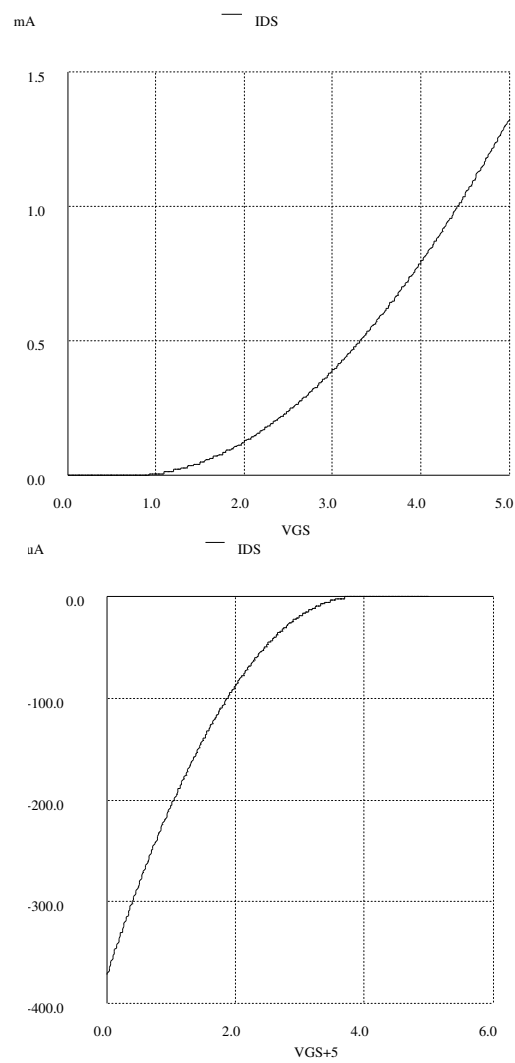


Figura 11.26: Transcaratteristiche di ingresso dei MOSFET a canale n e a canale p.

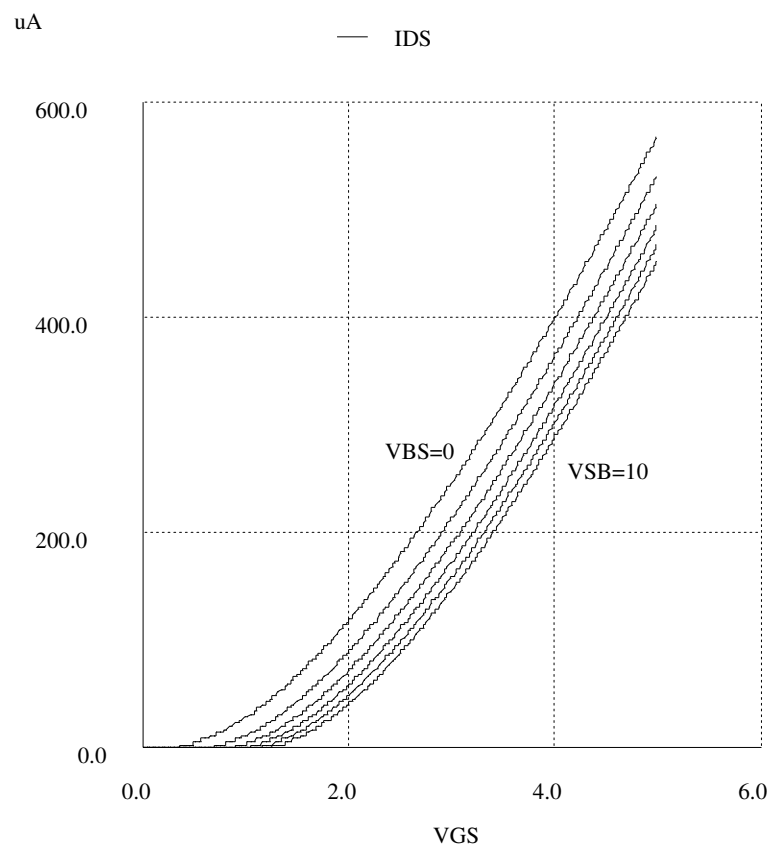


Figura 11.27: Transcaratteristiche di ingresso del MOSFET a canale n al variare della tensione di substrato.

Parametro SPICE	NMOS	PMOS
Level	2	2
TOX	250e-10	250e-10
NSUB	2e16	5e16
VTO	0.7	-1.1
UO	510	210

Per tensioni maggiori di quella di saturazione, la corrente di drain non è esattamente costante, ma varia lievemente con V_{DS} , a causa dello spostamento verso il source dell'estremità del canale strozzato. Con approssimazione del primo ordine, tale effetto viene tenuto in conto dal parametro λ (LAMBDA nel .MODEL), mentre il modello più accurato del livello 2 deve prevedere un valore di λ funzione dei parametri fisici del dispositivo e della polarizzazione. L'espressione che in SPICE al livello 2 viene usata per il calcolo di λ è

$$\lambda = \frac{L - L'}{LV_{DS}}$$

$$L' = L - x_d \left[\frac{V_{DS} - V_{D,sat}}{4} + \sqrt{1 + \left(\frac{V_{DS} - V_{D,sat}}{4} \right)^2} \right]^{1/2}$$

$$x_d = \sqrt{\frac{2\epsilon_s}{qN_a}}$$

Nella figura 11.28 si nota come solamente per lunghezze di canale dell'ordine del micron l'effetto di modulazione della lunghezza di canale diventi evidente.

11.7.4 Saturazione di velocità dei portatori

Utilizzando il simulatore PSPICE si studino gli effetti, sulle caratteristiche di uscita della saturazione della velocità dei portatori e si esaminino i modelli che in SPICE vengono adottati per descrivere il fenomeno.

Per i MOSFET a canale corto, la corrente di drain viene limitata a causa della saturazione della velocità dei portatori nel canale ($v \leq v_{max}$). In realtà il campo elettrico che produce la limitazione della velocità dei portatori non è solo quello longitudinale, dovuto alla V_{DS} , che aumenta con la diminuzione della lunghezza di canale, ma anche quello trasversale, dovuto alla tensione sul gate che aumenta al diminuire dello spessore dell'ossido. Per mettere in evidenza questi due fattori, conviene utilizzare tre modelli (MN2,MN1,MN0), nei quali siano definiti rispettivamente i parametri per l'influenza dei campi trasversale e longitudinale (VMAX, UCRIT, UEXP), quelli del solo campo longitudinale (VMAX) e infine nessuno dei due.

Parametro SPICE	MN0	MN1	MN2
Level	2	2	
TOX	250e-10	250e-10	250e-10
NSUB	2e16	2e16	2e16
VTO	0.7	0.7	0.7
UO	510	510	510
VMAX	-	54e3	54e3
UCRIT	-	-	24.3e3
UEXP	-	-	0.22

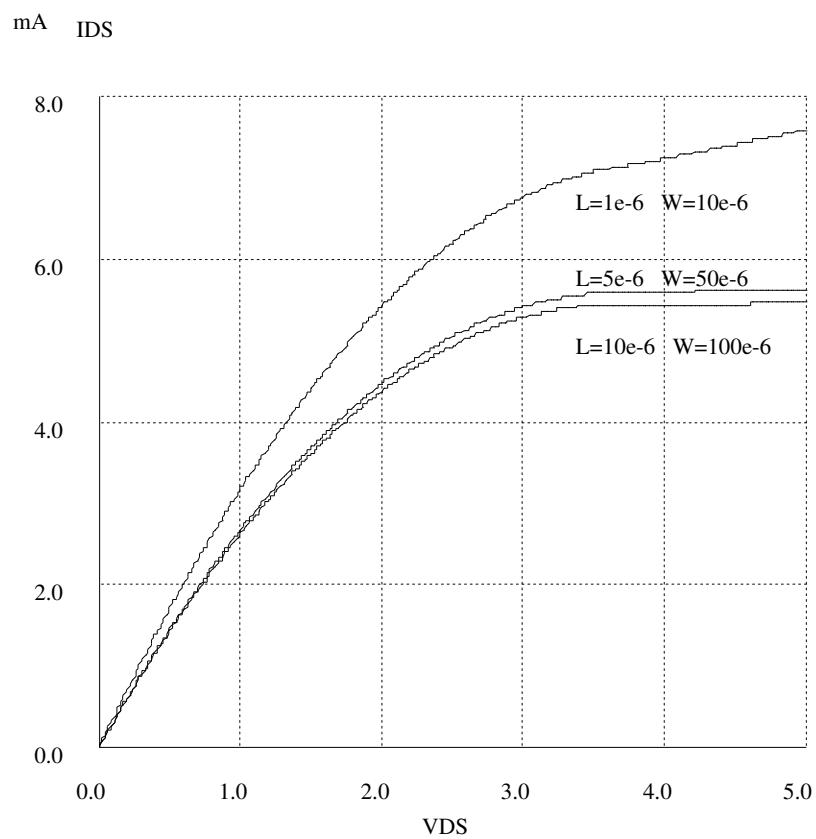


Figura 11.28: Caratteristiche di uscita dei MOSFET a canale n al variare della lunghezza di canale a parità di rapporto W/L .

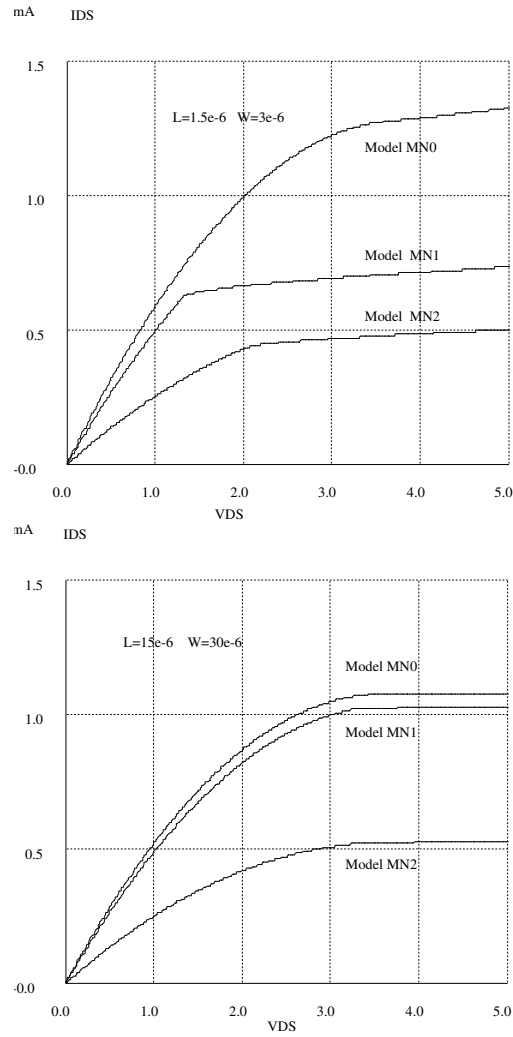


Figura 11.29: Caratteristiche di uscita con $V_{GS} = 5$ V, nei casi in cui si considerino sia il campo longitudinale che trasversale (MN2), il solo campo longitudinale (MN1) e nessuno dei due (MN0) per un MOSFET a canale lungo e uno a canale corto.

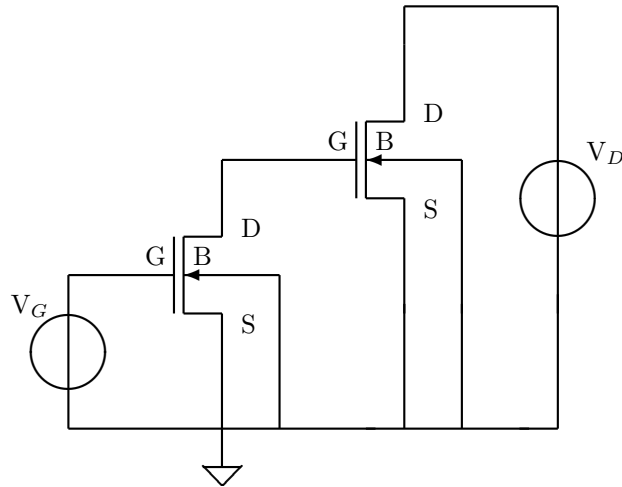


Figura 11.30: Circuito per la valutazione del tempo proprio.

La simulazione avviene su due MOSFET, il primo con $L=1,5$ $W=3$ il secondo con $L=15$ $W=30$ (dimensioni in micron), in modo da mettere in evidenza come la saturazione di velocità a causa del campo longitudinale non intervenga minimamente nel MOSFET a canale lungo, dato che i tre modelli fanno riferimento a uno spessore di ossido costante di 250 \AA . Si noti nella figura 11.29 come la mobilità venga degradata vistosamente anche nel MOSFET a canale lungo quando si tenga conto dell'influenza del campo trasversale (MN2).

11.7.5 Tempo proprio nei MOSFET

Si valuti il tempo proprio di un MOSFET connesso come illustrato nella figura 11.30 (nell'analisi in transitorio si ponga la tensione iniziale del drain a 5 V) simulando con PSPICE un dispositivo con $L=3 \mu\text{m}$ e $W=6 \mu\text{m}$ e successivamente riducendone le dimensioni superficiali di un fattore 2. Si valuti inoltre l'influenza della saturazione di velocità sulla riduzione dei ritardi nel processo di scaling down".

La simulazione del tempo proprio di un MOSFET avviene effettuando un'analisi in transitorio, ovvero applicando al gate del primo MOSFET un gradino ideale di 5 V e misurando il ritardo sul nodo di uscita. La simulazione è effettuata contemporaneamente sul dispositivo iniziale e su quello scalato ed è ripetuta successivamente con un modello che tenga conto della saturazione di velocità.

```
Valutazione del tempo proprio
* MODELLI DEI DISPOSITIVI *
.MODEL MNSAT NMOS ( Level = 2 TOX = 250e-10 NSUB = 2e16 VTO = 0.7
+ UO = 510 UEXP = 0.22 UCRIT = 24.3e3 DELTA = 0.4 XJ = 0.4e-6
+ VMAX = 54e3 NEFF = 4.9 RSH = 55 NFS = 0 JS = 2e-6 CJ = 130e-6
+ CJSW = 620e-12 MJ = 0.53 MJSW = 0.53 PB = 0.68 CGDO = 320e-12
+ CGSO = 320e-12 )
.MODEL MN0 NMOS (Level = 2 TOX = 250e-10 NSUB = 2e16 VTO = 0.7
+ UO = 510 XJ = 0.4e-6 CJ = 130e-6 CJSW = 620e-12 MJ = 0.53
+ MJSW = 0.53 CGDO = 320e-12 CGSO = 320e-12 )
* DESCRIZIONE DEL CIRCUITO *
Vd10 20 0 0V
Vg10 10 0 PULSE(0 5 0.2ns 0ns 0ns 10ns 20ns)
M1 20 3 0 0 MN0 (L=1.5e-6 W=3e-6 Ad=9e-12 As=9e-12 Pd=10e-6 Ps=10e-6)
M2 3 10 0 0 MN0 (L=1.5e-6 W=3e-6 Ad=9e-12 As=9e-12 Pd=10e-6 Ps=10e-6)
M10 20 30 0 0 MN0 (L=3e-6 W=6e-6 Ad=18e-12 As=18e-12 Pd=18e-6 Ps=18e-6)
```

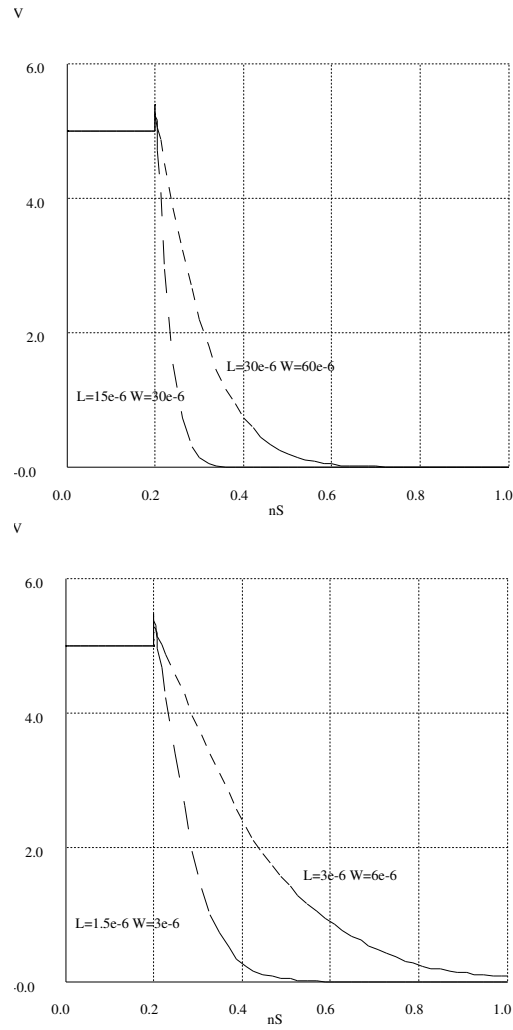



Figura 11.31: Simulazione del tempo proprio di due MOSFET rispettivamente con $L = 3 \mu\text{m}$ e $W = 6 \mu\text{m}$ e con $L = 1,5 \mu\text{m}$ e $W = 3 \mu\text{m}$, con e senza l'effetto di saturazione di velocità.

```

M20 30 10 0 0 MN0 (L=3e-6 W=6e-6 Ad=18e-12 As=18e-12 Pd=18e-6 Ps=18e-6)
M100 20 300 0 0 MNSAT (L=1.5e-6 W=3e-6 Ad=9e-12 As=9e-12 Pd=10e-6 Ps=10e-6)
M200 300 10 0 0 MNSAT (L=1.5e-6 W=3e-6 Ad=9e-12 As=9e-12 Pd=10e-6 Ps=10e-6)
M1000 20 3000 0 0 MNSAT (L=3e-6 W=6e-6 Ad=18e-12 As=18e-12 Pd=18e-6 Ps=18e-
6)
M2000 3000 10 0 0 MNSAT (L=3e-6 W=6e-6 Ad=18e-12 As=18e-12 Pd=18e-6 Ps=18e-
6)
* ANALISI *
.IC v(3) =5
.IC v(30) =5
.IC v(300) =5
.IC v(3000)=5
.TRAN .0001ns 1ns UIC

```

Si noti dalla figura 11.31 che il tempo proprio (al 50%) diminuisce di circa un fattore 4 (K^2) per i dispositivi in cui non interviene la saturazione di velocità e solamente di 2 (K) nel secondo caso; questo risulta in pieno accordo con quanto valutato nel problema 11.6.6.

Capitolo 12

Dispositivi MOSFET nei circuiti VLSI

Lo scopo di questo capitolo è quello di illustrare il funzionamento del MOSFET non più considerato come dispositivo isolato, ma bensì inserito in un circuito reale; gli esercizi proposti costituiscono quindi da un lato una ulteriore occasione per applicare i concetti illustrati nei capitoli precedenti, e dall'altro un'introduzione alla moderna microelettronica. Alcuni semplici esempi circuitali consentono di chiarire le principali caratteristiche applicative che hanno determinato il successo e la diffusione dei dispositivi MOS: in particolare sono illustrati in alcuni problemi il dimensionamento, la dissipazione di potenza e la velocità di risposta di semplici strutture circuitali, quali l'invertitore logico e altre porte elementari. Allo scopo di non appesantire troppo la trattazione, lo studio dei circuiti proposti è stato in alcuni casi semplificato, adottando modelli semplificati dei dispositivi e ignorando problemi come la saturazione di velocità nel canale o la riduzione della mobilità superficiale. Tale semplificazioni non tolgono comunque nulla alla completezza e alla validità dei metodi di analisi illustrati.

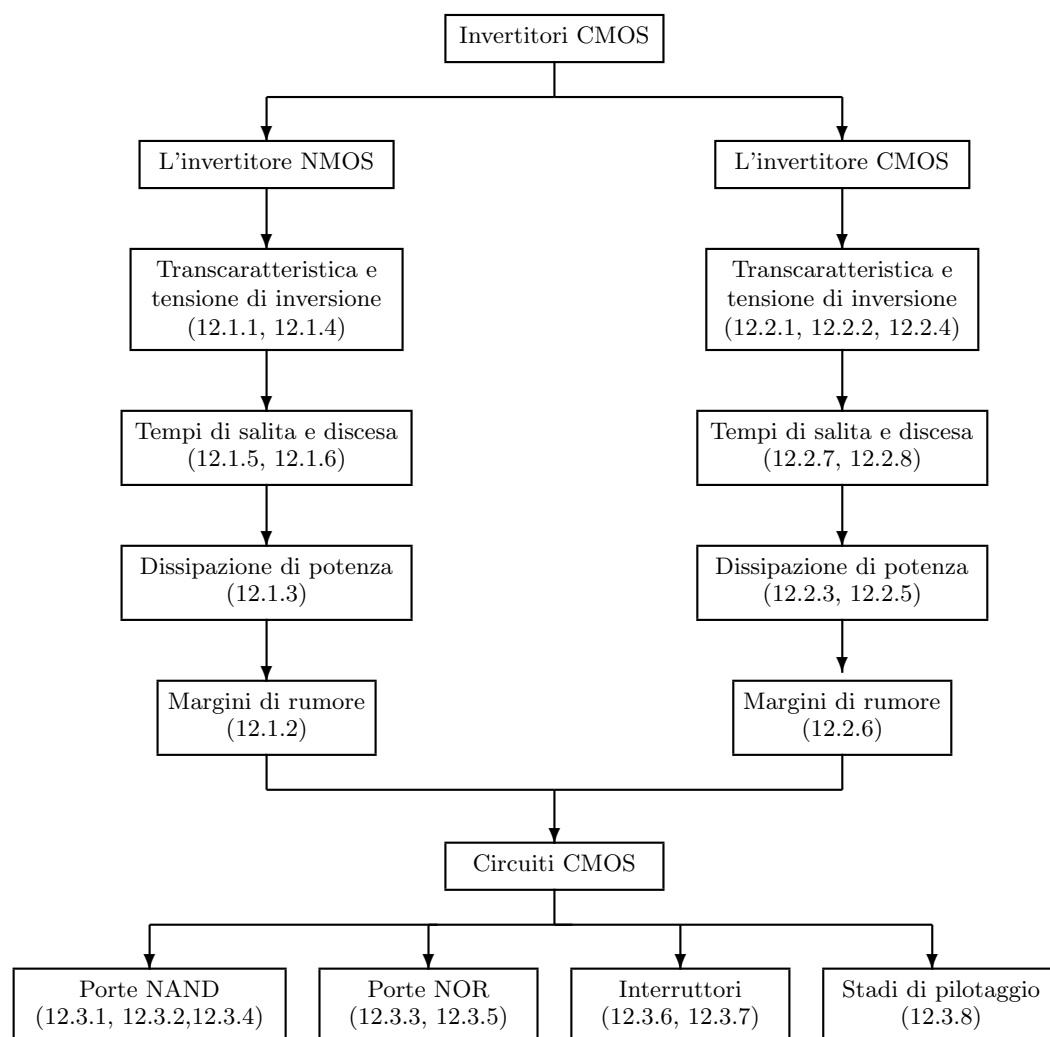


Figura 12.1: Struttura del capitolo 12.

12.1 L'invertitore logico N-MOS

12.1.1

Si consideri un invertitore logico NMOS, realizzato su di un substrato di tipo p , con $N_a = 1 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ e le seguenti caratteristiche

- transistorore ad arricchimento: lunghezza $L_{pd} = 2 \mu\text{m}$, larghezza $W_{pd} = 2 \mu\text{m}$;
- transistorore a svuotamento: lunghezza $L_{pu} = 2 \mu\text{m}$, larghezza $W_{pu} = 2 \mu\text{m}$;
- per entrambi i MOSFET, spessore dell'ossido di gate $x_{ox} = 800 \text{ \AA}$ e gate in silicio policristallino degeneri di tipo n ;
- tensione di soglia del transistorore a svuotamento, $V_{Tpu} = -1 \text{ V}$.
- tensione di alimentazione $V_{DD} = 5 \text{ V}$.

Calcolare la tensione di soglia del transistorore di "pull-down", la tensione di inversione logica e il valore della tensione di uscita quando l'ingresso è a 5 V .

Si tracci inoltre l'andamento della tensione di inversione logica al variare delle dimensioni planari dei transistori. Per quali dimensioni dei due transistori il valore della tensione di inversione risulta pari a $V_{DD}/2$?

La struttura del dispositivo è nella figura 12.2

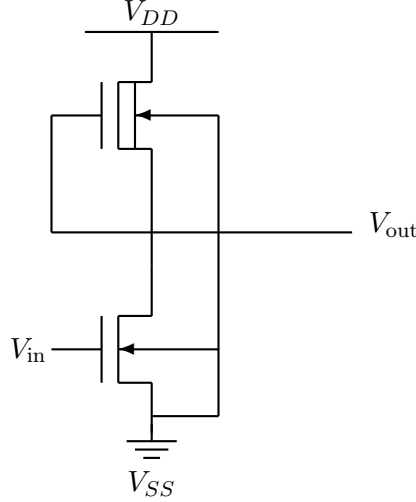


Figura 12.2: Invertitore logico NMOS.

La tensione di soglia del “pull-down” si calcola secondo l’espressione seguente:

$$V_{T_{pd}} = V_{FB} + 2|\Phi_p| + \frac{1}{C_{ox}} \sqrt{2q\epsilon_s N_A 2|\Phi_p|}$$

dove $q\Phi_p = E_f - E_i$ è calcolata nel substrato:

$$q\Phi_p = E_f - E_i = -kT \ln \frac{N_A}{n_i} = -0,348 \text{ eV}$$

$$\begin{aligned} V_{FB} &= \chi - \left[\chi + \frac{E_g}{2q} + \frac{1}{q} (E_i - E_f) \right] \\ &= -\frac{E_g/2 + E_i - E_f}{q} = -0,908 \text{ V} \end{aligned}$$

$$C_{ox} = \frac{\epsilon_{ox}}{x_{ox}} = 4,3 \cdot 10^{-8} \text{ F/cm}^2$$

$$Q_d = \sqrt{2q\epsilon_s N_A 2|\Phi_p|} = 4,82 \cdot 10^{-8} \text{ C/cm}^2$$

Pertanto si ha $V_{T_{pd}} = 0,91 \text{ V}$.

In condizioni statiche non si ha assorbimento di corrente dal nodo di uscita; la tensione di inversione logica, definita come il valore di V_{in} tale che $V_{in} = V_{out}$, si determina uguagliando le correnti che transitano nei due MOSFET, per ottenere un’equazione nella sola incognita V_{in} . A tal fine, occorre stabilire se i transistori si trovano in saturazione oppure in zona triodo.

Il transistoro ad arricchimento si trova certamente in saturazione, dato che

$$V_{GS} - V_{Tpd} = V_{in} - V_{Tpd} < V_{DS} = V_{out}$$

con $V_{out} = V_{in}$. Per quanto riguarda il MOSFET a svuotamento (“pull-up”), questo si trova in saturazione se

$$\begin{aligned} V_{GS} - V_{Tpu} &< V_{DS} \\ -V_{Tpu} &< V_{DD} - V_{out} \end{aligned}$$

ovvero $V_{out} < 4$ V. Ne consegue che, quando $V_{in} = V_{out}$ (condizione di inversione logica), l’invertitore attraversa due regioni: nella prima ($V_{out} < 4$ V), i due transistori si trovano entrambi in saturazione, nella seconda, il “pull-up” si trova in zona triodo. Si fa prima l’ipotesi che il punto di inversione logica si trovi nella prima regione e si eguagliano le due espressioni delle correnti di saturazione:

$$\begin{aligned} I_{D_{pu}} &= I_{D_{pd}} \\ \frac{1}{2} \mu_n C_{ox} \frac{W_{pu}}{L_{pu}} (V_{GS_{pu}} - V_{T_{pu}})^2 &= \frac{1}{2} \mu_n C_{ox} \frac{W_{pd}}{L_{pd}} (V_{GS_{pd}} - V_{T_{pd}})^2 \\ \frac{1}{2} \mu_n C_{ox} \frac{W_{pu}}{L_{pu}} (V_{T_{pu}})^2 &= \frac{1}{2} \mu_n C_{ox} \frac{W_{pd}}{L_{pd}} (V_{in} - V_{T_{pd}})^2 \end{aligned}$$

Si indichino ora con S_{pu} e S_{pd} i rapporti di aspetto dei due MOSFET, definiti come

$$S_{pu} = \frac{W_{pu}}{L_{pu}} = 1 \quad S_{pd} = \frac{W_{pd}}{L_{pd}} = 1$$

l’equazione precedente si riscrive nella seguente forma semplificata

$$S_{pu} V_{T_{pu}}^2 = S_{pd} (V_{in} - V_{T_{pd}})^2$$

che consente di esplicitare la tensione di inversione logica:

$$V_{in} = V_{inv} = V_{T_{pd}} + |V_{T_{pu}}| \sqrt{\frac{S_{pu}}{S_{pd}}} = 1,91 \text{ V} \quad (12.1)$$

Poiché la tensione di inversione trovata è inferiore a 4 V, l’ipotesi fatta si rivela corretta. Al fine di calcolare il valore della tensione di uscita quando $V_{in} = 5$ V, si osservi che in tale situazione il “pull-up” si trova in saturazione, mentre il “pull-down” è in zona triodo. Uguagliando ancora le due correnti e imponendo $V_{in} = 5$ V, si ottiene il valore di V_{out} :

$$\begin{aligned} I_{DS_{pd}} &= I_{DS_{pu}} \\ \mu_n C_{ox} S_{pd} [(V_{in} - V_{T_{pd}}) - \frac{1}{2} V_{out}] V_{out} &= \frac{1}{2} \mu_n C_{ox} S_{pu} V_{T_{pu}}^2 \end{aligned}$$

che si riscrive

$$V_{out}^2 - 2(V_{in} - V_{T_{pd}})V_{out} + \frac{S_{pu}}{S_{pd}} V_{T_{pu}}^2 = 0$$

da cui $V_{out} = 0,12$ V.

L'andamento della tensione di inversione in funzione del rapporto S_{pu}/S_{pd} si ottiene, quando $V_{in} < 4$ V, usando la (12.1); per valori della tensione di ingresso più elevati, occorre sostituire l'espressione della corrente nel transistor di “pull-up” in zona triodo:

$$I_{DS_{pd}} = I_{DS_{pu}}$$

$$\frac{1}{2}\mu_n C_{ox} S_{pd}(V_{in} - V_{Tpd})^2 = \mu_n C_{ox} S_{pu}[-V_{Tpu} - \frac{1}{2}(V_{DD} - V_{out})](V_{DD} - V_{out})$$

Ponendo $V_{in} = V_{out} = V_{inv}$, si ha

$$\left(1 + \frac{S_{pu}}{S_{pd}}\right) V_{inv}^2 - 2 \left[V_{Tpd} + \frac{S_{pu}}{S_{pd}}(V_{DD} + V_{Tpu}) \right] V_{inv} + V_{Tpd}^2 + \frac{S_{pu}}{S_{pd}}(2V_{Tpu} V_{DD} + V_{DD}^2) = 0$$

I risultati forniti risolvendo la precedente equazione e la (12.1) sono riportati nel grafico della figura 12.3.

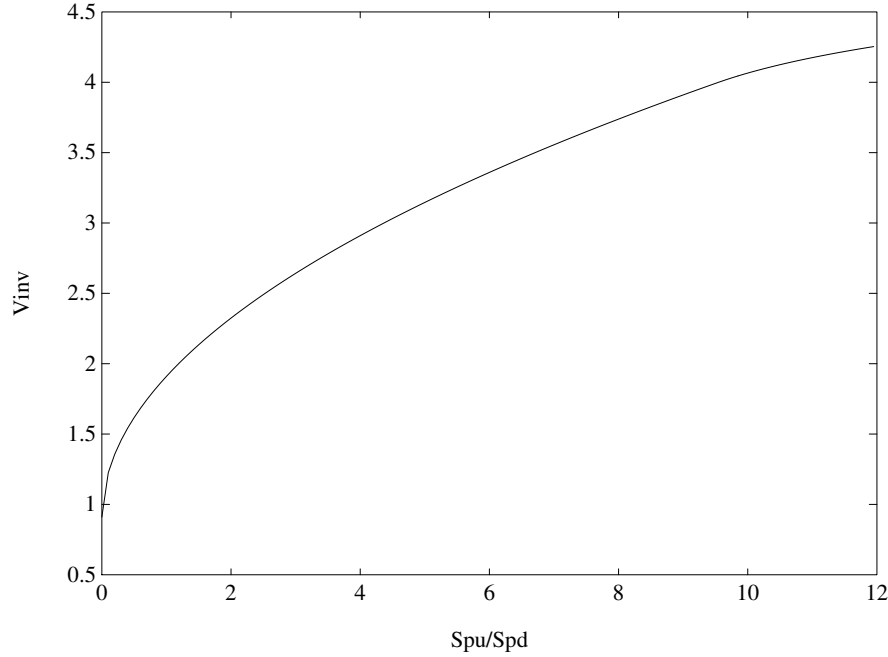


Figura 12.3: Tensione di inversione logica al variare del rapporto di aspetto.

Se $V_{inv} = V_{DD}/2 = 2,5$ V, dalla (12.1) risulta

$$\sqrt{\frac{S_{pu}}{S_{pd}}} = \frac{V_{inv} - V_{Tpd}}{|V_{Tpu}|} = 1,59 \quad ; \quad \frac{S_{pu}}{S_{pd}} = 2,53$$

12.1.2

Dato un invertitore logico NMOS avente $S_{pu} = W_{pu}/L_{pu} = 2$, $V_{Tpu} = -3$ V, $V_{Tpd} = 1$ V, se ne disegni la transcaratteristica al variare del rapporto d'aspetto del “pull-down”, per $S_{pd} = W_{pd}/L_{pd} = 1, 2, 4, 8, 16$.

La transcaratteristica di un invertitore è l'andamento della tensione di uscita V_{out} al variare di quella di ingresso V_{in} , ottenuta in condizioni statiche, ovvero valutando V_{out}

per ogni possibile livello di V_{in} . Poiché l'invertitore è privo di carico, il legame tra V_{out} e V_{in} si può ottenere imponendo l'uguaglianza tra le correnti che percorrono i transistori di "pull-up" e "pull-down". A tal fine, occorre prima identificare le diverse zone di funzionamento nelle quali si vengono a trovare i transistori al variare della tensione di ingresso.

Per quanto riguarda il "pull-up", è $V_{GS} = 0 > V_{Tpu}$, indipendentemente da V_{in} ; quindi il transistor non è mai interdetto, ma può funzionare in zona di saturazione o in zona triodo, a seconda del valore di V_{out} :

- saturazione se $V_{DD} - V_{out} > -V_{Tpu}$, ovvero $V_{out} < V_{DD} + V_{Tpu} = 2 \text{ V}$;
- triodo se $V_{out} > V_{DD} + V_{Tpu} = 2 \text{ V}$;

Il transistor di "pull-down" attraversa invece tutte e tre le possibili regioni di funzionamento:

- interdizione se $V_{in} < V_{Tpd} = 1 \text{ V}$;
- saturazione se $V_{out} > V_{in} - V_{Tpd}$;
- triodo se $V_{out} < V_{in} - V_{Tpd}$;

Riportando tali disequaglianze sul piano $V_{in} \times V_{out}$, si possono identificare le zone di funzionamento dei transistori per tutte le condizioni riconoscono 6 possibili, come mostrato nella figura 12.4, dove si riconoscono 6 regioni possibili; la curva della transcaratteristica, a seconda del rapporto d'aspetto del "pull-up", attraversa le regioni 1, 2, 5 e 6 (caso A), oppure le 1, 2, 3, 6 (caso B):

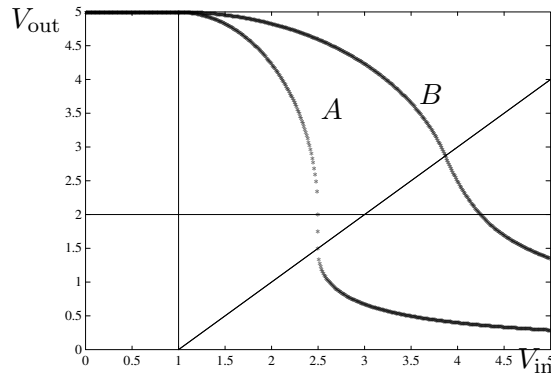


Figura 12.4: Regioni di funzionamento dell'invertitore NMOS

regione	"pull-down"	"pull-up"
1	interdizione	triode
2	saturazione	triode
3	triode	triode
4	interdizione	saturazione
5	saturazione	saturazione
6	triode	saturazione

caso A			caso B		
regione	“pull-down”	“pull-up”	regione	“pull-down”	“pull-up”
1	interdizione	triode	1	interdizione	triode
2	saturazione	triode	2	saturazione	triode
5	saturazione	saturazione	3	triode	triode
6	triode	saturazione	6	triode	saturazione

Le correnti attraverso i due transistori sono:

$$I_{DSpd} = \begin{cases} 0 & \text{interdizione} \\ \mu_n C_{ox} S_{pd} [(V_{in} - V_{Tpd}) - \frac{1}{2} V_{out}] V_{out} & \text{triode} \\ \frac{1}{2} \mu_n C_{ox} S_{pd} (V_{in} - V_{Tpd})^2 & \text{saturazione} \end{cases}$$

e

$$I_{DSpu} = \begin{cases} \mu_n C_{ox} S_{pu} [(-V_{Tpu}) - \frac{1}{2} (V_{DD} - V_{out})] (V_{DD} - V_{out}) & \text{triode} \\ \frac{1}{2} \mu_n C_{ox} S_{pu} V_{Tpu}^2 & \text{saturazione} \end{cases}$$

Si eguagliano ora le correnti nelle diverse regioni attraversate dalla curva. Nella regione 1 si ha:

$$0 = \mu_n C_{ox} S_{pu} \left[(-V_{Tpu}) - \frac{1}{2} (V_{DD} - V_{out}) \right] (V_{DD} - V_{out})$$

Delle due soluzioni, $V_{out} = V_{DD}$ e $V_{out} = V_{DD} + 2V_{Tpu}$, quest'ultima è da scartare, perché la prima condizione di funzionamento prevede che il “pull-up” sia in zona triode e dunque che $V_{out} > V_{DD} + V_{Tpu}$. La tensione di uscita dell'invertitore è quindi

$$V_{out} = V_{DD} \quad \text{per} \quad 0 < V_{in} < V_{Tpd}$$

Nella regione 2,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mu_n C_{ox} S_{pd} (V_{in} - V_{Tpd})^2 &= \mu_n C_{ox} S_{pu} \left[(-V_{Tpu}) - \frac{1}{2} (V_{DD} - V_{out}) \right] (V_{DD} - V_{out}) \\ (V_{DD} - V_{out})^2 + 2V_{Tpu}(V_{DD} - V_{out}) + \frac{S_{pd}}{S_{pu}} (V_{in} - V_{Tpd})^2 &= 0 \\ V_{DD} - V_{out} &= -V_{Tpu} \mp \sqrt{V_{Tpu}^2 - \frac{S_{pd}}{S_{pu}} (V_{in} - V_{Tpd})^2} \end{aligned}$$

Per ragioni di continuità con l'andamento nella regione precedente per ottenere un andamento monotono decrescente di V_{out} in funzione di V_{in} , deve essere scelto il segno $-$, perciò

$$V_{out} = V_{DD} + V_{Tpu} + \sqrt{V_{Tpu}^2 - \frac{S_{pd}}{S_{pu}} (V_{in} - V_{Tpd})^2}$$

I limiti di validità di tale espressione sono: $V_{in} > V_{Tpd}$ e $V_{out} > V'_{out}$, dove

$$V'_{out} = \max((V_{DD} + V_{Tpu}), (V_{in} + V_{Tpd})) \quad (12.2)$$

Nella regione 3, entrambi i transistori sono in zona triodo:

$$\begin{aligned} & \mu_n C_{ox} S_{pd} \left[(V_{in} - V_{Tpd}) - \frac{1}{2} V_{out} \right] V_{out} = \\ & = \mu_n C_{ox} S_{pu} \left[-V_{Tpu} - \frac{1}{2} (V_{DD} - V_{out}) \right] (V_{DD} - V_{out}) \end{aligned}$$

Esplicitando rispetto a V_{out} si ottiene

$$V_{out} = V_{\star} - \sqrt{V_{\star}^2 + V_{DD} \frac{S_{pu}}{S_{pd} - S_{pu}} (2V_{Tpu} + V_{DD})}$$

dove

$$V_{\star} = \frac{V_{in} - V_{Tpd} - S_{pu}/S_{pd} (V_{Tpu} + V_{DD})}{1 - S_{pu}/S_{pd}}$$

Nella regione 5 si ha

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \mu_n C_{ox} S_{pd} (V_{in} - V_{Tpd})^2 = \frac{1}{2} \mu_n C_{ox} S_{pu} V_{Tpu}^2 \\ & V_{in} = V_{Tpd} \mp \sqrt{\frac{S_{pu}}{S_{pd}}} |V_{Tpu}| = V_{Tpd} + \sqrt{\frac{S_{pu}}{S_{pd}}} |V_{Tpu}| \end{aligned}$$

dove il segno $-$ è stato scartato perché deve essere $V_{in} > V_{Tpd}$. In questa regione, la tensione di uscita commuta

$$\text{da } V_{out} = V_{DD} + V_{Tpu} \quad \text{a} \quad V_{out} = V_{in} - V_{Tpd} = \sqrt{\frac{S_{pu}}{S_{pd}}} |V_{Tpu}|$$

quando la tensione di ingresso transita per $V_{Tpd} + \sqrt{\frac{S_{pu}}{S_{pd}}} |V_{Tpu}|$.

Infine, eguagliando le correnti nella regione 6,

$$\begin{aligned} & \mu_n C_{ox} S_{pd} \left[(V_{in} - V_{Tpd}) - \frac{1}{2} V_{out} \right] V_{out} = \frac{1}{2} \mu_n C_{ox} S_{pu} V_{Tpu}^2 \\ & \frac{S_{pu}}{S_{pd}} V_{Tpu}^2 - 2(V_{in} - V_{Tpd}) V_{out} + V_{out}^2 = 0 \end{aligned}$$

si esprime la tensione di uscita come

$$V_{out} = (V_{in} - V_{Tpd}) \mp \sqrt{(V_{in} - V_{Tpd})^2 - S_{pu}/S_{pd} V_{Tpu}^2}$$

dove il segno $+$ si scarta perché V_{out} decresce al crescere di V_{in} ; l'equazione è valida per $V_{out} < V_{DD} + V_{Tpu}$ e $V_{out} < V_{in} + V_{Tpd}$.

Al fine di discriminare tra il caso A e il caso B, occorre confrontare il valore della tensione di uscita quando si passa dalla regione 2 alla regione 5, V_{2-5} , con quello corrispondente alla transizione tra le regioni 2 e 3, V_{2-3} (si veda la figura 12.4):

$$V_{2-5} = V_{DD} - V_{Tpu} = 2 V, \quad V_{2-3} = V_{in} - V_{Tpd}$$

Se $V_{2-5} > V_{2-3}$, si ha il caso A, altrimenti il caso B. Si sostituisce $V_{out} = V_{in} - V_{Tpd}$ nell'espressione della tensione nella regione 2,

$$V_{out} = V_{DD} + V_{Tpu} + \sqrt{V_{Tpu}^2 - \frac{S_{pd}}{S_{pu}} V_{out}^2}$$

e si ricava V_{2-3} in funzione del rapporto d'aspetto dei MOSFET:

$$V_{out} = V_{2-3} = \frac{V_{DD} + V_{Tpu} + \sqrt{(V_{DD} + V_{Tpu})^2 - (1 + 1/f)(V_{DD}^2 + 2V_{Tpu} V_{DD})}}{1 + 1/f}$$

dove $f = S_{pu}/S_{pd}$. Si confrontano ora le due tensioni V_{2-5} e V_{2-3} : si ricade nel caso A quando

$$\begin{aligned} V_{2-3} &< V_{2-5} \\ (V_{DD} + V_{Tpu})^2 - \left(1 + \frac{1}{f}\right) (V_{DD}^2 + 2V_{Tpu} V_{DD}) &< \frac{1}{f^2} (V_{DD} + V_{Tpu})^2 \\ (V_{DD} + V_{Tpu})^2 \left(1 - \frac{1}{f}\right) &< (V_{DD}^2 + 2V_{Tpu} V_{DD}) \\ f &< \left(\frac{V_{DD} + V_{Tpu}}{V_{Tpu}}\right)^2 = 0,44 \end{aligned}$$

In conclusione si ha

$$\begin{aligned} f = S_{pu}/S_{pd} &< 0,44 \rightarrow \text{caso A} \\ f = S_{pu}/S_{pd} &> 0,44 \rightarrow \text{caso B} \end{aligned}$$

Le espressioni trovate per V_{out} consentono di tracciare in modo piuttosto accurato la transcaratteristica del dispositivo, come indicato nella figura 12.5: le curve riportate si riferiscono ai valori $f = 2 - 1 - 0,5 - 0,25 - 0,125$.

12.1.3

Dato l'invertitore logico NMOS del problema 12.1.2, si calcolino i margini di rumore del dispositivo nel caso $S_{pu} = W_{pu}/L_{pu} = 2$, $S_{pd} = W_{pd}/L_{pd} = 8$.

I margini di rumore del dispositivo sono definiti come

$$NM_H = V_{OH} - V_{IH} \quad NM_L = V_{IL} - V_{OL}$$

V_{IL} e V_{IH} sono scelte in corrispondenza delle ascisse per le quali le tangenti alla transcaratteristica hanno coefficiente angolare pari a -1 . Inoltre si ha $V_{OH} = V_{DD}$ e $V_{OL} = 0$.

Le tensioni V_{IL} e V_{IH} si ottengono imponendo che le derivate rispetto a V_{in} delle espressioni di V_{out} nelle regioni 2 e 4 (identificate nella figura 12.4) valgano -1 . Nella regione 2 si ha

$$\begin{aligned} \frac{dV_{out}}{dV_{in}} &= \frac{-\frac{S_{pd}}{S_{pu}} (V_{in} - V_{Tpd})}{\sqrt{V_{Tpu}^2 - \frac{S_{pd}}{S_{pu}} (V_{in} - V_{Tpd})^2}} = -1 \\ \left(\frac{S_{pd}}{S_{pu}}\right)^2 (V_{in} - V_{Tpd})^2 &= V_{Tpu}^2 - \frac{S_{pd}}{S_{pu}} (V_{in} - V_{Tpd})^2 \\ (V_{in} - V_{Tpd})^2 \left[\left(\frac{S_{pd}}{S_{pu}}\right)^2 + \frac{S_{pd}}{S_{pu}}\right] &= V_{Tpu}^2 \end{aligned}$$

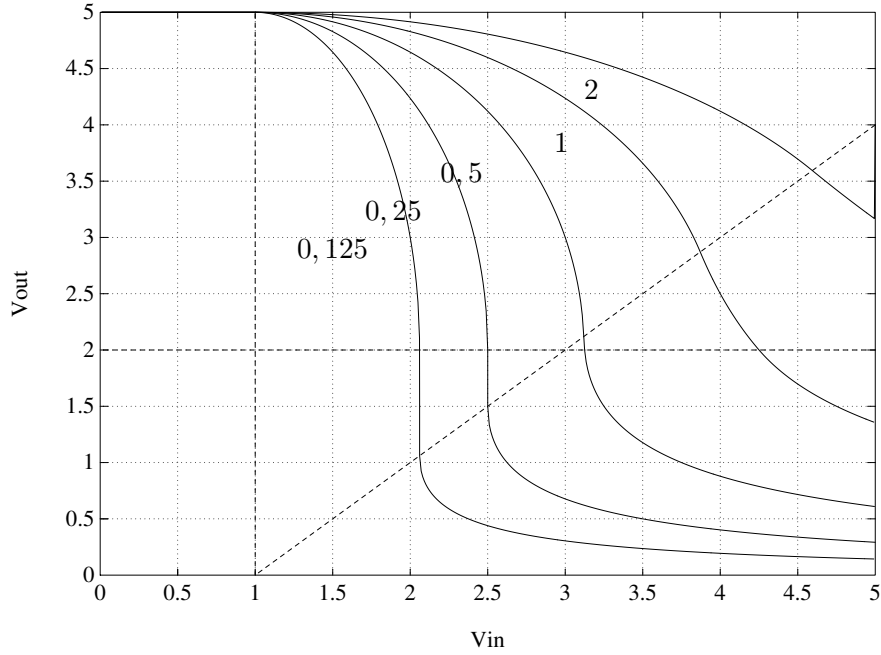


Figura 12.5: Transcaratteristica dell'invertitore NMOS al variare del rapporto d'aspetto.

Si ottiene quindi

$$V_{in} = V_{Tpd} + \frac{|V_{Tpu}|}{\sqrt{\left(\frac{S_{pd}}{S_{pu}}\right)^2 + \frac{S_{pd}}{S_{pu}}}} = 1,67 \text{ V}$$

Nella regione 4 si ha analogamente

$$\frac{dV_{out}}{dV_{in}} = 1 - \frac{V_{in} - V_{Tpd}}{\sqrt{(V_{in} - V_{Tpd})^2 - \frac{S_{pu}}{S_{pd}} V_{Tpu}^2}} = -1$$

$$(V_{in} - V_{Tpd})^2 = 4 (V_{in} - V_{Tpd})^2 - 4 \frac{S_{pu}}{S_{pd}} V_{Tpu}^2$$

da cui si trova

$$V_{in} = V_{Tpd} + 2\sqrt{\frac{S_{pu}}{3S_{pd}}} |V_{Tpu}| = 2,73 \text{ V}$$

In conclusione, i valori numerici dei margini di rumore sono

$$NM_H = V_{OH} - V_{IH} = 5 - 2,73 = 2,27 \text{ V}$$

$$NM_L = V_{IL} - V_{OL} = 1,67 - 0 = 1,67 \text{ V}$$

12.1.4

Con riferimento all'invertitore logico NMOS del problema 12.1.2, calcolare i margini di rumore per i seguenti valori del parametro $f = S_{pu}/S_{pd}$, dove S_{pu} e S_{pd} sono i rapporti

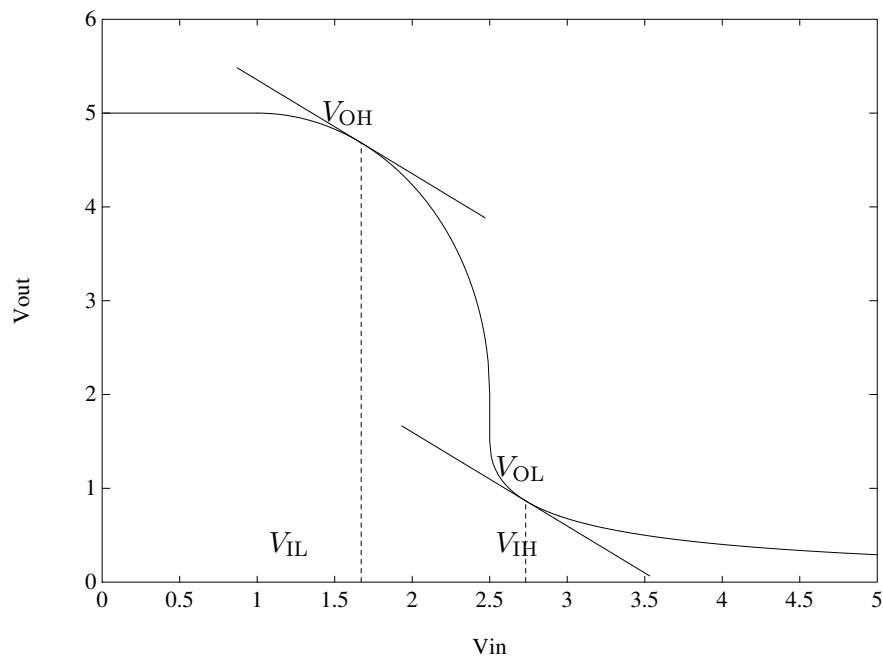


Figura 12.6: Definizione dei margini di rumore sulla transcaratteristica dell'invertitore.

d'aspetto dei due MOSFET: 2, 1, 0,5, 0,25, 0,125. Ricavare inoltre il valore della tensione di uscita, quando l'ingresso è polarizzato a $V_{DD} = 5$ V. Alla luce dei risultati ottenuti, quale dei cinque invertitori si può considerare il migliore?

12.1.5

Si usi PSPICE per simulare l'invertitore logico NMOS, tenendo conto delle capacità intrinseche del dispositivo: si confronti la transcaratteristica ottenuta in questo caso con quella di un invertitore ideale.

Parametri per il modello del transistor ad arricchimento

```
.MODEL NMOSEN NMOS (LEVEL=1    L=2U      W=4U
+      LAMBDA=0.01 RSH=166      TOX=5.0E-8
+      NSUB=5.3E15 TPG=1       XJ=0.3U
+      UO=1295    VMAX=5.0E4
+      PB=0.88    CBD=2.58E-15 FC=0.5      )
```

Per il transistor di “pull-up”, si mantenga il medesimo modello, con tensione di soglia negativa.

Stimare analiticamente e successivamente misurare con PSPICE il consumo di potenza del dispositivo.

12.1.6

Si consideri un invertitore costituito da due transistori, uno di “pull-down” e l'altro di “pull-up”, entrambi a canale n, del tipo ad arricchimento e aventi le seguenti caratteristiche:

- tensione di soglia $V_T = V_{Tpd} = V_{Tpu} = 1,5 \text{ V}$,
- transconduttanza $\beta_{pd} = 1/4 S_{pu} = 35 \mu\text{A V}^{-2}$,
- alimentazione $V_{DD} = 5 \text{ V}$.

Il gate del transistor di “pull-up” è alla tensione V_{DD} , mentre l'uscita è presa sul drain del “pull-down”.

Calcolare la tensione di inversione e il valore di V_{out} quando $V_{in} = V_{DD}$ e $V_{in} = 0$.

All'inversione logica si ha $V_{in} = V_{out}$ e, poiché per entrambi i transistori $V_{GS} = V_{DS}$, il “pull-up” e il “pull-down” sono in saturazione. Eguagliando le correnti,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\beta_{pd}(V_{in} - V_T)^2 &= \frac{1}{2}\beta_{pu}(V_{DD} - V_{out} - V_T)^2 \\ (V_{in} - V_T)^2 &= 4(V_{DD} - V_{out} - V_T)^2\end{aligned}$$

si ottiene la tensione di inversione

$$V_{inv} = \frac{2}{3}V_{DD} - \frac{1}{3}V_T = 2,83 \text{ V}$$

Con $V_{in} = V_{DD}$ il transistor di “pull-up” è ancora in saturazione, mentre il “pull-down” è in zona quadratica:

$$\begin{aligned}I_{pd} &= I_{pu} \\ \beta_{pd}\left(V_{in} - V_T - \frac{1}{2}V_{out}\right)V_{out} &= \frac{1}{2}\beta_{pu}(V_{DD} - V_{out} - V_T)^2 \\ \left(V_{in} - V_T - \frac{1}{2}V_{out}\right)V_{out} &= 2(V_{DD} - V_{out} - V_T)^2\end{aligned}$$

la tensione di uscita è quindi data da

$$V_{out} = \frac{4V_{DD} - 3V_T + V_{in} - \sqrt{(4V_{DD} - 3V_T + V_{in})^2 - 8(V_{DD} - V_T)^2}}{6} = 0,51 \text{ V}$$

Quando $V_{in} = 0 \text{ V}$, il transistor di “pull-down” è interdetto; il “pull-up” rimane in saturazione e la corrente va a caricare la capacità del nodo di uscita, la cui tensione sale progressivamente. Quando risulta $V_{out} \leq V_{DD} - V_T$, la tensione gate-source del “pull-up” scende sotto la soglia e la corrente si annulla. Pertanto, con $V_{in} = 0$ la tensione di uscita si stabilizza al valore

$$V_{out} = V_{DD} - V_T = 3,5 \text{ V}$$

12.1.7

Confrontare il tempo di salita dell'invertitore descritto nel problema 12.1.6 con quello di un invertitore avente come dispositivo di “pull-up” un transistor a svuotamento ($V_T = -1,5 \text{ V}$). Si assuma che per entrambi gli invertitori il livello di tensione in uscita quando $V_{in} = V_{DD}$ sia $V_{out} = V_{OL} = 0,51 \text{ V}$, che $\beta_{pd} = 35 \mu\text{A V}^{-2}$, $\beta_{pu} = 140 \mu\text{A V}^{-2}$, e che il carico sia una capacità $C_L = 30 \text{ fF}$.

Per quanto riguarda l'invertitore del problema 12.1.6, il transistor di "pull-up" funziona in zona di saturazione fino a quando entra in interdizione; alla transizione di V_{in} da 0 a V_{DD} , il "pull-down" entra in interdizione e la corrente attraverso il "pull-up" va a caricare la capacità C_L :

$$I_{pu} = \frac{1}{2}\beta_{pu}(V_{GS} - V_T)^2 = \frac{1}{2}\beta_{pu}(V_{DD} - V_{out} - V_T)^2 = C_L \frac{dV_{out}}{dt}$$

Integrando l'equazione, si ottiene l'andamento della tensione di uscita:

$$\int_{V_{OL}}^{V_{out}} \frac{dV}{(V_{DD} - V_T - V)^2} = \int_0^t \frac{\beta_{pu}}{2C_L} dt$$

All'istante t la tensione di uscita è quindi data da

$$V_{out}(t) = V_{DD} - V_T - \frac{2C_L}{\beta_{pu}t + 2C_L/(V_{DD} - V_T - V_{OL})}$$

Nel caso numerico indicato, si ha

$$V_{out} = 3,5 - \frac{0,43}{t + 0,14}$$

con t espresso in ns. L'andamento di V_{out} per questo invertitore è illustrato nella figura 12.7 (curva *a*).

Nel caso dell'invertitore con "pull-up" a svuotamento, occorre distinguere due zone di funzionamento: per tensioni $V_{out} < V_{DD} + V_T$, il "pull-up" è in saturazione e, quando la tensione di uscita supera tale limite, entra in zona quadratica. Nel primo caso si ha

$$\frac{1}{2}\beta_{pu}(V_{GS} - V_T)^2 = \frac{1}{2}\beta_{pu}V_T^2 = C_L \frac{dV_{out}}{dt}$$

Poiché la corrente è costante, la tensione sulla capacità cresce in modo lineare, a partire da V_{OL}

$$V_{out} = V_{OL} + \frac{\beta_{pu}V_T}{2C_L}t$$

fino al limite per cui il transistor di "pull-up" passa in zona quadratica, ovvero $V_{out} = V^* = V_{DD} + V_T$. Tale limite è raggiunto in un tempo

$$t^* = \frac{2C_L}{\beta_{pu}V_T^2}(V^* - V_{OL}) = 0,57 \text{ ns}$$

In zona quadratica, la corrente che carica la capacità si riscrive come

$$\beta_{pu} \left[-V_T - \frac{1}{2}(V_{DD} - V_{out}) \right] (V_{DD} - V_{out}) = C_L \frac{dV}{dt}$$

Integrando si ha

$$\begin{aligned} \int_{t^*}^t \frac{\beta_{pu}}{C_L} dt &= \int_{V^*}^{V_{out}} \frac{dV}{(V_{DD} - V) \left[-V_T - \frac{1}{2}(V_{DD} - V_{out}) \right]} \\ \frac{\beta_{pu}}{C_L}(t - t^*) &= \int_{V_{DD}-V^*}^{V_{DD}-V_{out}} -\frac{dx}{x(-V_T - 1/2 x)} \\ \frac{\beta_{pu}}{C_L}(t - t^*) &= -\frac{1}{V_T} \ln \left| 2 \frac{-V_T - 1/2(V_{DD} - V_{out})}{V_{DD} - V_{out}} \right| \end{aligned}$$

Per la tensione di uscita si ottiene

$$V_{\text{out}} = V_{DD} + \frac{2V_T}{1 + e^{\beta_{\text{pu}} V_T(t-t^*)/C_L}}$$

Con i valori numerici del problema, la V_{out} risulta data da

$$V_{\text{out}} = 5 - \frac{3}{1 + 58,64 e^{t/0,14}}$$

dove t è espresso in ns. L'andamento della tensione di uscita è riportato nella figura 12.7 (curva b).

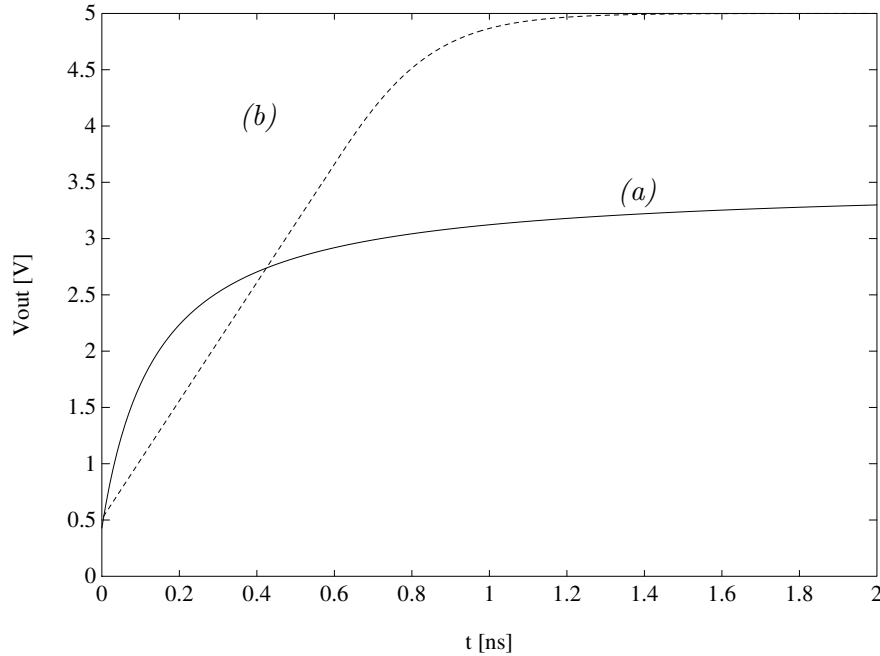


Figura 12.7: Commutazione per due invertitori con “pull-up” ad arricchimento (a) e a svuotamento (b).

12.1.8

Usare PSPICE per simulare il transitorio di commutazione nel circuito della figura 12.2, adottando i modelli del problema 12.1.1. Per quale ragione il tempo di salita risulta differente da quello di discesa?

12.2 L'invertitore CMOS

12.2.1

Un invertitore logico CMOS (fig. 12.8) presenta una tensione di soglia del transistor di “pull-down” $V_{Tn} = 0,8 \text{ V}$, mentre per il “pull-up” si ha $V_{Tp} = -V_{Tn}$. Sapendo che lo spessore dell'ossido di gate è pari a $x_{ox} = 500 \text{ \AA}$ per entrambi i transistori e che i valori di mobilità dei portatori sono $\mu_n = 1294 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$ e $\mu_p = 435 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$,

dimensionare il dispositivo in modo da garantire un valore della tensione di inversione pari a $V_{inv} = V_{DD}/2$.

Tracciare inoltre l'andamento della tensione di inversione al variare del rapporto d'aspetto dei due transistori. Quale caratteristica tecnologica del dispositivo garantirebbe un valore di V_{inv} indipendente dalle dimensioni? Spiegare perché tale caratteristica è inaccettabile.

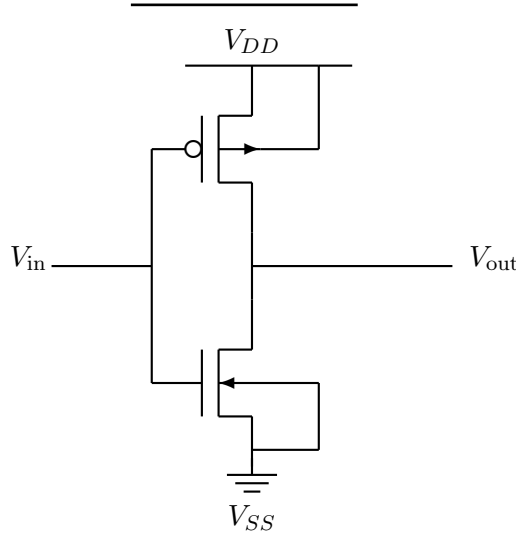


Figura 12.8: Struttura dell'invertitore CMOS.

Poiché alla tensione di inversione $V_{in} = V_{out} = V_{DD}/2$, si ha

$$V_{DS_n} > V_{GS_n} - V_{Tn} \quad |V_{DS_p}| > |V_{GS_p} - V_{Tp}|$$

e quindi entrambi i MOSFET sono in saturazione. L'espressione della tensione di inversione si ottiene eguagliando le correnti I_{DS_n} e $-I_{DS_p}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\beta_n(V_{GS_n} - V_{Tn})^2 &= \frac{1}{2}\beta_p(V_{GS_p} - V_{Tp})^2 \\ \frac{1}{2}\beta_n(V_{in} - V_{Tn})^2 &= \frac{1}{2}\beta_p(V_{in} - V_{DD} - V_{Tp})^2 \end{aligned}$$

dove

$$\beta_n = \mu_n \frac{\epsilon_{ox}}{x_{ox}} \frac{W_n}{L_n} \quad \beta_p = \mu_p \frac{\epsilon_{ox}}{x_{ox}} \frac{W_p}{L_p}$$

Si risolve rispetto a $V_{inv} = V_{in}$, ottenendo

$$V_{inv} = \frac{V_{DD} + V_{Tp} + V_{Tn} \sqrt{\frac{\beta_n}{\beta_p}}}{1 + \sqrt{\frac{\beta_n}{\beta_p}}} \quad (12.3)$$

dunque, affinché $V_{inv} = V_{DD}/2$, deve essere $\beta_n = \beta_p$, ovvero, supponendo uguali le lunghezze di canale dei due MOSFET,

$$\frac{W_p}{W_n} = \frac{\mu_n}{\mu_p} = 2,97 \approx 3$$

Indicando con x il rapporto β_n/β_p , si osserva che V_{inv} è funzione monotona decrescente di x e quindi anche di W_n/W_p ; per valori molto piccoli di x , V_{inv} tende a $V_{DD} + V_{Tp}$, mentre per valori grandi di x , V_{inv} si avvicina a V_{Tn} . La dipendenza della tensione di inversione da x è rappresentata dal grafico nella figura 12.9; confrontando tale grafico

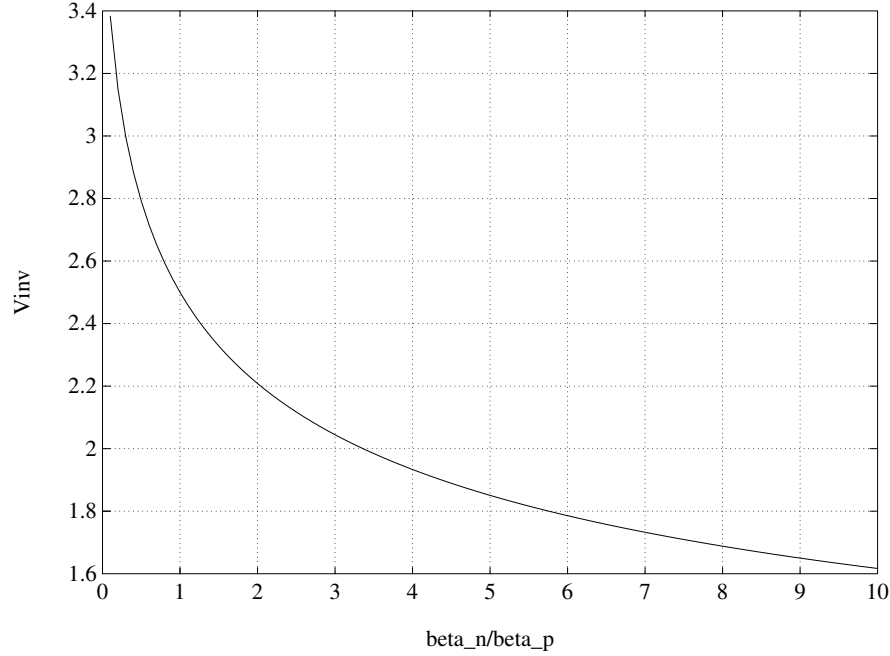


Figura 12.9: Dipendenza della tensione di inversione dal rapporto d'aspetto dei transistori.

con quello dato nella figura 12.3, si vede come la tensione di inversione per un invertitore CMOS sia meno sensibile al rapporto d'aspetto dei transistori, rispetto al caso dell'invertitore NMOS. Derivando la (12.3) si ha

$$\frac{dV_{inv}}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2} (V_{DD} + V_{Tp} - V_{Tn})$$

La tensione di inversione risulta costante al variare di x soltanto se la derivata si annulla, ovvero se $V_{DD} = V_{Tn} + |V_{Tp}|$. Tale condizione, tuttavia, comporta valori molto elevati delle tensioni di soglia e quindi tempi di commutazione dell'invertitore scadenti (si veda il problema 12.2.7).

12.2.2

È dato un invertitore CMOS caratterizzato dai seguenti parametri tecnologici:

- tensione di soglia del “pull-down”, $V_{Tn} = 0,8 \text{ V}$,
- tensione di soglia del “pull-up”, $V_{Tp} = -1,1 \text{ V}$,
- $\beta_n = 1/2 \beta_p = 9 \cdot 10^{-5} \text{ AV}^{-2}$.

Si identifichino sul piano (V_{in}, V_{out}) le regioni di funzionamento dei due transistori e si disegni la transcaratteristica.

Per il transistor di “pull-down” si ha

$$V_{GS_n} = V_{in} \quad V_{DS_n} = V_{out}$$

e pertanto le regioni quadratica, di saturazione e di interdizione sono divise dalle rette

$$\begin{aligned} V_{\text{out}} &= V_{\text{in}} - V_{Tn} \\ V_{\text{in}} &= V_{Tn} \end{aligned}$$

indicate nella figura 12.10 dalle linee tratteggiate. Per il MOSFET di “pull-up”, si ha invece

$$V_{GS_p} = V_{\text{in}} - V_{DD} \quad V_{DS_p} = V_{\text{out}} - V_{DD}$$

e quindi le tre regioni di funzionamento sono separate dalle rette

$$\begin{aligned} V_{\text{out}} &= V_{\text{in}} - V_{Tp} \\ V_{\text{in}} &= V_{DD} + V_{Tp} \end{aligned}$$

indicate nella figura 12.10 con linee punteggiate.

La transcaratteristica dell'invertitore attraversa quindi 5 diverse regioni (indicate nella figura 12.10 mediante zone ombreggiate), ciascuna delle quali è contraddistinta da una diversa espressione delle correnti attraverso i due transistori:

regione	I_{DS_n}
1	0
2	$\frac{1}{2}\beta_n(V_{\text{in}} - V_{Tn})^2$
3	$\frac{1}{2}\beta_n(V_{\text{in}} - V_{Tn})^2$
4	$\beta_n[V_{\text{in}} - V_{Tn} - \frac{1}{2}V_{\text{out}}]V_{\text{out}}$
5	$\beta_n[V_{\text{in}} - V_{Tn} - \frac{1}{2}V_{\text{out}}]V_{\text{out}}$

regione	I_{DS_p}
1	$-\beta_p[V_{\text{in}} - V_{DD} - V_{Tp} - \frac{1}{2}(V_{\text{out}} - V_{DD})](V_{\text{out}} - V_{DD})$
2	$-\beta_p[V_{\text{in}} - V_{DD} - V_{Tp} - \frac{1}{2}(V_{\text{out}} - V_{DD})](V_{\text{out}} - V_{DD})$
3	$-\frac{1}{2}\beta_p(V_{\text{in}} - V_{DD} - V_{Tp})^2$
4	$-\frac{1}{2}\beta_p(V_{\text{in}} - V_{DD} - V_{Tp})^2$
5	0

Il valore della tensione di uscita in condizioni statiche si ottiene eguagliando, in ciascuna regione, le due correnti. Nella prima regione, la condizione $I_{DS_p} = 0$ fornisce come unica soluzione di valore non negativo $V_{\text{out}} = V_{DD}$. Nella seconda regione, si trova

$$(V_{\text{out}} - V_{DD})^2 - 2(V_{\text{in}} - V_{DD} - V_{Tp})(V_{\text{out}} - V_{DD}) + \frac{\beta_n}{\beta_p}(V_{\text{in}} - V_{Tn})^2 = 0$$

che fornisce le soluzioni

$$V_{\text{out}} = V_{\text{in}} - V_{Tp} \mp \sqrt{(V_{\text{in}} - V_{DD} - V_{Tp})^2 - \frac{\beta_n}{\beta_p}(V_{\text{in}} - V_{Tn})^2} \quad (12.4)$$

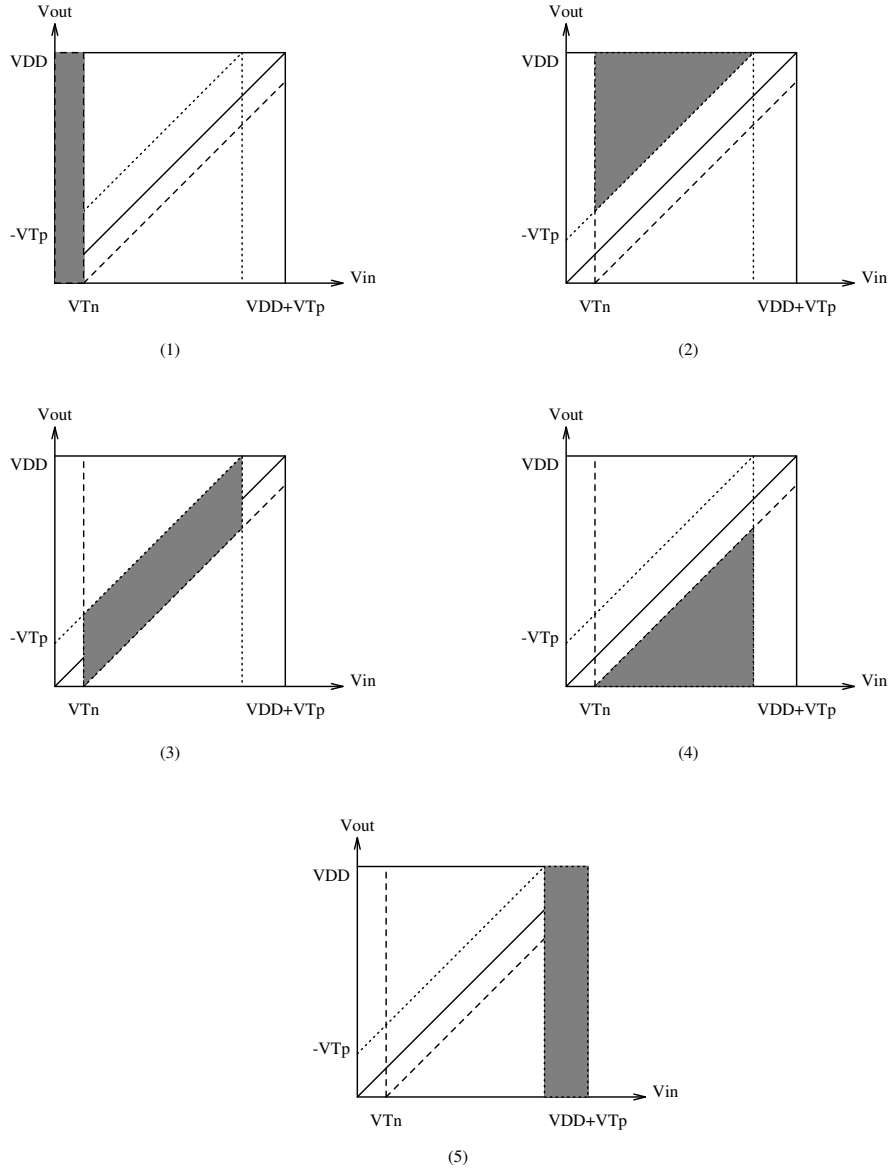


Figura 12.10: Regioni di funzionamento dei transistori in un invertitore CMOS.

Poiché, per $V_{in} = V_{Tn}$, la soluzione deve ridursi a $V_{out} = V_{DD}$, il segno corretto è quello negativo. Al limite tra le regioni 2 e 3, $V_{out} = V_{in} - V_{Tp}$; sostituendo nella (12.4) e ricavando prima V_{in} e poi V_{out} , si ha

$$V_{in} = \frac{V_{DD} + V_{Tp} + \sqrt{\frac{\beta_n}{\beta_p}} V_{Tn}}{1 + \sqrt{\frac{\beta_n}{\beta_p}}} \quad ; \quad V_{out} = \frac{V_{DD} + \sqrt{\frac{\beta_n}{\beta_p}} (V_{Tn} - V_{Tp})}{1 + \sqrt{\frac{\beta_n}{\beta_p}}}$$

Nella regione 3, eguagliando le correnti attraverso i due MOSFET, si ritrovano le tensioni di ingresso e uscita ottenute al confine tra le zone 2 e 3; la transcaratteristica è quindi idealmente verticale, in questo tratto.

Si eguagliano poi le correnti nella regione 4, trovando

$$V_{\text{out}}^2 - 2(V_{\text{in}} - V_{Tn})V_{\text{out}} + \frac{\beta_p}{\beta_n}(V_{\text{in}} - V_{DD} - V_{Tp}) = 0$$

che ammette le soluzioni

$$V_{\text{out}} = V_{\text{in}} - V_{Tn} \mp \sqrt{(V_{\text{in}} - V_{Tn})^2 - \frac{\beta_p}{\beta_n}(V_{\text{in}} - V_{DD} - V_{Tp})^2}$$

Analogamente a prima, la soluzione corretta è quella con il segno negativo, ovvero quella per la quale risulta $V_{\text{out}} = 0$ in corrispondenza di $V_{\text{in}} = V_{DD} + V_{Tp}$. Infine, nella regione 5, si ha

$$\beta_n \left(V_{\text{in}} - V_{Tn} - \frac{1}{2}V_{\text{out}} \right) V_{\text{out}} = 0$$

che dà come unica soluzione fisicamente accettabile $V_{\text{out}} = 0$.

L'unione delle soluzioni trovate per le 5 regioni identificate permette di tracciare a tratti la transcaratteristica del dispositivo, riportata nella figura 12.11.

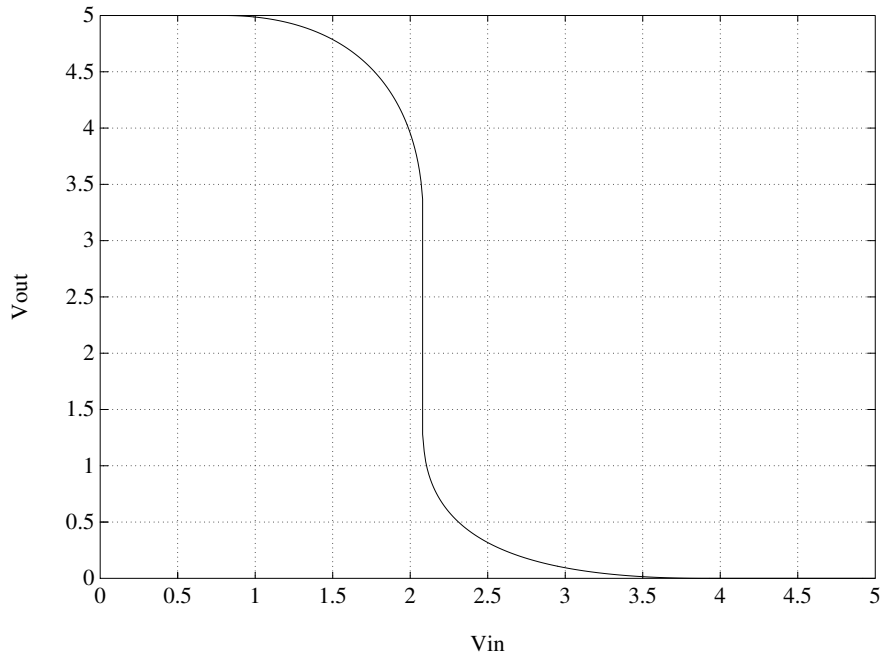


Figura 12.11: Transcaratteristica di un invertitore CMOS.

12.2.3

È dato un invertitore realizzato in tecnologia CMOS “p-well”, secondo la struttura schematizzata nella figura 12.12. Usando i seguenti dati tecnologici

1. giunzione $p^+ - \text{substrato}$:

- $N_A = 1 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$, $\tau_n = 100 \text{ ps}$
- $N_D = 5,3 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$, $\tau_p = 1 \mu\text{s}$
- $D_n = 2 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$, $L_n = 0,14 \mu\text{m}$

- $D_p = 12 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$, $L_p = 34 \text{ }\mu\text{m}$
- $A = 12 \text{ }\mu\text{m}^2$

2. giunzione pwell–substrato:

- $N_A = 5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$, $\tau_n = 1 \text{ }\mu\text{s}$
- $N_D = 5,3 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$, $\tau_p = 1 \text{ }\mu\text{s}$
- $D_n = 24 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$, $L_n = 49 \text{ }\mu\text{m}$
- $D_p = 12 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$, $L_p = 34 \text{ }\mu\text{m}$
- $A = 500 \text{ }\mu\text{m}^2$

3. capacità di carico: $C_L = 20 \text{ fF}$

4. frequenza di funzionamento: $f = 20 \text{ MHz}$

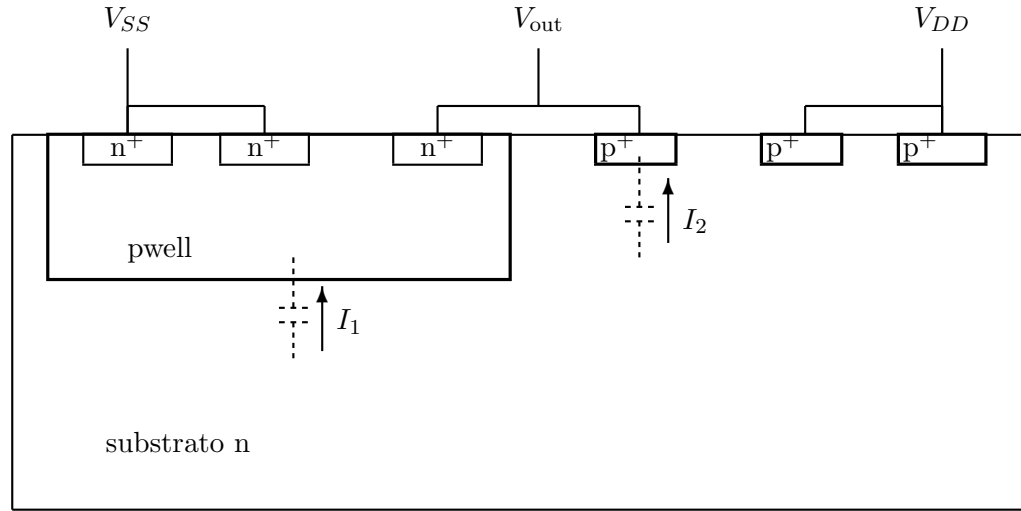


Figura 12.12: Struttura fisica dell'invertitore CMOS per il calcolo della potenza dissipata.

si calcolino la potenza dissipata staticamente (con $V_{\text{out}} = 0$) e dinamicamente dal dispositivo.

La potenza dissipata staticamente dall'invertitore è data da

$$P_{\text{sta}} = V_{DD} I_{lk}$$

dove I_{lk} è la corrente di perdita che si ha, con $V_{\text{out}} = 0$, attraverso la giunzione p^+ -substrato e pwell-substrato, polarizzate inversamente. Si tratta dunque di correnti inverse di saturazione, valutabili come

$$A q n_i^2 \left(\frac{D_p}{L_p N_D} + \frac{D_n}{L_n N_A} \right)$$

Applicando tale relazione al caso delle giunzioni p^+ -substrato e pwell-substrato rispettivamente, si ha

$$\begin{aligned} I_1 &= 2,7 \cdot 10^{-18} \text{ A} \\ I_2 &= 1,3 \cdot 10^{-16} \text{ A} \end{aligned}$$

La potenza dissipata staticamente, nel caso peggiore, è quindi

$$P_{\text{sta}} = V_{DD} (I_1 + I_2) = 6,6 \cdot 10^{-16} \text{ W}$$

Una valutazione più precisa della dissipazione statica richiede la valutazione delle correnti di generazione attraverso le giunzioni polarizzate inversamente. Assumendo per il tempo di generazione $\tau_g = 2 \cdot 10^{-7} \text{ s}$, e per la tensione di polarizzazione un valore -5 V , si possono calcolare le correnti di generazione nella regione di svuotamento (vi veda il capitolo 8) come

$$I_g = A \frac{q n_i x_d}{\tau_g}$$

L'ampiezza della regione di svuotamento si valuta facendo l'ipotesi di giunzione brusca

$$x_d = \sqrt{\frac{2\epsilon_s}{q N_{eq}} (\phi_i - V)}$$

Per le due giunzioni si ha allora

	well-substrato	p ⁺ -substrato
ϕ_i	0,724 V	0,862 V
N_{eq}	$4,79 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$	$5,3 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$
x_d	1,24 μm	1,196 μm
I_g	7,19 pA	0,166 pA

La potenza dissipata staticamente risulta

$$P_{\text{sta}} = 5 \times (7,19 + 0,166) \cdot 10^{-12} \text{ W} = 3,7 \cdot 10^{-11} \text{ W}$$

La potenza dissipata dinamicamente dall'invertitore si può calcolare come media della potenza istantanea, scomponendo il funzionamento del dispositivo in due fasi, una di carica e una di scarica della capacità C_L , come indicato nel modello equivalente della figura 12.13. Si ha dunque

$$P_{\text{din}} = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T_p/2} I_p(t) (V_{DD} - V_{\text{out}}) dt + \int_{T_p/2}^{T_p} I_n(t) V_{\text{out}} dt \right]$$

dove T_p è il periodo del segnale di uscita V_{out} , mentre I_p e I_n sono le correnti nei canali del "pull-up" e "pull-down" rispettivamente, date da

$$I_n(t) = -C_L \frac{dV_{\text{out}}}{dt} \quad I_p(t) = C_L \frac{dV_{\text{out}}}{dt}$$

L'integrale riportato sopra si calcola facilmente

$$\begin{aligned} P_{\text{din}} &= \frac{1}{T} \left[\int_{V_{DD}}^0 -C_L (V_{DD} - V_{\text{out}}) d(V_{DD} - V_{\text{out}}) + \int_{V_{DD}}^0 -C_L V_{\text{out}} dV_{\text{out}} \right] \\ P_{\text{din}} &= \frac{C_L (V_{DD}^2 + V_{DD}^2)}{2T_p} = \frac{C_L V_{DD}^2}{T_p} = C_L V_{DD}^2 f = 1 \cdot 10^{-5} \text{ W} \end{aligned}$$

Benché il valore trovato sia estremamente piccolo, si noti come, nel caso di circuiti integrati della complessità di 500.000 dispositivi, la potenza dissipata staticamente possa raggiungere valori di alcuni watt:

$$500.000 \times 1 \cdot 10^{-5} = 5 \text{ W}$$

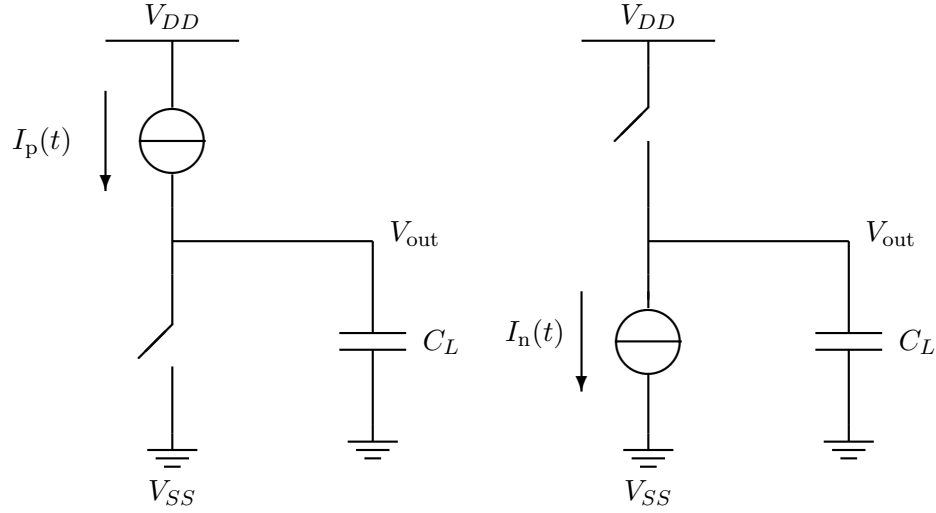


Figura 12.13: Modello dell'invertitore CMOS per il calcolo della potenza dissipata.

12.2.4

Si consideri l'invertitore logico rappresentato nella figura 12.14 (“inverter pseudo NMOS”) e avente le seguenti caratteristiche:

- $L_{pd} = 2 \mu\text{m}$ e $W_{pd} = 6 \mu\text{m}$
- $L_{pu} = 2 \mu\text{m}$ e $W_{pu} = 4 \mu\text{m}$
- $C_{ox} = 1 \cdot 10^{-7} \text{F cm}^{-2}$, per entrambi i transistori
- $\mu_n = 600 \text{ cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$ e $\mu_p = 300 \text{ cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$
- $V_{Tpd} = 1 \text{ V}$, $V_{Tpu} = -1 \text{ V}$
- $V_{DD} = 5 \text{ V}$

Calcolare la tensione di inversione logica. Quali dimensioni relative dovrebbero avere i due transistori per garantire una tensione di inversione logica pari alla metà della tensione di alimentazione?

Dai valori di mobilità dati si ottiene

$$\beta_n = 27 \cdot 10^{-5} \text{ AV}^{-2} \quad ; \quad \beta_p = 6 \cdot 10^{-5} \text{ AV}^{-2}$$

Il transistore di “pull-down” lavora certamente in saturazione quando $V_{in} = V_{out} = V_{inv}$ e la sua corrente si scrive

$$I_{pd} = \frac{1}{2} \beta_n (V_{in} - V_{Tpd})^2$$

Per il transistore di “pull-up”, si ha

$$V_{DS} = V_{out} - V_{DD} \quad ; \quad V_{GS} = -V_{DD}$$

il dispositivo è quindi in zona triodo se

$$V_{GS} - V_{Tpu} = -V_{DD} - V_{Tpu} < V_{DS} = V_{out} - V_{DD}$$

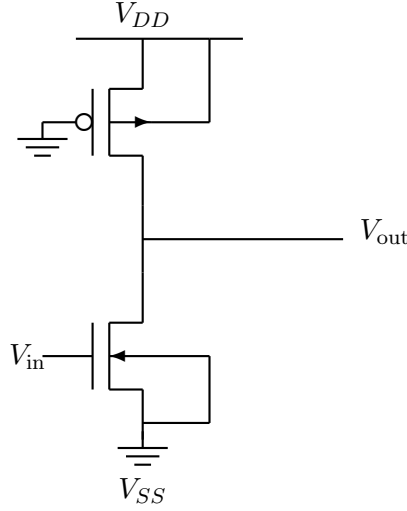


Figura 12.14: Invertitore “pseudo NMOS”.

ovvero se

$$V_{out} > -V_{Tpu}$$

Si fa l'ipotesi che il transistor di “pull-up” sia in zona triodo e si assume che la corrente sia

$$I_{pu} = -\beta_p \left[-V_{DD} - V_{Tpu} - \frac{1}{2}(V_{out} - V_{DD}) \right] (V_{out} - V_{DD})$$

tale ipotesi dovrà essere verificata dopo il calcolo della tensione di inversione. Si eguagliano le correnti che attraversano i due dispositivi nel caso $V_{in} = V_{out} = V_{inv}$

$$\begin{aligned} I_{pd} &= -I_{pu} \\ \frac{1}{2}\beta_n(V_{inv} - V_{Tpd})^2 &= \beta_p \left[-V_{DD} - V_{Tpu} - \frac{1}{2}(V_{inv} - V_{DD}) \right] (V_{inv} - V_{DD}) \end{aligned}$$

e si ottiene un'equazione di secondo grado nell'incognita V_{inv}

$$(\beta_n + \beta_p)V_{inv}^2 - 2(\beta_n V_{Tpd} - \beta_p V_{Tpu})V_{inv} + (\beta_n V_{Tpd}^2 - \beta_p V_{DD}^2 - 2\beta_p V_{Tpu} V_{DD}) = 0$$

che ammette le soluzioni

$$\begin{aligned} V_{inv} &= \frac{\beta_n V_{Tpd} - \beta_p V_{Tpu}}{\beta_n + \beta_p} \mp \\ &\mp \frac{\sqrt{(\beta_n V_{Tpd} - \beta_p V_{Tpu})^2 - (\beta_n + \beta_p)(\beta_n V_{Tpd}^2 - \beta_p V_{DD}^2 - 2\beta_p V_{Tpu} V_{DD})}}{\beta_n + \beta_p} \end{aligned}$$

Sostituendo i valori numerici, si ottiene, scegliendo il segno positivo,

$$V_{inv} = 2,73 \text{ V}$$

Dall'equivalenza delle due correnti, si ricava il rapporto β_p/β_n , proporzionale al rapporto d'aspetto dei transistori

$$\begin{aligned} \sqrt{2\frac{\beta_p}{\beta_n}} &= \frac{V_{inv} - V_{Tpd}}{\sqrt{(-V_{DD} - V_{Tpu})(V_{inv} - V_{DD}) - \frac{1}{2}(V_{inv} - V_{DD})^2}} \\ \frac{\beta_p}{\beta_n} &= \frac{2(-V_{DD} - V_{Tpu})(V_{inv} - V_{DD}) - (V_{inv} - V_{DD})^2}{(V_{inv} - V_{Tpd})^2} \end{aligned}$$

Imponendo che $V_{inv} = V_{DD}/2 = 2,5 \text{ V}$, si ha

$$\frac{\beta_n}{\beta_p} \simeq 6 \quad \text{ovvero} \quad \frac{W_n/L_n}{W_p/L_p} = 3$$

12.2.5

Usare SPICE per valutare il consumo di potenza degli invertitori del problema 12.2.2 (CMOS) e del problema 12.2.4 (pseudo NMOS).

12.2.6

Un invertitore CMOS è dimensionato in modo che

$$\frac{W_p}{W_n} = \frac{\mu_n}{\mu_p}$$

Si ricavi un'espressione che consenta di valutare i margini di rumore del dispositivo e calcolarli per $V_{Tn} = -V_{Tp} = 0,5 \text{ V}$, $1,5 \text{ V}$, $2,5 \text{ V}$.

I margini di rumore sono definiti nel modo seguente

$$NM_L = |V_{IL_{max}} - V_{OL_{max}}| \quad NM_H = |V_{OH_{min}} - V_{IH_{min}}|$$

dove le tensioni $V_{IL_{max}}$ e $V_{IH_{min}}$ sono valutate a in corrispondenza dei punti a derivata pari a -1 della transcaratteristica, come indicato nella figura 12.15. Per quanto riguarda l'uscita, $V_{OL_{max}} = 0$ e $V_{OH_{min}} = V_{DD}$. Nel punto $(V_{IL_{max}}, V_{OH})$, il “pull-up” è

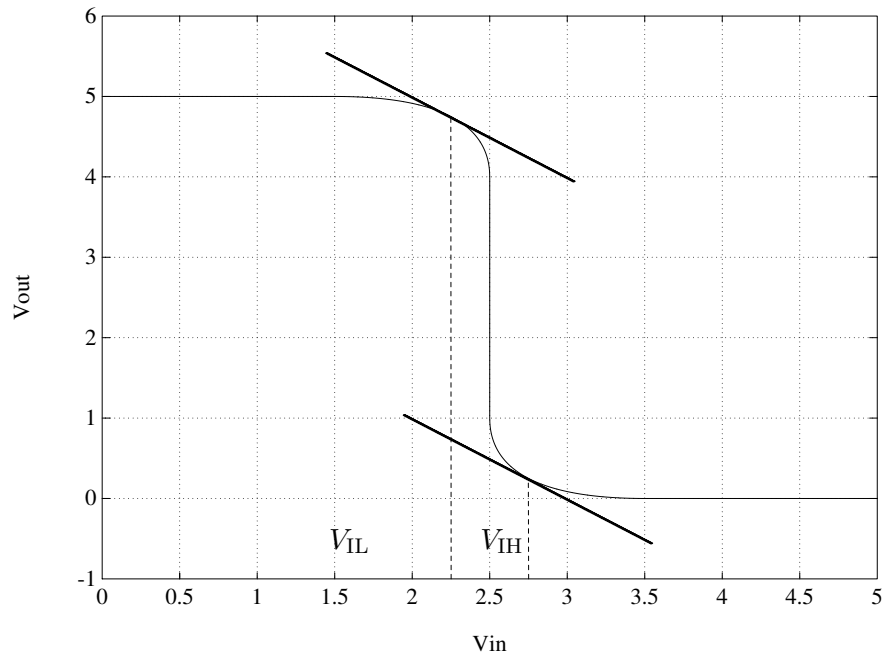


Figura 12.15: Margini di rumore in un invertitore CMOS.

in zona quadratica, mentre il “pull-down” è in saturazione. Eguagliando le espressioni

delle correnti I_{DS_n} e $-I_{DS_p}$ in tale condizione, si ottiene

$$V_O = (V_{in} - V_{Tn}) + \sqrt{(V_{in} - V_{Tp})^2 - 2(V_{in} - \frac{1}{2}V_{DD} - V_{Tp})V_{DD} - \frac{\beta_n}{\beta_p}(V_{in} - V_{Tn})^2}$$

Posto $\beta_n = \beta_p$, si deriva ora l'espressione trovata rispetto alla tensione di ingresso e si impone che la derivata valga -1 , identificando così $V_{IL_{max}}$.

$$\frac{dV_{out}}{dV_{in}} = 1 - \frac{V_{in} - V_{DD} - V_{Tp} - \beta_n/\beta_p(V_{in} - V_{Tn})}{\sqrt{(V_{in} - V_{DD} - V_{Tp})^2 - \beta_n/\beta_p(V_{in} - V_{Tn})^2}} = -1$$

$$V_{in} - V_{DD} - V_{Tp} - \beta_n/\beta_p(V_{in} - V_{Tn}) = 2\sqrt{(V_{in} - V_{DD} - V_{Tp})^2 - \beta_n/\beta_p(V_{in} - V_{Tn})^2}$$

Posto $x = \beta_n/\beta_p$, si ricava un'equazione di secondo grado nell'incognita V_{in} :

$$V_{in}^2 [3 - 2x - x^2] - 2V_{in} [(V_{DD} + V_{Tp} - x V_{Tn}) (3 + x)] + [3(V_{DD} + V_{Tp})^2 - (4 + x)x V_{Tn}^2 + 2x V_{Tn} (V_{DD} + V_{Tp})] = 0$$

Nel caso $x = 1$, l'equazione si semplifica,

$$8V_{in} (V_{DD} + V_{Tp} - V_{Tn}) = 3(V_{DD} + V_{Tp})^2 + 5V_{Tn}^2 + 2V_{Tn} (V_{DD} + V_{Tp})$$

$$V_{in} = \frac{3(V_{DD} + V_{Tp})^2 + 5V_{Tn}^2 + 2V_{Tn} (V_{DD} + V_{Tp})}{8V_{in} (V_{DD} + V_{Tp} - V_{Tn})}$$

e si ottiene

$$V_{in} = V_{IL_{max}} = \frac{3(V_{DD} + V_{Tp}) + 5V_{Tn}}{8} = 2,25$$

Nel punto $(V_{IH_{min}}, V_{OL})$, il transistor a canale p è in saturazione e quello a canale n è in zona quadratica; eguagliando le correnti, si trova

$$V_O = (V_{in} - V_{Tn}) - \sqrt{(V_{in} - V_{Tn})^2 - \frac{\beta_p}{\beta_n}(V_{in} - V_{DD} - V_{Tp})^2}$$

Si impone anche in questo caso $\frac{dV_O}{dV_{in}} = -1$ e si ottiene

$$V_{IH_{min}} = \frac{5V_{DD} + 5V_{Tp} + 3V_{Tn}}{8} = 2,75$$

Nel caso $\beta_n = \beta_p$, le espressioni generali per valutare i margini di rumore sono quindi

$$NM_H = V_{DD} - V_{IH_{min}} = \frac{3V_{DD} - 5V_{Tp} - 3V_{Tn}}{8}$$

$$NM_L = V_{IL_{max}} - 0 = \frac{3V_{DD} - 3V_{Tp} + 5V_{Tn}}{8}$$

Numericamente si ha

$V_{Tn} = -V_{Tp}$	$NM_H = NM_L$
0,5 V	2 V
1,5 V	2,25 V
2,5 V	2,5 V

Come risulta dalla tabella, i margini di rumore sono funzione crescente delle tensioni di soglia; la velocità di commutazione dell'invertitore invece diminuisce al crescere delle tensioni di soglia e pertanto il dimensionamento del dispositivo è una questione di compromesso tra velocità e robustezza nei confronti del rumore.

12.2.7

Si consideri un invertitore logico realizzato in tecnologia CMOS e la cui uscita sia collegata ad una capacità C_L . Supponendo che la tensione di ingresso subisca all'istante t_0 una transizione brusca da 0 a 5 V e successivamente, all'istante t_1 , ritorni bruscamente a 0 V, calcolare in entrambi i casi il ritardo con il quale la tensione di uscita compie la transizione dal 10% al 90% dell'intera escursione (tempi di salita e discesa della porta). Assumere $C_L = 10 \text{ fF}$, $\beta_n S_n = \beta_p S_p = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ A V}^{-2}$ e $V_{Tn} = -V_{Tp}$.

Nel caso della prima transizione, all'istante t_0^+ la tensione di ingresso V_{in} vale $V_{DD} = 5 \text{ V}$, mentre quella di uscita, che non può variare istantaneamente, vale $V_{out} = 5 \text{ V}$; ne consegue che il transistor di "pull-up" ha una tensione gate-source pari a $V_{GS} = 0 \text{ V}$ e si trova in interdizione ($I_{DS} = 0$). Il transistor di "pull-down" invece si trova inizialmente in zona di saturazione (perché $V_{GS} = V_{DS} = V_{DD}$) e vi rimane fino a quando $V_{DS} > (V_{GS} - V_{Tn})$, ovvero $V_{out} > (V_{DD} - V_{Tn})$; oltre si entra in zona triodo. In entrambi i casi, il transistor conduce e la corrente che lo attraversa scarica la capacità C_L , portando la tensione di uscita da 5 V a 0 V.

Si scompone il tempo di discesa della tensione di uscita in due termini:

1. t_{f1} , durante il quale il "pull-down" è in saturazione e $0,9V_{DD} < V_{out} < (V_{DD} - V_{Tn})$;
2. t_{f2} , durante il quale il "pull-down" è in zona triodo e $(V_{DD} - V_{Tn}) < V_{out} < 0,1V_{DD}$;

Si calcolano ora i due tempi di salita e discesa separatamente. Durante t_{f1} la corrente attraverso il "pull-down" si esprime come

$$I_{DS} = \frac{1}{2} \beta_n S_n (V_{DD} - V_{Tn})^2 = -C_L \frac{dV_{out}}{dt}$$

da cui integrando si ha

$$\begin{aligned} \int_0^{t_{f1}} dt &= -\frac{2C_L}{\beta_n S_n (V_{DD} - V_{Tn})^2} \int_{0,9V_{DD}}^{V_{DD}-V_{Tn}} dV_{out} \\ t_{f1} &= \frac{2C_L (V_{Tn} - 0,1V_{DD})}{\beta_n S_n (V_{DD} - V_{Tn})^2} \end{aligned}$$

Nel secondo intervallo di tempo, il transistor di "pull-down" è in zona triodo:

$$I_{DS} = \beta_n S_n [(V_{DD} - V_{Tn}) V_{out} - \frac{1}{2} V_{out}^2] = -C_L \frac{dV_{out}}{dt}$$

$$\begin{aligned} \int_{t_{f1}}^{t_{f1}+t_{f2}} dt &= -\frac{C_L}{\beta_n S_n} \int_{V_{DD}-V_{Tn}}^{0,1V_{DD}} \frac{1}{(V_{DD} - V_{Tn}) V_{out} - \frac{1}{2} V_{out}^2} dV_{out} \\ t_{f2} &= -\frac{C_L}{\beta_n S_n (V_{DD} - V_{Tn})} \int_{V_{DD}-V_{Tn}}^{0,1V_{DD}} \frac{1}{V_{out} - \frac{V_{out}^2}{2(V_{DD} - V_{Tn})}} dV_{out} \end{aligned}$$

L'integrale a secondo membro è risolvibile analiticamente ¹:

$$t_{f2} = -\frac{C_L}{\beta_n S_n (V_{DD} - V_{Tn})} \left(-\ln \left| \frac{1 - \frac{V_{out}}{2(V_{DD} - V_{Tn})}}{V_{out}} \right| \right) \Bigg|_{V_{DD}-V_{Tn}}^{0,1V_{DD}}$$

$$t_{f2} = \frac{C_L}{\beta_n S_n (V_{DD} - V_{Tn})} \ln \left(\frac{19V_{DD} - 20V_{Tn}}{V_{DD}} \right)$$

Sommando i due contributi, si ottiene il tempo di discesa della tensione di uscita

$$t_f = t_{f1} + t_{f2} = \frac{2C_L}{\beta_n S_n (V_{DD} - V_{Tn})} \left[\frac{V_{Tn} - 0,1V_{DD}}{V_{DD} - V_{Tn}} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{19V_{DD} - 20V_{Tn}}{V_{DD}} \right) \right]$$

Facendo l'ipotesi $V_{Tn} = 0,2V_{DD}$, l'espressione di t_f si semplifica come segue

$$t_f = \frac{2C_L}{0,8V_{DD} \beta_n S_n} [0,125 + \ln \sqrt{15}]$$

$$t_f = 3,698 \left[\frac{C_L}{V_{DD} \beta_n S_n} \right] \approx 4 \frac{C_L}{V_{DD} \beta_n S_n}$$

Tale tempo risulta quindi direttamente proporzionale alla capacità di carico dell'invertitore e inversamente proporzionale al rapporto d'aspetto S_n del transistor di "pull-down": più è largo il canale e più è piccolo il tempo di discesa.

Operando in modo analogo sul transistor a canale p, si ricava un'espressione per il tempo di salita:

$$t_r = \frac{2C_L}{\beta_p S_p (V_{DD} - |V_{Tp}|)} \left[\frac{|V_{Tp}| - 0,1V_{DD}}{V_{DD} - |V_{Tp}|} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{19V_{DD} - 20|V_{Tp}|}{V_{DD}} \right) \right]$$

Ponendo $V_{Tp} = -0,2V_{DD}$, si trova come prima

$$t_f \simeq 4 \frac{C_L}{V_{DD} \beta_p S_p}$$

Poiché $\beta_n = 2\beta_p$, per invertitori dimensionati in modo da avere i due transistori identici, vale la relazione

$$t_f = \frac{t_r}{2}$$

ovvero il tempo di discesa sarà più rapido di quello di salita. Nel caso numerico in questione ($\beta_n S_n = \beta_p S_p$ e $V_{Tn} = -V_{Tp}$), i due tempi sono invece uguali; si ha

$$t_f = t_r \approx 4 \frac{C_L}{V_{DD} \beta_p S_p} = 4 \frac{10 \cdot 10^{-15}}{5 \times 1,5 \cdot 10^{-4}} = 53 \text{ ps}$$

t_f e t_r risultano funzioni crescenti di V_{Tn} e $|V_{Tp}|$. Ne consegue che in un invertitore le esigenze di margini di rumore ampi e tempi di risposta piccoli sono in contrasto.

12.2.8

Un invertitore CMOS pilota una capacità $C_L = 100 \text{ fF}$ attraverso una linea metallica ($\rho = 3,44 \cdot 10^{-6} \Omega \text{cm}$) avente le dimensioni: lunghezza $L_{int} = 300 \mu\text{m}$, larghezza $W_{int} = 2 \mu\text{m}$. Sapendo che le resistenze di "pull-up" e "pull-down" della porta sono pari a $R = 2 \text{ k}\Omega$, calcolare i tempi di salita e discesa.

¹ $\int \frac{dx}{x(a+bx)} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a+bx}{x} \right|$

12.3 Porte logiche MOS

12.3.1

Si consideri la porta NAND a tre ingressi in tecnologia CMOS data nella figura 12.16: il circuito è costituito da una rete di “pull-down” formata dalla serie di tre transistori NMOS, e da una rete di “pull-up” formata da tre PMOSFET in parallelo. Assumendo che le due reti comprendano dispositivi identici e caratterizzati dai seguenti valori,

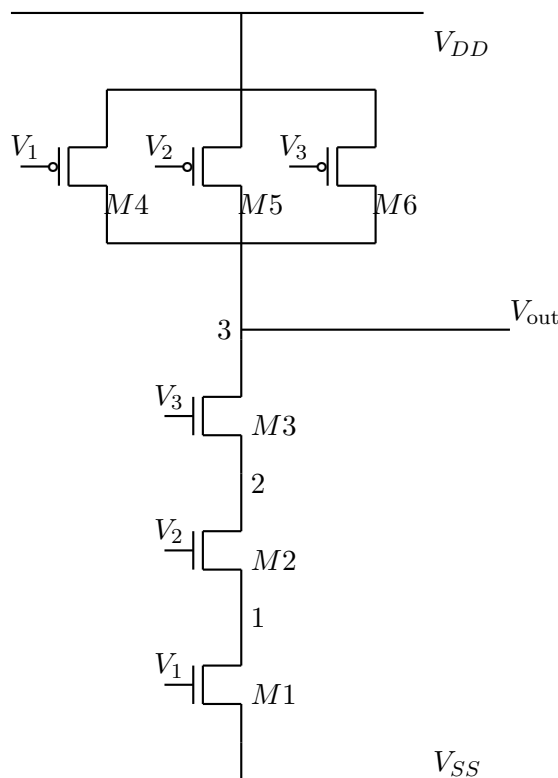


Figura 12.16: Porta NAND in tecnologia CMOS.

parametro	NMOSFET	PMOSFET
tensione di soglia	$V_{Tn} = 1 \text{ V}$	$V_{Tp} = -2 \text{ V}$
capacità di source	$C_s = 10 \text{ fF}$	$C_s = 10 \text{ fF}$
capacità di drain	$C_d = 10 \text{ fF}$	$C_d = 10 \text{ fF}$
mobilità	$\mu_n = 800 \text{ cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$	$\mu_p = 400 \text{ cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$
capacità dell'ossido	$C_{ox} = 100 \text{ nF/cm}^2$	
rapporto d'aspetto	$W/L = 1$	$W/L = 1$

si ottenga una stima del massimo ritardo alla commutazione della tensione di uscita della porta da V_{DD} a V_{SS} . La capacità di carico della porta vale $C_L = 30 \text{ fF}$.

La commutazione della tensione di uscita da V_{DD} a V_{SS} si ha quando le tensioni sugli ingressi sono tali da attivare tutti i transistori NMOS e lasciare in interdizione quelli PMOS. In queste condizioni, la capacità di carico C_L si scarica verso massa, attraversando la serie dei tre NMOS. Ciascuno dei nodi intermedi tra due transistori NMOS

(nodi 1 e 2) corrisponde a una capacità C_n , data dalla somma di una capacità di drain e una di source:

$$C_i = C_d + C_s$$

Al fine di stimare i ritardi delle porte logiche, sono stati sviluppati una varietà di modelli, alcuni dei quali sono usati in simulatori circuitali a livello “switch” o transistori². Uno dei più semplici e diffusi è noto come modello di Penfield-Rubenstein e permette di stimare il ritardo di reti RC arbitrarie. Nel caso di una serie di transistori NMOS riferiti a massa a un estremo, il modello³ prevede un ritardo

$$T = \sum_i \tilde{R}_i C_i$$

dove \tilde{R}_i è la resistenza tra il nodo i e massa, mentre C_i è la capacità del nodo i . Per il circuito della figura 12.16, il tempo di scarica è quindi stimato come

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

dove

$$\begin{aligned} T_1 &= (R_1 + R_2 + R_3) C_3 \\ T_2 &= (R_1 + R_2) C_2 \\ T_3 &= R_1 C_1 \end{aligned}$$

con R_k resistenza di canale del MOS M_k e C_k capacità del nodo k . Per ottenere una valutazione numerica del ritardo occorre stimare la capacità C_i e le resistenze R_i . Per quanto riguarda le prime, si ha

$$\begin{aligned} C_1 = C_2 &= C_s + C_d = 20 \text{ fF} \\ C_3 &= 4C_d + C_L = 70 \text{ fF} \end{aligned}$$

La resistenza di canale dei mosfet non è costante, ma varia al variare delle tensioni di source e drain. Per applicare il modello di Penfield-Rubenstein, occorre un valore costante di resistenza, ottenibile come media integrale calcolata su tutta la dinamica delle tensioni di source e drain dei transistori. Questa strada richiede lo studio in regime dinamico della commutazione dei tre MOSFET; una soluzione più semplice, in grado di fornire un limite superiore del tempo di ritardo, è ottenibile assumendo per tutti i transistori il valore massimo di resistenza, raggiunto in saturazione, con $V_{DS} = V_{GS} = V_{DD}$. In tal caso, poiché i transistori sono uguali, si ha

$$\begin{aligned} R_1 = R_2 = R_3 &= \frac{V_{DS}}{I_{DSsat}} \Big|_{V_{DS}=V_{GS}=V_{DD}} = \frac{V_{DD}}{0,5 \mu_n C_{ox} (V_{DD} - V_{Tn}) W/L} \\ R_1 = R_2 = R_3 &= \frac{5}{0,5 \times 800 \times 100 \cdot 10^{-9} \times 4^2} = 7812 \Omega \end{aligned}$$

Sostituendo si calcola il ritardo stimato

$$T_D = 7812 \times (20 + 2 \times 20 + 3 \times 70) \times 1 \cdot 10^{-15} = 2,1 \cdot 10^{-9} \text{ s} = 2,1 \text{ ns}$$

²Si veda N.H.E Weste e K. Eshraghian, *Principles of CMOS VLSI Design*, Addison-Wesley, 1993.

³Questo modello non tiene conto del tempo di salita dei segnali all'ingresso della porta, assunto pari a zero, nè dell'effetto di substrato, che varia la tensione di soglia del transistor.

12.3.2

Con riferimento al circuito descritto nel problema 12.3.1 e nella figura 12.16, ottenere una stima del massimo ritardo alla commutazione della tensione di uscita della porta da V_{SS} a V_{DD} .

12.3.3

Si consideri un circuito CMOS costituito da una rete di “pull-down” con 3 transistori NMOS in parallelo e una rete di “pull-up” formata da tre PMOSFET in serie (porta logica NOR a tre ingressi). Supponendo che i transistori siano caratterizzati dai parametri elencati nel problema 12.3.1, calcolare il massimo ritardo alla commutazione della tensione di uscita della porta da V_{SS} a V_{DD} e da V_{DD} a V_{SS} .

12.3.4

Si consideri nella figura 12.17 il circuito costituito dalla serie di due transistori NMOS ad arricchimento e uno a svuotamento: il circuito realizza la funzione logica NAND a due ingressi. Trovare il rapporto d'aspetto dei tre transistori necessario per ottenere una tensione di inversione logica pari a $V_{inv} = V_{DD}/2$. Si assuma per $M1$ e $M2$ un valore della tensione di soglia $V_{Tpd} = 1$ V e per $M3$ $V_{Tpu} = -3$ V.

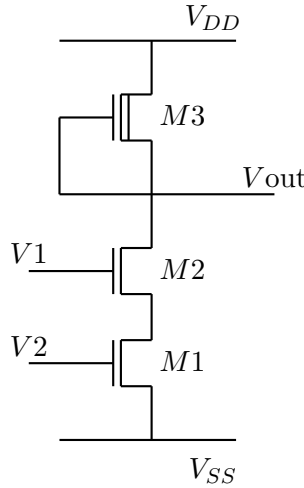


Figura 12.17: Porta NAND in tecnologia NMOS.

La tensione di inversione per un invertitore NMOS in funzione del rapporto d'aspetto dei due transistori è data da

$$V_{inv} = V_{Tpd} + |V_{Tpu}| \sqrt{\frac{S_{pu}}{S_{pd}}}$$

Assumendo che, nella porta NAND, i due transistori di “pull-down” siano uguali ($L_{pd1} = L_{pd2} = L_{pd}$, $W_{pd1} = W_{pd2} = W_{pd}$), il rapporto d'aspetto della serie dei due transistori si può scrivere come

$$S_{pd} = \frac{1}{\frac{L_{pd}}{W_{pd}} + \frac{L_{pd}}{W_{pd}}} = \frac{W_{pd}}{2L_{pd}}$$

Imponendo $V_{\text{inv}} = V_{DD}/2$, si ha

$$\begin{aligned}\frac{V_{DD}}{2} &= V_{Tpd} + |V_{Tpu}| \sqrt{\frac{S_{pu}}{S_{pd}}} \\ 2,5 &= 1 + 3 \sqrt{\frac{S_{pu}}{S_{pd}}} \\ \frac{S_{pu}}{S_{pd}} &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Affinché $S_{pd} = 4S_{pu}$, occorre che

$$\frac{W_{pd}}{L_{pd}} = 8 \frac{W_{pu}}{L_{pu}}$$

12.3.5

Dato il circuito della figura 12.18, dove $M1$ e $M2$ sono transistori NMOS ad arricchimento e $M3$ è un NMOSFET a svuotamento, trovare il rapporto d'aspetto necessario per avere $V_{\text{inv}} = V_{DD}/2$ (le tensioni di soglia sono le medesime del problema 12.3.4).

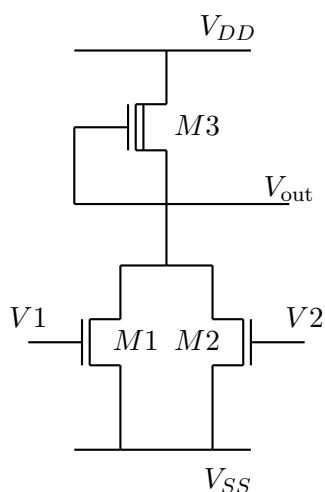


Figura 12.18: Porta NOR in tecnologia NMOS.

12.3.6

È dato il circuito della figura 12.19, costituito da un transistore a canale n , usato come interruttore (“pass transistor”) per pilotare un invertitore NMOS. le caratteristiche dei transistori sono le seguenti:

transistore	tensione di soglia	fattore di guadagno
“pull-down”	$V_{Tpd} = 1 \text{ V}$	$\beta_{pd} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ A V}^{-2}$
“pull-up”	$V_{Tpu} = -3 \text{ V}$	$\beta_{pu} = 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ A V}^{-2}$
pass transistor	$V_{Tpt} = 1,5 \text{ V}$	$\beta_{pt} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ A V}^{-2}$

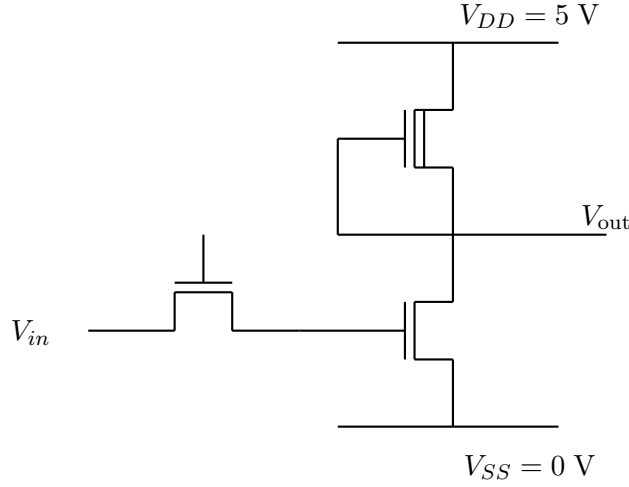


Figura 12.19: Invertitore NMOS pilotato attraverso un “pass transistor”.

Confrontare il valore minimo della tensione di uscita al livello logico basso (V_{OL}) del circuito dato con quello del solo invertitore.

La tensione di uscita al livello logico basso si ottiene eguagliando le correnti nei transistori di “pull-up” e “pull-down”; facendo l’ipotesi che il “pull-up” sia in saturazione e il “pull-down” in zona quadratica, si ha

$$\begin{aligned}
 I_{pu} &= I_{pd} \\
 \frac{1}{2}\beta_{pu} (V_{GS} - V_{Tpu})^2 &= \beta_{pd} \left[(V_{GS} - V_T) V_{DS} - \frac{1}{2}V_{DS}^2 \right] \\
 \frac{1}{2}\beta_{pu} (0 + 3)^2 &= \beta_{pd} \left[(5 - 1) V_{OL} - \frac{1}{2}V_{OL}^2 \right] \\
 4,5 \frac{\beta_{pu}}{\beta_{pd}} &= 4V_{OL} - 0,5V_{OL}^2
 \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$V_{OL} = 4 - \sqrt{16 - 9 \frac{\beta_{pu}}{\beta_{pd}}} = 0,29 \text{ V}$$

Quando l’invertitore è pilotato attraverso un MOSFET a canale n, la tensione di ingresso risulta diminuita di una quantità pari alla tensione di soglia. Infatti, con $V_{in} = V_{DD}$, la tensione di uscita del “pass-transistor” non può salire oltre $V_{DD} - V_{Tpt}$, tensione alla quale il canale del transistore si chiude. In questo caso si ha quindi all’ingresso dell’invertitore una tensione $V_{DD} - V_{Tpt} = 5 - 1,5 = 3,5 \text{ V}$. Il valore di V_{OL} si ottiene

ancora eguagliando le correnti:

$$\begin{aligned}
 I_{pu} &= I_{pd} \\
 \frac{1}{2}\beta_{pu}(V_{GS} - V_{Tpu})^2 &= \beta_{pd} \left[(V_{GS} - V_T) V_{DS} - \frac{1}{2} V_{DS}^2 \right] \\
 \frac{1}{2}\beta_{pu}(0 + 3)^2 &= \beta_{pd} \left[(3,5 - 1) V_{OL} - \frac{1}{2} V_{OL}^2 \right] \\
 4,5 \frac{\beta_{pu}}{\beta_{pd}} &= 2,5 V_{OL} - 0,5 V_{OL}^2 \\
 V_{OL} &= 2,5 - \sqrt{6,25 - 9 \frac{\beta_{pu}}{\beta_{pd}}} = 0,5 \text{ V}
 \end{aligned}$$

La presenza di un “pass-transistor” ha quindi l’effetto di spostare i livelli di tensione e di peggiorare i margini di rumore.

12.3.7

Si consideri la struttura nella figura 12.20 (“transmission gate”), costituita da due transistori a canale n e p connessi in parallelo. Tale dispositivo costituisce un interruttore, in grado di connettere l’uscita $V_2 = V_{out}$ con l’ingresso $V_1 = V_{in}$ sotto controllo dei segnali V_3 e V_4 (gate). Sapendo che

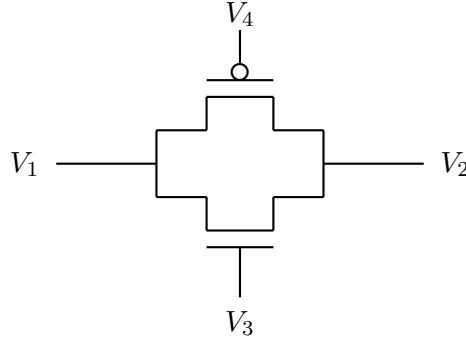


Figura 12.20: “Transmission gate”.

- NMOS: $\mu_n = 1295 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$, $W_n = 2L_n = 4 \mu\text{m}$, $V_{Tn} = 0,3 \text{ V}$;
 - PMOS: $\mu_p = 648 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$, $W_p = 4L_p = 8 \mu\text{m}$, $V_{Tp} = -1 \text{ V}$;
 - capacità di gate $C_{ox} = 6,9 \cdot 10^{-4} \text{ F cm}^{-2}$ (per entrambi i transistori);
- calcolare il valore della resistenza del dispositivo in conduzione.

Si faccia l’ipotesi $V_2 > V_1$ e $V_3 = V_{DD}$, $V_4 = 0$. Per il transistore a canale n , si ha

$$V_{DS} = V_2 - V_1 \quad V_{GS} - V_{Tn} = V_3 - V_1 - V_{Tn} = V_{DD} - V_1 - V_{Tn}$$

quindi il transistore NMOS è in zona triodo se $V_2 < V_{DD} - V_{Tn}$. Per il PMOSFET si ha invece

$$V_{DS} = V_1 - V_2 \quad V_{GS} - V_{Tp} = V_4 - V_2 - V_{Tp} = -V_2 - V_{Tp}$$

e la zona triodo è identificata dalla condizione $V_1 > -V_{Tp}$.

Nell'ipotesi $V_2 < V_1$, le due tensioni si scambiano i ruoli e quindi

$$V_1 < V_{DD} - V_{Tn} \rightarrow \text{NMOS in zona triodo}$$

$$V_2 > -V_{Tp} \rightarrow \text{PMOS in zona triodo}$$

Si hanno così, sul piano $V_1 \times V_2$, le regioni di funzionamento indicate nella figura 12.21. Al fine di calcolare la resistenza del dispositivo, occorre conoscere le correnti che attraversano i canali dei MOSFET. In condizioni statiche, quando $V_3 = V_{DD}$, il “transmission-gate” è in conduzione, dunque si deve avere $V_1 \simeq V_2$; ne consegue che il punto di funzionamento è molto vicino alla bisettrice del piano $V_1 \times V_2$. Tale bisettrice occupa per la maggior parte della propria lunghezza la regione entro cui entrambi i MOSFET sono in zona triodo. Si scrive allora

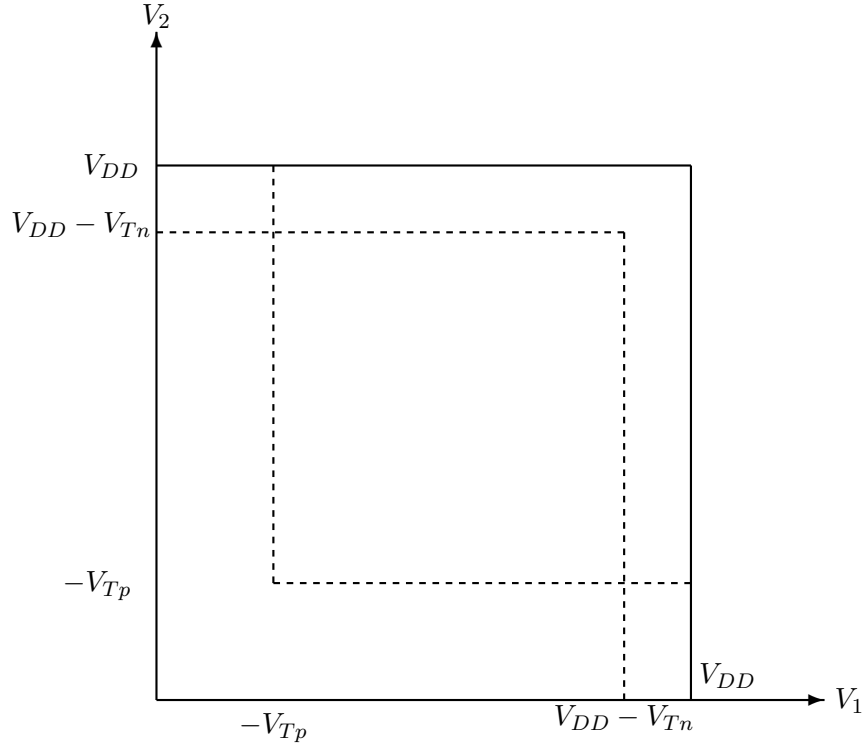


Figura 12.21: Regioni di funzionamento per il “transmission-gate”.

$$I_n = \beta_n \left\{ V_{DD} - V_1 - V_{Tn} - \frac{1}{2}(V_2 - V_1) \right\} (V_2 - V_1)$$

$$I_p = \beta_p \left\{ -V_{Tp} + \frac{1}{2}(V_2 - V_1) \right\} (V_2 - V_1)$$

La corrente totale vale $I = I_n - I_p$ e la conduttanza risulta $G = I/(V_2 - V_1)$. Sostituendo si ottiene, nel caso $\beta_n = \beta_p = \beta = 1,78 \cdot 10^{-4} \text{ A V}^{-2}$:

$$G = \beta_n V_{DD} - \beta_n V_{Tn} - \beta_p V_{Tp} + \frac{1}{2}(V_2 + V_1)(\beta_p - \beta_n)$$

$$G = \beta(V_{DD} - V_{Tn} - V_{Tp})$$

La dipendenza di G da V_1 e V_2 si ha soltanto attraverso le tensioni di soglia, per effetto di substrato. Trascurando tale dipendenza, la resistenza del “transmission-gate” risulta costante e pari a

$$R_{tg} = \frac{1}{\beta(V_{DD} - V_{Tn} - V_{Tp})} = 985 \, \Omega$$

Ovviamente, quando anche la tensione di ingresso V_1 è stazionaria, a V_{DD} o a 0, e in presenza di carichi esclusivamente capacitivi, la corrente che attraversa il dispositivo è nulla e si ha $V_2 = V_1$.

12.3.8

È dato un invertitore di dimensioni minime per una data tecnologia, che pilota una capacità C_L attraverso una linea di resistenza e capacità trascurabili. Inserire tra l'invertitore e il carico stadi di pilotaggio (altri invertitori) in numero e dimensioni tali da minimizzare il ritardo complessivo. Si usino i seguenti dati

- carico $C_L = 500 \, \text{fF}$,
- capacità di ingresso dell'invertitore $C_g = 12 \, \text{fF}$,
- resistenza di uscita dell'invertitore, in entrambi gli stati, $R_t = 1200 \, \Omega$ (il transistor di “pull-up” ha larghezza di canale circa doppia rispetto al “pull-down”).

A ogni commutazione della tensione di uscita, la capacità C_L si carica o scarica attraverso una resistenza di valore R_t . Il ritardo con il quale ciò avviene è proporzionale al prodotto $R_t \times C_L$. Poiché la resistenza R_t è a sua volta proporzionale al rapporto L/W tra lunghezza e larghezza del canale, si potrebbe ridurre il valore di R_t aumentando W ; questo tuttavia avrebbe l'effetto di accrescere la capacità di ingresso G_g dell'invertitore, proporzionale all'area WL , e sposterebbe quindi il problema del ritardo di commutazione sul dispositivo a monte dell'invertitore.

La soluzione adottata in questi casi è descritta nella figura 12.22 consiste nel realizzare una catena di invertitori, opportunamente scalati in dimensioni, in modo tale da rendere minimo il ritardo complessivo. Si supponga che tutti gli stadi abbiano la medesima

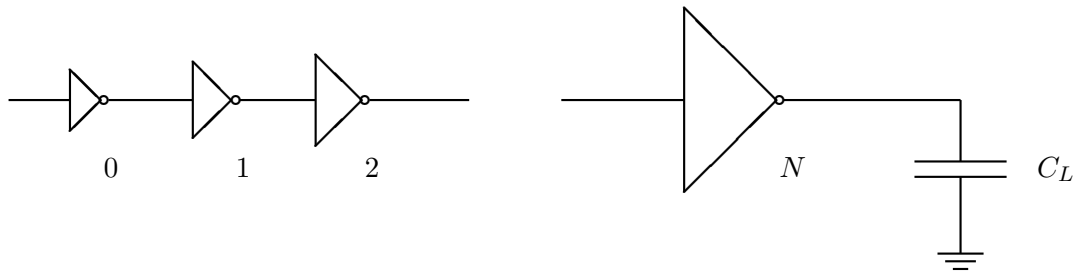


Figura 12.22: Cascata di stadi per pilotare un carico elevato.

lunghezza di canale L e sia W_i la larghezza di canale dell' i -esimo stadio. Indicando con f il rapporto tra i fattori di forma di due stadi consecutivi, costante lungo l'intera catena

$$f = \frac{W_i}{W_{i-1}} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

si ha che la resistenza di canale dell' i -esimo stadio è proporzionale a $(1/f)^i$, mentre la capacità di ingresso dello stadio successivo è proporzionale a f^{i+1} . Quindi, detto τ il ritardo di uno stadio che ne pilota uno identico, per ogni coppia di stadi adiacenti si avrà un ritardo proporzionale a f :

$$T_i = \tau f \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Con N stadi, il rapporto f deve essere scelto in modo tale che

$$f^{N+1} = \frac{C_L}{C_g} = Y \quad , \quad N + 1 = \frac{\ln(Y)}{\ln(f)}$$

e il ritardo totale vale

$$T = (N + 1) T_i = (N + 1) f \tau = \frac{f}{\ln(f)} (\tau \ln(Y))$$

Il fattore $\tau \ln(Y)$ dipende dalla tecnologia, mentre il progettista può scegliere il valore di f che minimizza T , annullando la derivata del ritardo:

$$\frac{dT}{df} = \tau \ln(Y) \frac{\ln(f) - 1}{\ln^2(f)} = 0$$

da cui $f = e$. Dal grafico nella figura 12.23, si vede che anche valori intorno a 3 o 4, offrono un risultato molto buono. Scelto il fattore di scalamento, si determina il numero

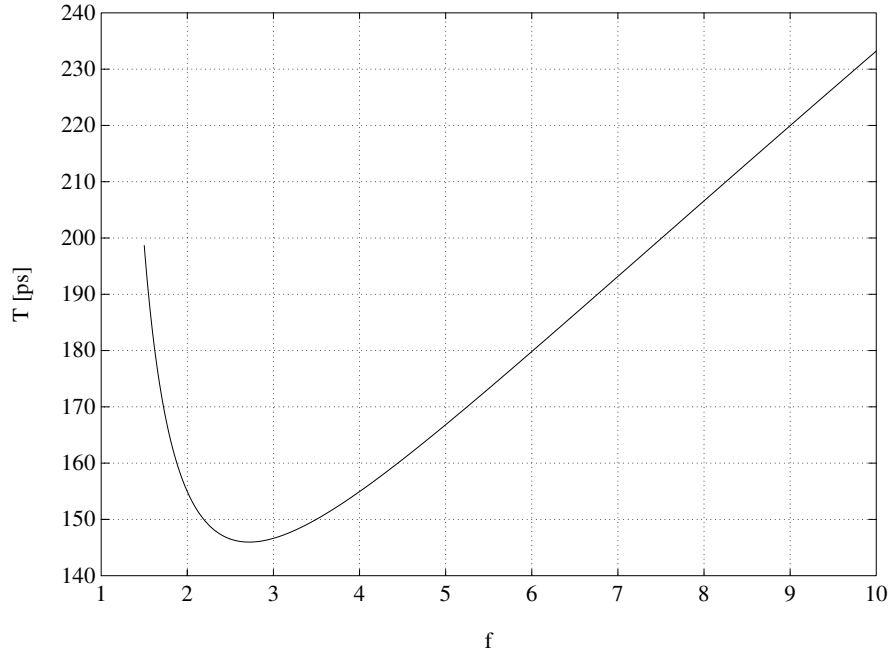


Figura 12.23: Minimizzazione del fattore di scalamento.

di stadi

$$N = \frac{\ln(Y)}{\ln(f)} - 1$$

Nel caso numerico in questione, si ha

$$\tau = 14,4 \text{ ps} \quad f = 2,718 \quad N = \ln \frac{500}{12} - 1 = 2,73 \approx 3$$

Poiché N deve essere un numero intero, si calcola il ritardo T per alcuni valori di N intorno a 3:

N	f	T [ps]
1	6,45	185,9
2	3,47	149,8
3	2,54	146,3
4	2,11	151,8

Collegando direttamente il primo invertitore alla capacità C_L si ottiene invece un ritardo

$$T = R_t C_L = 600 \text{ ps}$$

Nel caso migliore, la riduzione percentuale del ritardo è quindi del 75,6 %.